

# 板壳振动理论

曹志远 编著

VIBRATION THEORY OF PLATES AND SHELLS  
CAO ZHI-YUAN

中国铁道出版社

1983年·北京

# Vibration Theory of Plates and Shells

Cao Zhi-Yuan

The purpose of this monograph is to provide a summary of the basic theories and analysis methods for the vibration of plates and shells. The present book reviews the governing dynamic equations and relation formulas of plate and shell theory, various methods and techniques of dynamic analyses for plate and shell structures, various types of plate and shell vibration problems, the treatment methods for plate and shell structures with various shapes, boundary and added conditions as well as engineering applications of plate and shell dynamic theory. Besides, a series of useful numerical results in form of nondimensional parameters for engineering analyses and corresponding figures and tables as well as approximately 400 references in this field are given in this book. It is intended to be a reference book for teachers, research workers, and engineers, designers who are engaged in the dynamic analysis and design of structures.

Chapters 1, 2, 9 present the basic dynamic theory of elastic body, plate and shell, respectively. Chapters 3 through 5 deal with the vibration of rectangular, circular, annular, elliptical, parallelogram, trapezoid, triangular plates and plates with various boundary and added conditions. Chapters 10 through 13 deal with the vibration of circular and noncircular cylindrical, conical, spherical, shallow, membrane and open shells as well as other shells of revolution and curved panels. Chapter 6 is devoted to general method for free, forced, damping vibrations and internal friction theory of continuum body vibration. Chapters 7, 14 discuss various approximate and numerical methods for plate and shell vibration analyses. Chapters 8, 14 consider the complicating effects, such as anisotropy, initial stresses, variable thickness, large deflection, elastoplasticity, thermo-elasticity, nonhomogeneity (composite, combined, stiffened, grillages et al.), shear deformation and rotatory inertia as well as the effects of surrounding media (fluid and soil).

## 内 容 提 要

本书系统地论述了板壳振动的基本理论与分析方法。主要包括板壳动力学的有关基本理论,板壳动力分析的各种方法与技巧,板壳振动的各种类型问题,板壳结构的各种形状、边界与特殊情况的处理方法,以及板壳结构的工程应用问题。全书还给出了大量可供实用的数值结果,并附有详细参考文献目录。

读者对象:高等院校工程专业高年级学生、研究生、教师及结构动力学研究人员、设计人员、工程技术人员。

## 板壳振动理论

曹志远 编著

中国铁道出版社出版、发行

责任编辑 王能远 装帧设计 刘景山

各地新华书店经售

中国铁道出版社印刷厂印

开本: 787×1092毫米 1/32 印张: 29.5 字数: 742 千

1989年4月 第1版 第1次印刷

印数: 0001—1,000册 定价: 12.55元

ISBN7-113-00114-9/TU·33

# 前 言

结构分析是各工程技术领域及各工程学科研究与工科高等教育的共同和普遍关心的问题。凡受有载荷的机械或设施,其设计与研究总离不开结构的力学分析这一环节。结构分析分为静力与动力两大部分。目前国内已出版书籍中,在动力学方面,以结构类型而言,大都只涉及一、两、多个自由度离散系统以及弦、杆、轴、梁、拱、环、膜、桁架、框架等简单连续体,尚缺少系统的板、壳内容;凡板壳书籍中,又大都只讨论静力分析,尚缺乏全面的动力学内容。因此需要我国自己编著板壳动力分析方面的专门书籍来补充与完善这两类书籍在这方面的不足。

板壳动力问题是近代许多工程部件设计与研究的关键。诸如,各种动力机械,运输机械,飞机、导弹、火箭的机身、机翼、发动机叶片,卫星与航天器的外壳、天线、集能器,原子反应堆、粒子加速器的主体结构,船舶、舰艇的船身、甲板、货舱,海洋平台,储油罐,地下结构与隧道,化工容器,高炉主体,电厂冷却塔,大跨度结构的屋顶,各种新型建筑结构等等都有各种各样板壳结构。由于它们所承受的各种振动、冲击、风载、波浪、地震、爆炸、移动、气动载荷等均是动力荷载,因此板壳动力学已成为近代与将来工程技术发展的一个必不可少的理论基础。

近半个世纪来,板壳动力学的研究成果显著,但大部份散落在各种文献之中,使初学者难以很快入门。编写本书目的就在于系统介绍有关研究结果,使读者有个全貌了解,并可作为深入研究的基础。本书将介绍板壳动力学的基本理论和分析方法,但限于振动理论,并主要讨论线弹性、小变形的薄板、薄壳问题,而只在适当章节给出一些复杂问题的新近成果。全书分为板与壳两大部份,并按结构类型与分析方法划分章节,读者也可依此直接查阅所需章节内容。我们希望这本书能为在板壳动力学研究与工程应用方面工作的读者提供必要的基础知识。

本书对板壳动力学的有关基本理论,板壳振动理论的各种类型问题,板壳结构的各种形状、边界与特殊情况,板壳结构的工程应用问题,将分门别类予以系统介绍,可作为各类问题初学者的基础。本书将介绍几十种常用的板壳动力分析方法,也可作为一般连续体动力分析的处理方法的参考。本书对每个问题除叙述一般性理论、解法与相应公式外,还尽可能列出较为详尽的数值结果,可供工程设计计算直接查用。在计算方法方面,除了经典解析解外,还更多介绍了许多工程实用的近似解法;鉴于近代计算技术发展,书中特别注意到变分原理与数值解法的论述。此外,书中还介绍了结构动力学近期发展的一些比较成熟的新的理论与方法。这样就有可能兼顾到研究人员对深入性、教学人员对系统性、工程人员对实用性的要求。

本书初稿承蒙钱伟长、钱令希、刘恢先等教授审阅,并提出许多宝贵意见。本书一部分也反映本人近年来和一些兄弟单位共同合作研究的成果。对此表示衷心的感谢。由于作者水平有限,书中难免有许多不妥之处,希读者多加指正。

曹 志 远

一九八六年六月于同济大学



# 目 录

<b>第一章 弹性体动力学概论</b>	1
§ 1.1 引言	1
§ 1.2 弹性体动力学基本方程	1
§ 1.3 弹性体动力学变分原理	5
§ 1.4 弹性体动力学积分方程	8
§ 1.5 弹性体振动分析的基本方法	8
<b>第二章 弹性薄板理论的基本动力方程</b>	13
§ 2.1 薄板横向振动的基本微分方程	13
§ 2.2 薄板横向振动的基本变分方程	18
§ 2.3 薄板横向振动的基本积分方程	20
§ 2.4 极坐标系中薄板振动方程	22
§ 2.5 椭圆坐标系中薄板振动方程	25
§ 2.6 正交曲线坐标系中薄板振动方程	27
§ 2.7 斜坐标系中薄板振动方程	29
<b>第三章 矩形板的振动</b>	32
§ 3.1 单向板	32
§ 3.2 四边简支板	36
§ 3.3 对边简支板	39
§ 3.4 四边固定板	45
§ 3.5 悬臂板	47
§ 3.6 适合于求解各种边界条件矩形板的梁函数组合法	49
§ 3.7 混合边界条件板	54
§ 3.8 具有附加质量、刚度、支承的板	59
§ 3.9 开孔板	67
<b>第四章 曲线边界板的振动</b>	69
§ 4.1 简单边界整圆板	69
§ 4.2 简单边界圆环板	73
§ 4.3 特殊边界整圆板与圆环板	75
§ 4.4 扇形、环扇形、半圆形板	83
§ 4.5 椭圆板	85
<b>第五章 非矩形直线边界板的振动</b>	90
§ 5.1 用摄动法解周边简支平行四边形板	90
§ 5.2 用双重三角级数法解周边简支的梯形与三角形板	92
§ 5.3 用双对称法解周边简支正多边形板	94
§ 5.4 用薄膜比拟法解周边简支多边形板	96

§ 5.5	用配点法解简单边界的平行四边形、菱形、梯形、三角形板 .....	96
§ 5.6	用梁函数组合法解各种形状后掠板及各种边界条件平行四边形板 .....	101
§ 5.7	用等面积法估算任意形状板的固有频率 .....	105
<b>第六章</b>	<b>平板的自由振动与强迫振动 .....</b>	<b>107</b>
§ 6.1	平板振型的正交性 .....	107
§ 6.2	具有初始条件平板的自由振动 .....	108
§ 6.3	在外载作用下平板强迫振动的一般解 .....	110
§ 6.4	各种实际载荷情况下板的动力响应 .....	113
§ 6.5	结构的内摩擦理论 .....	120
§ 6.6	计入阻尼之平板自由振动 .....	123
§ 6.7	计入阻尼之平板强迫振动 .....	128
<b>第七章</b>	<b>平板振动的近似解法 .....</b>	<b>133</b>
§ 7.1	关于平板固有振动的变分原理 .....	133
§ 7.2	瑞雷-里兹法 .....	134
§ 7.3	迦辽金法 .....	141
§ 7.4	求解固有频率下限的方法 .....	142
§ 7.5	积分方法近似解法 .....	145
§ 7.6	斯托独拉静载法 .....	146
§ 7.7	白劳金渐近法 .....	147
§ 7.8	等效离散体系法 .....	149
§ 7.9	等效网格梁法 .....	153
§ 7.10	有限差分法 .....	155
§ 7.11	有限单元法 .....	159
§ 7.12	半解析元法 .....	163
§ 7.13	固有振动离散化方程的数值解法 .....	168
§ 7.14	强迫振动的离散化方程的时间积分法 .....	175
§ 7.15	强迫振动的非齐次线代方程的数值解法 .....	179
<b>第八章</b>	<b>平板振动的一些专门问题 .....</b>	<b>182</b>
§ 8.1	平面力板的振动 .....	182
§ 8.2	各向异性板的振动 .....	187
§ 8.3	厚板的振动 .....	198
§ 8.4	组合与复合板的振动 .....	208
§ 8.5	变厚度板的振动 .....	217
§ 8.6	加肋板的振动 .....	221
§ 8.7	连续板的振动 .....	223
§ 8.8	弹性地基上板的振动 .....	227
§ 8.9	平板的大挠度振动 .....	231
§ 8.10	平板的非线性弹性振动 .....	238
§ 8.11	平板的动力弹塑性分析 .....	244
§ 8.12	平板与流体的耦合振动 .....	254

§ 8.13	平板的热振动 .....	257
§ 8.14	无限大板的动力分析 .....	259
<b>第九章</b>	<b>弹性薄壳振动的一般性理论 .....</b>	<b>263</b>
§ 9.1	壳体概述 .....	263
§ 9.2	曲面理论基础 .....	264
§ 9.3	几何方程 .....	269
§ 9.4	位移、应变表达式 .....	272
§ 9.5	物理方程与应力表达式 .....	273
§ 9.6	内力表达式 .....	274
§ 9.7	动力平衡方程 .....	276
§ 9.8	薄壳振动的基本微分方程与边界条件 .....	278
§ 9.9	薄壳振动的变分方程 .....	279
§ 9.10	各种薄壳振动理论的综合比较 .....	283
§ 9.11	薄壳振动的简化理论 .....	287
<b>第十章</b>	<b>柱壳的振动 .....</b>	<b>290</b>
§ 10.1	圆柱壳振动的基本方程 .....	290
§ 10.2	无限长圆柱壳 .....	294
§ 10.3	两端简支的有限长圆柱壳 .....	296
§ 10.4	圆柱壳振动的简化理论 .....	302
§ 10.5	其它边界的有限长圆柱壳 .....	303
§ 10.6	开口圆柱壳 .....	317
§ 10.7	其它截面形状的柱壳 .....	324
<b>第十一章</b>	<b>旋转壳的振动 .....</b>	<b>327</b>
§ 11.1	旋转壳振动的基本方程 .....	327
§ 11.2	旋转壳的轴对称振动 .....	330
§ 11.3	完全锥壳 .....	331
§ 11.4	截头锥壳与开口锥壳 .....	336
§ 11.5	球壳 .....	338
<b>第十二章</b>	<b>扁壳的振动 .....</b>	<b>344</b>
§ 12.1	基本方程的简化 .....	344
§ 12.2	球形扁壳振动的一般解 .....	346
§ 12.3	球形扁壳的轴对称振动 .....	349
§ 12.4	具有矩形底面的扁壳的振动 .....	352
§ 12.5	扁壳振动的实用解法 .....	355
<b>第十三章</b>	<b>无矩壳的振动 .....</b>	<b>358</b>
§ 13.1	无矩壳理论的提出与应用 .....	358
§ 13.2	无矩壳振动理论的基本方程 .....	359
§ 13.3	柱形无矩壳 .....	360
§ 13.4	旋转无矩壳 .....	370
<b>第十四章</b>	<b>壳体振动的其它问题 .....</b>	<b>378</b>

§ 14.1	壳体固有振动分析的近似解法 .....	378
§ 14.2	壳体的自由振动与强迫振动 .....	383
§ 14.3	壳体振动分析的数值解法 .....	390
§ 14.4	加肋壳的振动 .....	399
§ 14.5	变厚度壳的振动 .....	400
§ 14.6	各向异性壳的振动 .....	401
§ 14.7	厚壳的振动 .....	407
§ 14.8	复合壳体的振动 .....	414
§ 14.9	具有初应力的壳体的振动 .....	417
§ 14.10	壳体的大挠度振动 .....	419
§ 14.11	壳体与流体的耦合振动 .....	423
参考文献	.....	429
附录 I	梁函数及其积分 .....	445
附录 II	单向厚板振型函数 .....	453
附录 III	矩形板的固有频率系数 .....	455
附录 IV	Dirac Delta 函数 .....	461

# 第一章 弹性体动力学概论

## § 1.1 引言

由于近代科学技术发展,许多机械与设施必须考虑在动荷载条件下的设计计算。结构动力学就是研究在动荷载作用下结构反应的分析方法的一门科学。

结构动力学是结构分析的一个组成部分。当荷载(包括其大小、方向或作用点)随时间迅速改变,结构的力学分析必须考虑质量的惯性力时,其结构分析都属于结构动力学研究范围。结构振动理论主要研究弹性体系在其原来平衡位置附近所作微幅振动,是结构动力学的基础。

结构振动理论一般可分为有限自由度体与弹性体振动两大部分。所有结构都具有一定质量和刚度分布。作为简化,可将结构看成是由具有点质量的刚性体和无质量的变形体组成,并可用有限个位移坐标来表示结构的运动状态,这就是有限自由度体振动理论。而弹性体振动理论则分析质量和刚度都是连续分布的结构,本质上认为结构由无穷多质量点组成,并用空间连续函数来反映结构的运动状态,所以又称为无限多自由度体系,这是一种较前者更为严密的振动理论。弹性体振动研究对象包括杆、轴、索、梁、框、拱、环、膜、板、壳以及三维弹性体等。按连续弹性体分析的板壳振动则是其中比较复杂和困难的一部分。

板与壳是一种二维承弯结构。这些结构的共同特点是其一个方向尺度远小于另二个方向尺度。其小尺度(厚度)方向中点联成一中面,当中面为一平面时则为板;为一曲面时则为壳。这里所讨论的板壳振动,若不作特别说明,一般是指匀质、各向同性、线弹性、等厚度、小挠度、无阻尼的薄板、薄壳情况。

无论哪种弹性构件(其中也包括板与壳)都属于三维连续弹性体在某种位移、应变、应力假定条件下的简化<sup>[70]</sup>,因此在具体研究板壳构件振动以前有必要介绍一下连续弹性介质动力学的基本方程以及弹性体振动分析的一般方法。

## § 1.2 弹性体动力学基本方程

弹性体在运动过程中各点将发生位移。在直角坐标系中弹性体内一点的位移可以用它在 $x, y, z$ 三轴上的投影 $u, v, w$ 来表示,一般以沿坐标轴正方向为正,沿坐标轴负方向为负。 $u, v, w$ 称为弹性体的位移分量。对于动力学问题而言,三个位移分量同时是空间坐标 $x, y, z$ 及时间坐标 $t$ 的函数。

由于位移,弹性体将发生形变,其中包括长度和角度的改变。在直角坐标系中,弹性体内一点的形变可以用六个应变分量来表示:正应变 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ 分别表示沿 $x, y, z$ 方向微小线段的单位长度伸缩;剪应变 $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ 分别表示 $y$ 与 $z, z$ 与 $x, x$ 与 $y$ 两方向微小线段间直角的改变。正应变以伸长为正,缩短为负;剪应变以直角变小为正,变大为负。弹性力学中已经证明,如果已知一点的六个应变分量,则就可以求得经过该点的任一微小线段

的正应变以及经过该点的任意两个微小线段之间的角度的改变, 因此这六个应变分量可以完全确定一点的形变状态。对于动力学问题而言, 六个形变分量也同时是空间坐标  $x, y, z$  及时间坐标  $t$  的函数。

通过几何学方面推导, 可以建立形变分量与位移分量之间关系式。如果忽略高阶微量, 对于微小形变和位移我们有下列六个几何方程, 即哥西 (Cauchy) 关系式:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.1a), \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (1.1b), \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1.1c),$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (1.1d), \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad (1.1e), \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.1f)$$

由于形变, 弹性体内将产生应力。体内某点应力表示经过该点某截面上内力强度, 与所取的截面方向有关。在直角坐标系中, 可以在一点附近取出一个微小的正六面体, 其各面与坐标轴垂直, 将每个面上的应力分解为一个正应力和两个剪应力, 分别和三个坐标轴平行, 共计九个应力分量: 正应力  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  分别表示作用在垂直于  $x, y, z$  轴的面上, 沿着  $x, y, z$  轴方向; 剪应力  $\tau_{yz}, \tau_{zy}, \tau_{xz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}, \tau_{yx}$ , 其中前一个角码表明作用面垂直于那个坐标轴, 后一个角码表明作用方向沿着那个坐标轴。如果某一个面上的外法线方向是沿着坐标轴的正方向, 则这个面上的三个应力分量的正方向为沿着坐标轴的正向; 负方向为沿着坐标轴的负向。反之亦然。根据微体的力矩平衡, 可以得出

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (a)$$

这就是剪应力的互等性。

弹性力学中已经证明, 如果已知一点的六个应力分量, 则就可以求得经过该点的任意截面上的正应力和剪应力。若此截面的外法线  $N$  的方向余弦为

$$\cos(N, x) = l, \quad \cos(N, y) = m, \quad \cos(N, z) = n \quad (b)$$

则截面上应力在三个坐标轴上的投影分别为

$$X_N = l\sigma_x + m\tau_{yx} + n\tau_{zx} \quad (1.2a)$$

$$Y_N = l\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{zy} \quad (1.2b)$$

$$Z_N = l\tau_{xz} + m\tau_{yz} + n\sigma_z \quad (1.2c)$$

因此弹性体中上述六个应力分量可以完全确定一点的应力状态。对于动力学问题而言, 六个应力分量也同时是空间坐标  $x, y, z$  及时间坐标  $t$  的函数。

对于完全弹性的各向同性体, 形变分量与应力分量之间关系有下列六个物理方程, 即虎克定律:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (1.3a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \quad (1.3b)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad (1.3c)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (1.3d)$$

式中,  $E$  是弹性模量,  $G$  是剪切模量,  $\nu$  是泊松比, 这三者之间关系为

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.4)$$

对于一般匀质各向同性体, 这些弹性常数均不是坐标、时间和方向的函数。

由式 (1.3) 可解得用应变分量表示的应力分量表达式:

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\nu} \left( \varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right) \quad (1.5a)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1+\nu} \left( \varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right) \quad (1.5b)$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1+\nu} \left( \varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right) \quad (1.5c)$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz}, \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz}, \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad (1.5d)$$

其中体积应变

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (1.6)$$

对于直角坐标系, 在弹性体内一点附近取出一个微小的正六面体, 使其各面与坐标轴垂直。根据此微体上力的动态平衡, 计入体积力沿坐标轴分量  $K_x, K_y, K_z$ , 及惯性力, 可得运动方程

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + K_x = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.7a)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + K_y = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (1.7b)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + K_z = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (1.7c)$$

式中  $\rho$  为弹性体的质量密度, 对于匀质体来说, 它是一个常量。

这样, 对于弹性体动力学问题, 一共有十五个未知数: 三个位移分量  $u, v, w$ ; 六个应变分量  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy}$ ; 六个应力分量  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}$ 。这十五个未知数应当满足十五个方程: 三个运动方程 (1.7); 六个几何方程 (1.1); 六个物理方程 (1.3) 或 (1.5)。此外, 还需满足边界条件和初始条件: 在位移边界问题中, 位移分量在边界上应满足位移边界条件

$$u_s = \bar{u}, \quad v_s = \bar{v}, \quad w_s = \bar{w} \quad (1.8)$$

在应力边界问题中, 应力分量在边界上应当满足应力边界条件, 它就是式 (1.2) 在边界面上表达式

$$l\sigma_{xx} + m\tau_{yz} + n\tau_{xz} = F_x \quad (1.9a)$$

$$l\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{yz} = F_y \quad (1.9b)$$

$$l\tau_{xz} + m\tau_{yz} + n\sigma_z = F_z \quad (1.9c)$$

式 (1.8), (1.9) 中等号左边的位移、应力分量均为边界值, 等号右边是该边界上的位移、应力分量给定值。位移、速度初始值应当满足初始条件

$$u(0) = u_0, \quad v(0) = v_0, \quad w(0) = w_0 \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0) = \dot{u}_0, \quad \frac{\partial v}{\partial t}(0) = \dot{v}_0, \quad \frac{\partial w}{\partial t}(0) = \dot{w}_0 \quad (1.11)$$

上述两式中, 等号左边的位移、速度分量均为初始值, 等号右边是初始时刻的位移、速度分量给定值。当然, 应力分量和位移分量解都应当是单值的。

将几何方程 (1.1) 代入物理方程 (1.5), 再代入运动方程 (1.7), 可得弹性体动力学基本方程组

$$\frac{E}{2(1+\nu)} \left[ \nabla^2 u + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] + K_r = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.12a)$$

$$\frac{E}{2(1+\nu)} \left[ \nabla^2 v + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] + K_\theta = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (1.12b)$$

$$\frac{E}{2(1+\nu)} \left[ \nabla^2 w + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] + K_z = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (1.12c)$$

式中

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1.13)$$

对于圆柱坐标系  $(r, \theta, z)$ ，有沿坐标轴的三个位移分量  $u, v, w$ ，六个应变分量  $\epsilon_r, \epsilon_\theta, \epsilon_z, \epsilon_{rz}, \epsilon_{r\theta}, \epsilon_{\theta z}$ ；六个应力分量  $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}, \tau_{r\theta}, \tau_{\theta z}$ ，一共有十五个未知数将满足下列十五个方程：

几何方程

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \quad (1.14a), \quad \epsilon_\theta = \frac{1}{r} \left( u + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \quad (1.14b), \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1.14c),$$

$$\gamma_{\theta z} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \quad (1.14d), \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad (1.14e),$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u}{r \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \quad (1.14f)$$

物理方程

$$\epsilon_r = \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)] \quad (1.15a)$$

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z)] \quad (1.15b)$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)] \quad (1.15c)$$

$$\gamma_{\theta z} = \frac{\tau_{\theta z}}{G}, \quad \gamma_{rz} = \frac{\tau_{rz}}{G}, \quad \gamma_{r\theta} = \frac{\tau_{r\theta}}{G} \quad (1.15d)$$

运动方程

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{\theta r}}{r \partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + K_r = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.16a)$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_\theta}{r \partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + K_\theta = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (1.16b)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{r \partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{r\theta}}{r} + K_z = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (1.16c)$$

式中  $K_r, K_\theta, K_z$  分别为体积力在圆柱坐标轴上分量。

将几何方程 (1.14) 代入物理方程 (1.15)，再代入运动方程 (1.16)，可得圆柱坐标系中弹性体动力学基本方程组

$$\begin{aligned} & 2(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{r \partial r} - \frac{u}{r^2} \right) + (1-2\nu) \left( \frac{\partial^2 u}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial^2 v}{r \partial r \partial \theta} - (3-4\nu) \frac{\partial v}{r^2 \partial \theta} \\ & + \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} + \frac{1-2\nu}{G} K_r = \frac{1-2\nu}{G} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1.17a)$$

$$\frac{\partial^2 u}{r \partial r \partial \theta} + (3-4\nu) \frac{\partial u}{r^2 \partial \theta} + (1-2\nu) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\partial v}{r \partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 v}{r^2 \partial \theta^2}$$



$$+\frac{\partial^2 w}{r\partial\theta\partial z}+\frac{1-2\nu}{G}K_\theta=\frac{1-2\nu}{G}\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (1.17b)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial r\partial z}+\frac{\partial u}{r\partial z}+\frac{\partial^2 v}{r\partial\theta\partial z}+(1-2\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{\partial w}{r\partial r}+\frac{\partial^2 w}{r^2\partial\theta^2}\right)+2(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \\ & +\frac{1-2\nu}{G}K_z=\frac{1-2\nu}{G}\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1.17c)$$

在轴对称情况下, 上述基本方程组转变为

$$G\left[\nabla^2 u-\frac{u}{r^2}+\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]+K_r=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.18a)$$

$$G\left[\nabla^2 w+\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]+K_z=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (1.18b)$$

式中

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\partial}{r\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1.19)$$

对于球坐标系  $(r, \varphi, \theta)$ , 在球对称情况下有弹性体动力学基本方程

$$\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}G\left(\nabla^2 u-\frac{2u}{r^2}\right)+K_r=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.20)$$

式中

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2\partial}{r\partial r} \quad (1.21)$$

而  $u, K_r$  分别为径向位移和径向体积力。

### § 1.3 弹性体动力学变分原理

描述一个弹性体运动过程可以用按上述动态平衡观点建立的基本微分方程, 也可以用按能量观点建立的基本变分方程, 这就涉及一系列有关变形能、动能、外力功等概念和动力学变分原理。<sup>〔267〕〔292〕〔324〕〔326〕</sup> 下面许多有关振动问题的近似解法和数值解法均与变分原理有关, 它是研究弹性体动力学的一个重要理论基础。

弹性体因受力发生形变, 而内部产生应变和应力, 这时体内具有一定弹性形变势能, 其单位体积的形变势能或称比能为

$$W=\frac{1}{2}\left(\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_y+\sigma_z\varepsilon_z+\tau_{xy}\gamma_{xy}+\tau_{yz}\gamma_{yz}+\tau_{zx}\gamma_{zx}\right) \quad (1.22)$$

它与六个应变分量和六个应力分量有关。代入式 (1.5) 它可单独用应变分量表示为

$$W=W(\varepsilon_{ij})=\frac{1}{2}\left[2G\frac{(1-\nu)}{1-2\nu}\varepsilon^2-G(4\varepsilon_x\varepsilon_y+4\varepsilon_y\varepsilon_z+4\varepsilon_z\varepsilon_x-\gamma_{xy}^2-\gamma_{yz}^2-\gamma_{zx}^2)\right] \quad (1.23)$$

代入式 (1.3), 它可单独用应力分量表示为

$$\begin{aligned} W=W(\varepsilon_{ij})&=\frac{1}{2E}[\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2-2\nu(\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x) \\ &+2(1+\nu)(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2)] \end{aligned} \quad (1.24)$$

将比能表达式 (1.23) 在整个弹性体内积分, 并代入式 (1.6), (1.1), 可得弹性体形变势能即变形能的一般表达式

$$\begin{aligned}
 U = \iiint_V W(u_i) dV = G \iiint_V & \left\{ \frac{1-\nu}{1-2\nu} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right]^2 - 2 \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right. \right. \\
 & + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} \left. \right] - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right. \\
 & \left. \left. + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} dx dy dz \quad (1.25)
 \end{aligned}$$

应该注意, 弹性体变形能是一个时间的函数。

将式 (1.23) 对六个应变分量分别微分, 并代入应变-应力关系式 (1.5), 可得格林 (Green) 关系式

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_x} = \sigma_x, \quad \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_y} = \sigma_y, \quad \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_z} = \sigma_z, \quad \frac{\partial W}{\partial \gamma_{yz}} = \tau_{yz}, \quad \frac{\partial W}{\partial \gamma_{xz}} = \tau_{xz}, \quad \frac{\partial W}{\partial \gamma_{xy}} = \tau_{xy} \quad (1.26)$$

将式 (1.24) 对六个应力分量分别微分, 并代入应力-应变关系式 (1.3), 可得卡氏 (Castigliano) 关系式

$$\frac{\partial W}{\partial \sigma_x} = \varepsilon_x, \quad \frac{\partial W}{\partial \sigma_y} = \varepsilon_y, \quad \frac{\partial W}{\partial \sigma_z} = \varepsilon_z, \quad \frac{\partial W}{\partial \tau_{yz}} = \gamma_{yz}, \quad \frac{\partial W}{\partial \tau_{xz}} = \gamma_{xz}, \quad \frac{\partial W}{\partial \tau_{xy}} = \gamma_{xy} \quad (1.27)$$

弹性体运动时, 各点具有速度, 因此整体具有动能

$$T = \frac{1}{2} \iiint_V \rho \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy dz \quad (1.28)$$

在弹性体动力学中, 与弹性力学的最小势能原理相应的位移变分原理为哈密顿 (Hamilton) 原理。它表明从  $t_0$  状态到  $t_1$  状态过程中满足位移边界条件 (1.10) 的所有几何可能运动状态中真正运动状态满足

$$\begin{aligned}
 & \delta \int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt + \int_{t_0}^{t_1} \iiint_V (K_x \delta u + K_y \delta v + K_z \delta w) dV dt \\
 & + \int_{t_0}^{t_1} \iint_{S_F} (F_x \delta u + F_y \delta v + F_z \delta w) ds dt = 0 \quad (1.29)
 \end{aligned}$$

式中动能  $T$ , 变形能  $U$  分别见式 (1.28), (1.25),  $K_x, K_y, K_z$  为体积力分量,  $F_x, F_y, F_z$  为给定力边界条件面  $S_F$  上作用的面载荷分量。

将式 (1.29) 经变分运算及分部积分<sup>[292]</sup>可得到下列方程

$$\begin{aligned}
 & \iiint_V \left[ \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + K_x - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \delta u \right. \\
 & + \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + K_y - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) \delta v \\
 & + \left. \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + K_z - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \delta w \right] dV \\
 & + \iint_{S_F} [(l\sigma_x + m\tau_{yz} + n\tau_{xz} - F_x) \delta u + (l\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{zy} - F_y) \delta v \\
 & + (l\tau_{xz} + m\tau_{yz} + n\sigma_z - F_z) \delta w] ds = 0 \quad (1.30)
 \end{aligned}$$

上式中几何可能位移  $\delta u, \delta v, \delta w$  在体内及给定力边界条件上是任意的, 因此必然有其前面的每个括号为零才能使式 (1.30) 成立, 这就是 §1.2 中的运动方程 (1.7) 及力边界条件 (1.9)。因此位移变分原理 (1.29) 保证满足位移边界条件的几何可能位移也满足运动方程及力边界条件, 显然这种运动状态是真正解, 也就是说式 (1.29) 是和运动方程及力边界

条件是等价的。因此满足位移边界条件的位移解可以通过变分方程 (1.29) 来求取真正解, 而不需要满足 § 1.2 中所列各基本微分方程。

在弹性体动力学中, 还存在二种广义变分原理: 以位移、应力为自变函数的二类变量广义变分原理<sup>[221]</sup> 和以位移、应变、应力为自变函数的三类变量广义变分原理。<sup>[267][324]</sup>

位移、应力变分原理认为从  $t_0$  状态到  $t_1$  状态中, 与真正运动状态相应的位移、应力分量满足

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_0}^{t_1} \left\{ T + \iiint_V W(\sigma_{ij}) dV - \iiint_V \left[ \sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} + \sigma_z \frac{\partial w}{\partial z} + \tau_{xy} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \tau_{xz} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \tau_{yz} \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] dV \right\} dt \\ + \int_{t_0}^{t_1} \iiint_V (K_x \delta u + K_y \delta v + K_z \delta w) dV dt \\ + \int_{t_0}^{t_1} \iint_{S_F} (F_x \delta u + F_y \delta v + F_z \delta w) ds dt + \delta \int_{t_0}^{t_1} \iint_{S_u} [(l\sigma_x + m\tau_{yx} + n\tau_{zx}) \\ \cdot (u - \bar{u}) + (l\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{zy})(v - \bar{v}) \\ + (l\tau_{xz} + m\tau_{yz} + n\sigma_z)(w - \bar{w})] ds dt = 0 \end{aligned} \quad (1.31)$$

式中动能  $T$  及用应力表达的比能  $W(\sigma_{ij})$  分别见式 (1.28)、(1.24),  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{w}$  为给定位移边界条件面  $S_u$  上的给定位移分量。式 (1.31) 等价于运动方程, 位移-应力关系及力、位移边界条件, 因此对于所取任意位移、应力解可以通过变分方程 (1.31) 来求取真正解, 而不需要满足 § 1.2 中所列各基本方程及条件。

位移、应变、应力变分原理认为从  $t_0$  状态到  $t_1$  状态中, 与真正运动状态相应的位移、应变、应力分量满足

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_0}^{t_1} \left\{ T - \iiint_V W(e_{ij}) dV - \iiint_V \left[ \sigma_x \left( \frac{\partial u}{\partial x} - e_x \right) + \sigma_y \left( \frac{\partial v}{\partial y} - e_y \right) + \sigma_z \left( \frac{\partial w}{\partial z} - e_z \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \tau_{xy} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - \gamma_{xy} \right) + \tau_{xz} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} - \gamma_{xz} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \tau_{yz} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} - \gamma_{yz} \right) \right] dV \right\} dt \\ + \int_{t_0}^{t_1} \iiint_V (K_x \delta u + K_y \delta v + K_z \delta w) dV dt \\ + \int_{t_0}^{t_1} \iint_{S_F} (F_x \delta u + F_y \delta v + F_z \delta w) ds dt \\ + \delta \int_{t_0}^{t_1} \iint_{S_u} [(l\sigma_x + m\tau_{yx} + n\tau_{zx})(u - \bar{u}) + (l\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{zy})(v - \bar{v}) \\ + (l\tau_{xz} + m\tau_{yz} + n\sigma_z)(w - \bar{w})] ds dt = 0 \end{aligned} \quad (1.32)$$

式中动能  $T$  及用应变表达的比能  $W(e_{ij})$  分别见式 (1.28), (1.23)。式 (1.32) 等价于运动方程、物理方程、几何方程及力、位移边界条件, 因此对于所取任意位移、应变、应力解可以通过变分方程 (1.32) 来求取真正解, 而不需要满足 § 1.2 中所列各基本方程及条件。

## § 1.4 弹性体动力学积分方程

对于弹性体动力问题的数学描述,除了上面二节所述的微分方程与变分方程外,还有一种积分方程的形式<sup>[294]</sup>。这是用三种不同数学手段来描述同一物理现象的具体应用。

对于具有一定几何约束的弹性域 $V$ 上两点 $(x, y, z)$ 及 $(\xi, \eta, \zeta)$ 存在位移影响函数族: $k_{x\xi}, k_{x\eta}, k_{x\zeta}, k_{y\xi}, k_{y\eta}, k_{y\zeta}, k_{z\xi}, k_{z\eta}, k_{z\zeta}$ 。它们均是 $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$ 的函数,其中 $k_{x\xi}$ 表示在点 $(\xi, \eta, \zeta)$ 上作用 $x$ 向单位强度力而在点 $(x, y, z)$ 引起 $u$ 位移,余则类推。它们均是在区域 $V$ 内有限的连续函数,而且包含弹性体的表面域。

对于线弹性体,在包括面载荷在内的外力分量 $K_x, K_y, K_z$ 及惯性力作用下,根据叠加原理,各点位移应为

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) = & \iiint_V \left\{ k_{x\xi}(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) \left[ K_x(\xi, \eta, \zeta, t) - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi, \eta, \zeta, t) \right] \right. \\ & + k_{x\eta}(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) \left[ K_y(\xi, \eta, \zeta, t) - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(\xi, \eta, \zeta, t) \right] \\ & \left. + k_{x\zeta}(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) \left[ K_z(\xi, \eta, \zeta, t) - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(\xi, \eta, \zeta, t) \right] \right\} d\xi d\eta d\zeta \end{aligned} \quad (1.33a)$$

$$\begin{aligned} v(x, y, z, t) = & \iiint_V \left\{ k_{y\xi}(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) \left[ K_x(\xi, \eta, \zeta, t) - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi, \eta, \zeta, t) \right] \right. \\ & + k_{y\eta}(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) \left[ K_y(\xi, \eta, \zeta, t) - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(\xi, \eta, \zeta, t) \right] \\ & \left. + k_{y\zeta}(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) \left[ K_z(\xi, \eta, \zeta, t) - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(\xi, \eta, \zeta, t) \right] \right\} d\xi d\eta d\zeta \end{aligned} \quad (1.33b)$$

$$\begin{aligned} w(x, y, z, t) = & \iiint_V \left\{ k_{z\xi}(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) \left[ K_x(\xi, \eta, \zeta, t) - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi, \eta, \zeta, t) \right] \right. \\ & + k_{z\eta}(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) \left[ K_y(\xi, \eta, \zeta, t) - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(\xi, \eta, \zeta, t) \right] \\ & + k_{z\zeta}(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) \left[ K_z(\xi, \eta, \zeta, t) \right. \\ & \left. \left. - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(\xi, \eta, \zeta, t) \right] \right\} d\xi d\eta d\zeta \end{aligned} \quad (1.33c)$$

上述方程中积分号下包含有未知位移函数,因此这是一个积分方程组。根据弹性力学的位移互等原理,积分核是对称的,所以弹性体动力学问题应满足一组具有对称核的线性积分方程,对于自由振动问题是一组线性齐次积分方程。

## § 1.5 弹性体振动分析的基本方法

对于不同类型的弹性体构件,其基本方程及振动解的形式有很大差别,但求解步骤和方法是完全类似的,具有共同的一般规律。下面各章将详细叙述板与壳两类结构的振动分析方法,内容较多,为了便于了解其分析的思路,这里将先以比较简单和熟悉的杆件振动分析为

例, 来说明弹性体振动分析的一般过程, 以利于进一步掌握较为复杂的板壳构件振动分析方法。

图1.1所示等截面杆的纵向振动基本方程为

$$EF \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + q(x, t) = 0 \quad (1.34)$$

其中,  $EF$  为轴向刚度,  $\rho F$  为单位长度杆的质量,  $u(x, t)$  为截面纵向位移,  $q(x, t)$  为单位长度杆上纵向外载。边界条件为

$$\text{固定端: } x = x_0, \quad u(x_0, t) = 0 \quad (1.35 a)$$

$$\text{自由端: } x = x_0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, t) = 0 \quad (1.35 b)$$

初始条件为

$$t = 0: \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \dot{u}_0(x) \quad (1.36)$$

为求解固有振动, 可设解

$$u(x, t) = U(x) \sin(\omega t + \varphi) \quad (1.37)$$

代入自由振动方程, 相当方程 (1.34) 中取  $q = 0$ , 即

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a^2 = \frac{E}{\rho} \quad (1.38)$$

得  $U(x)$  满足的方程

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{\omega^2}{a^2} U = 0 \quad (1.39)$$

二次常微分方程 (1.39) 的解为

$$U(x) = A \sin \frac{\omega}{a} x + B \cos \frac{\omega}{a} x \quad (1.40)$$

其中待定系数  $A, B$  取决于杆件两端二个边界条件。例如两端自由, 由  $x = 0$  及  $x = l$  处

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \text{即} \quad \frac{dU}{dx} = 0 \text{ 得}$$

$$A \frac{\omega}{a} + B \cdot 0 = 0 \quad (1.41 a)$$

$$A \frac{\omega}{a} \cos \frac{\omega}{a} l - B \frac{\omega}{a} \sin \frac{\omega}{a} l = 0 \quad (1.41 b)$$

这是关于  $A, B$  的齐次线代方程组, 为求得非零解, 则其系数行列式必为零, 从而建立频率方程

$$\sin \frac{\omega}{a} l = 0 \quad (1.42)$$

由其解得固有频率

$$\omega_n = \frac{n\pi a}{l} = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (1.43)$$

代回式 (1.41) 得  $A = 0, B \neq 0$ 。则根据式 (1.40) 有相应固有振型

$$U_n(x) = B_n \cos \frac{n\pi}{l} x \quad (1.44)$$

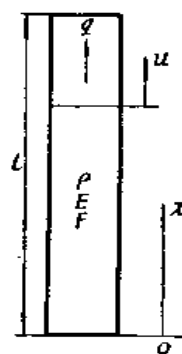


图 1.1

式中  $B_n$  为任意非零常数。式 (1.44) 代表以固有频率  $\omega_n$  振动时结构的固有振动形状。

为求取满足给定初始条件 (1.36) 而无外载  $q$  的自由振动解, 可设解为

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) \sin(\omega_n t + \varphi_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos \frac{n\pi}{l} x \sin(\omega_n t + \varphi_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) \cos \frac{n\pi}{l} x \end{aligned} \quad (1.45)$$

代入初始条件 (1.36) 得

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n U_n(x) \quad (1.46a)$$

$$\dot{u}_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \omega_n U_n(x) \quad (1.46b)$$

上述两个方程包含有无穷多个未知系数  $a_n$ ,  $b_n$ , 但利用匀质等截面杆件振型正交性

$$\int_0^l U_m U_n dx \begin{cases} = 0, & m \neq n \\ \neq 0, & m = n \end{cases} \quad (1.47)$$

可使每个方程只保留一个未知系数。具体做法为将式 (1.46a), (1.46b) 分别乘  $U_n(x)$ , 再沿全杆积分有

$$\begin{aligned} \int_0^l u_0(x) U_n(x) dx &= a_n \int_0^l U_n^2(x) dx \\ \int_0^l \dot{u}_0(x) U_n(x) dx &= b_n \omega_n \int_0^l U_n^2(x) dx \end{aligned} \quad (a)$$

代入式 (1.44) 有

$$a_n = \frac{1}{S_n} \int_0^l u_0(x) U_n(x) dx \quad (1.48a)$$

$$b_n = \frac{1}{S_n \omega_n} \int_0^l \dot{u}_0(x) U_n(x) dx \quad (1.48b)$$

式中

$$S_n = \int_0^l U_n^2(x) dx \quad (1.48c)$$

代回式 (1.45) 得解

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \cos \omega_n t \times \frac{1}{S_n} \int_0^l u_0(x) U_n(x) dx \right. \\ &\quad \left. + \sin \omega_n t \times \frac{1}{S_n \omega_n} \int_0^l \dot{u}_0(x) U_n(x) dx \right] U_n(x) \end{aligned} \quad (1.49)$$

上式为任意初始条件  $u_0$ ,  $\dot{u}_0$  下杆件自由振动解一般形式, 只要固有频率  $\omega_n$  及固有振型  $U_n(x)$  已经求得的话。

为求取在外载  $q$  作用下的强迫振动解, 可设解为

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) U_n(x) \quad (1.50)$$

代入基本方程 (1.34) 有

$$EF \sum_{n=1}^{\infty} T_n \frac{d^2 U_n}{dx^2} - \rho F \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2 T_n}{dt^2} U_n + q(x, t) = 0 \quad (b)$$

注意到  $U_n$  满足的方程

$$\frac{d^2 U_n}{dx^2} = -\frac{\omega_n^2}{a^2} U_n = -\omega_n^2 \frac{\rho}{E} U_n \quad (c)$$

则有

$$\rho F \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 T_n U_n + \rho F \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2 T_n}{dt^2} U_n = q(x, t) \quad (d)$$

上述方程包含有无穷多个未知函数  $T_n(t)$ ，但利用振型正交条件 (1.47)，将式 (1.51) 乘  $U_n(x)$ ，沿全杆积分，可得  $T_n$  独立方程

$$M_n \frac{d^2 T_n}{dt^2} + \omega_n^2 T_n(t) = P_n(t) \quad (1.51)$$

其中第  $n$  阶广义质量

$$M_n = \int_0^l \rho F U_n^2(x) dx \quad (1.52)$$

第  $n$  阶广义载荷

$$P_n(t) = \int_0^l q(x, t) U_n(x) dx \quad (1.53)$$

式 (1.51) 即为单自由度体系强迫振动的标准方程，利用杜哈美 (Duhamel) 积分公式可得解

$$T_n(t) = a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t + \frac{1}{\omega_n M_n} \int_0^t P_n(\tau) \sin \omega_n(t - \tau) d\tau \quad (1.54)$$

代回式 (1.50)，并注意到式 (1.53)，得解

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t \\ & + \frac{1}{\omega_n M_n} \int_0^t U_n(x) \int_0^t q(x, \tau) \sin \omega_n(t - \tau) d\tau dx] \\ & \times U_n(x) \end{aligned} \quad (1.55)$$

式中  $a_n$ 、 $b_n$  可根据初始条件用上述方法确定。上式为任意载荷情况下强迫振动解一般形式，只要固有频率  $\omega_n$  及固有振型  $U_n(x)$  已经求得的话。

从上面简单例子可以看到，弹性体振动分析一般可按下列方法和步骤进行：

1. 建立基本方程。弹性体动力方程可以通过相应构件静力学方程加体系质量运动产生的惯性力组成。方程一般包括三部分：刚度项、惯性项及载荷项，例如式 (1.34)。刚度项由构件刚度系数和独立位移对空间偏导数的微分算子组成；惯性项由构件质量密度和独立位移对时间偏导数的微分算子组成；载荷项是外载的时间、空间函数。弹性体的位移变量是时间和空间的连续函数，因此最简单的构件的基本方程也是偏微分方程（不象有限自由度体系

在空间是一些不连续的质点，因而是常微分方程组），对于多个独立位移变量问题则是偏微分方程组。此外，还需确定解在任何时刻都需满足的边界条件及各处都需满足的初始条件，例如式（1.35），（1.36）。边界条件将反映在固有振动的振型中；初始条件反映在自由振动和强迫振动的齐次解部份。

2. 求解固有振动。主要是确定弹性体的固有频率和固有振型，又称自振特性。体系的固有频率与振型只取决于构件形状、边界条件和材料特性，而与外载无关。求解弹性体的固有振动从无载方程出发，认为体系各点以某一固有频率作简谐运动，从而建立只包含空间坐坐的振型方程（对一维问题是常微分方程，对多维问题是偏微分方程），例如式（1.37）—（1.39）。它是齐次微分方程，解为包含待定系数的通解。进一步根据边界条件确定关于待定常数的齐次线代方程组，由系数非零解条件确定特征值方程（往往是超越方程，而不象有限自由度体系是高次代数方程），从而求得特征值即固有频率，代回通解，求得相应特征向量即固有振型（是一个空间连续函数，而不象有限自由度体系是离散点的幅值比），例如式（1.40）—式（1.44）。对于连续弹性体，任何构件都有无穷多个固有频率和振型，而固有频率和固有振型一一对应（不象有限自由度体系，频率和振型是有限个）。

3. 求解自由振动。这是指无载方程满足初始条件解。一般可设解为无穷多个以固有频率为振动频率，以相应固有振型作为幅值分布的简谐振动叠加。每个振型分量的幅值与幅角可利用正交条件由初始位移分布和初始速度分布来确定，例如式（1.45）—式（1.48）。式（1.49）是其自由振动解，具有弹性体自由振动解一般性质。很清楚，只要求得固有频率与振型，任意初始条件的自由振动解只是一个定积分问题，因此自由振动求解的关键是固有振动分析。

4. 求解强迫振动。这是指有载方程满足初始条件解。一般可设解为无穷多个以固有振型分布的特有时间过程 $T_n(t)$ 的振动的叠加，例如式（1.50）。 $T_n(t)$ 为与各阶固有振型相应的广义坐标，它满足利用正交条件求得的独立方程（1.51）。对于不同构件，此方程均类似于单自由度振动的标准方程，此单自由度频率为该阶固有频率，质量为该阶广义质量，载荷为该阶广义载荷，例如式（1.51）—式（1.53）。因此各广义坐标解即为单自由度体系强迫振动一般解（1.54），它们是统一的。式（1.55）是其强迫振动解，具有弹性体强迫振动解一般性质。很清楚，只要求得固有频率和振型，任意外载作用下强迫振动解只是一个定积分问题，因此强迫振动求解的关键也在于固有振动分析。

综上所述，弹性体振动分析关键和主要内容是建立基本方程及求解固有振动。这两步过程和构件形状及与边界、支承条件有关，因此分别在下面各章中加以叙述。而后两步即自由振动及强迫振动求解，对不同形状、边界的构件是统一的，将集中在第六、第十四章中讨论。



## 第二章 弹性薄板理论的基本动力方程

### § 2.1 薄板横向振动的基本微分方程

中面为一平面的扁平连续体称为平板。当厚度远小于中面平面尺寸时则称为薄板。平板主要承受垂直中面的横向载荷,将外载荷传递到支承处,此时板件发生垂直中面的横向挠曲,相应动力问题是薄板的横向振动。本章主要讨论薄板横向振动的基本方程。当然板件也有受中面内载荷情况,若此时无横向外载同时存在,则属于平面振动问题,不在本书讨论范围;若同时作用有横向载荷,则中面载荷将影响横向振动,这一问题将留在第八章进行专门讨论。

平板振动也是一种弹性体振动,本应满足第一章所述弹性体动力学基本方程,是一种三维问题。但对于厚度尺寸远小于平面上另两个尺寸的薄板来说,可以采用一系列反映薄板力学特性的简化假定,使原始三维问题降为二维问题来分析,这就是薄板理论。

弹性薄板横向振动小挠度理论的基本假定有:

- (a) 认为变形前垂直于中面的直线在变形后仍为一直线,并保持与中面垂直。
- (b) 忽略沿中面垂直方向的法向应力。
- (c) 只计入质量的移动惯性力,而略去其转动惯性力矩。
- (d) 无沿中面内方向的变形。

假定(a)即所谓“直法线”假定,是薄板振动理论的基础。这一假定的实质是使板件内整个变形状态只取决于中面挠曲面形状,从而使求解三维变形体问题变为确定二维挠曲面问题,并使问题大为简化。从力学角度来看,假定(a)认为直法线永远与中面垂直,即横向剪切变形为零,也即横向剪应力比平面方向弯曲应力要小得多;假定(b)则认为垂直方向法应力也比弯曲应力小得多。这两点对于厚度尺寸比平面尺寸小得多的薄板而言是近似成立的。下面将用受匀布横向载荷的悬臂梁这一简单例子来说明这一道理。从材料力学可以知道,这时弯曲应力 $\sigma_x$ ,横向剪应力 $\tau_{xy}$ 及法向应力 $\sigma_z$ 的最大值与外载 $q$ ,跨度 $l$ 及厚度 $h$ 有以下简单关系。

$$\sigma_{x\max} = \frac{6M_{\max}}{h^2} = \frac{3ql^2}{h^2}, \quad \tau_{xy\max} = \frac{3Q_{\max}}{2h} = \frac{3ql}{2h}, \quad \sigma_{z\max} = q \quad (a)$$

所以

$$\frac{\tau_{xy\max}}{\sigma_{x\max}} = \frac{1}{2} \frac{h}{l}, \quad \frac{\sigma_{z\max}}{\sigma_{x\max}} = \frac{1}{3} \left( \frac{h}{l} \right)^2 \quad (b)$$

因此对于 $h \ll l$ 的普通梁或薄板而言,将有 $\sigma_z \ll \tau_{xy} \ll \sigma_x$ 结果,可知上述假定(a), (b)是成立的。至于假定(c)则更为明显,移动惯性力正比于板厚,而转动惯性力矩是正比于截面惯性矩,即厚度三次方,因此对于相对厚度很小的薄板,这一假定也是成立的。在假定(a), (b), (c)下建立的平板理论一般称为泊松-克希霍夫(Poisson-Kirchhoff)平板理论即薄板理论。它和伯努利-欧拉(Bernoulli-Euler)梁理论相对应。因此,只要板的厚度远小于板的平面尺寸就可采用薄板理论进行分析,目前工程上一般认为板厚 $h$ 与板的

最小平面跨度  $b$  之比  $\frac{h}{b} \leq \frac{1}{6}$  就可看成是薄板, 否则必须按中厚板理论 (见第八章 § 8.3) 进行研究, 关于这方面详细讨论可参见文献[332]。假定 (d) 认为中面内不产生拉压、剪切, 从而也没有中面内变形, 即认为中面内薄膜力远小于横向载荷产生的弯曲应力, 这只有在板的挠曲  $w$  远小于板的厚度  $h$  时才成立。采用假定 (d) 的平板理论一般称为小挠度理论。目前工程上一般认为  $\frac{w}{h} \leq \frac{1}{5}$  就可按小挠度问题处理, 否则必须考虑几何非线性的大挠度问题, 关于这方面详细讨论可见第八章 § 8.9。应该指出, 薄板与小挠度是两个互相独立的力学概念, 薄板可以大挠度, 厚板可以小挠度, 两者不应等同。上面将属于薄板理论的前三点假定和属于小挠度理论后一点假定并列在一起的原因是由于下面几章的讨论都是基于小挠度薄板理论, 因此放在一起建立共同的基本方程。

基于上述四点基本假定, 即可从第一章的弹性体动力学基本方程推导直角坐标系薄板横向振动基本微分方程。

考虑一具有任意边界形状的各向同性匀质等厚度薄板,

如图2.1所示。取板件的中面为  $xoy$  平面,  $z$  轴垂直于  $xoy$  平面, 板厚为  $h$ ,  $z = -\frac{h}{2}$  为受载面。中面挠曲函数为  $w(x, y, t)$ 。

**位移分量** 由弹性体动力学几何方程 (1.1d), (1.1e) 及假定 (a) 知

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (c)$$

则有

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial x}, \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (d)$$

式中  $u_0, v_0$  为中面位移, 根据假定 (c) 应为零, 因此有板内平面位移

$$u(x, y, z, t) = -z \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial x}, \quad v(x, y, z, t) = -z \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial y} \quad (2.1)$$

式 (2.1) 表明, 板件内各点平面位移  $u, v$  沿厚度方向是线性分布的, 并与挠曲面  $w(x, y, t)$  在该处沿  $x, y$  方向斜率有关。

**应变分量** 将式 (2.1) 代入弹性体动力学方程 (1.1a), (1.1b), (1.1f) 可求得板内应变分量

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -z \kappa_x \quad (2.2a)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -z \kappa_y \quad (2.2b)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -2z \kappa_{xy} \quad (2.2c)$$

式中  $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$  分别为挠曲面的曲率与扭曲率。式 (2.2) 表明, 板件内各点应变分量沿厚度也是线性分布的, 并与挠曲面的曲率或扭曲率有关。

**应力分量** 由弹性体动力学物理方程 (1.3), 并考虑到假定 (b),  $\sigma_z = 0$ , 有

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu \sigma_y), \quad \epsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu \sigma_x), \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (e)$$

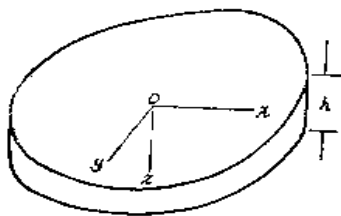


图 2.1

解出应力分量, 代入应变表达式 (2.2) 有

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) = -\frac{E}{1-\nu^2} z \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2.3a)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) = -\frac{E}{1-\nu^2} z \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (2.3b)$$

$$\tau_{xy} = G \nu_{xy} = -2Gz \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.3c)$$

式 (2.3) 表明, 板件内各点应力分量沿厚度也是线性分布的, 并与挠曲面的曲率或扭曲率有关。

**内力分量** 我们定义板内截面上各点正应力  $\sigma_x, \sigma_y$  和水平剪应力  $\tau_{xy}$  对中面取矩沿厚度积分为弯矩、扭矩:

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz, \quad M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z dz, \quad M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz \quad (2.4)$$

垂直剪应力  $\tau_{xz}, \tau_{yz}$  沿厚度积分为剪力

$$Q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz, \quad Q_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yz} dz \quad (2.5)$$

其正方向如图 2.2 所示。将应力表达式 (2.3) 代入式 (2.4) 求积, 得弯矩、扭矩表达式

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D(\kappa_x + \nu \kappa_y) \quad (2.6a)$$

$$M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = -D(\kappa_y + \nu \kappa_x) \quad (2.6b)$$

$$M_{xy} = M_{yx} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -D(1-\nu) \kappa_{xy} \quad (2.6c)$$

式中

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2.7)$$

为板的弯曲刚度或抗弯刚度。因此板内弯矩和扭矩与板的弯曲刚度及挠曲面的曲率和扭曲率有关。综上所述, 采用薄板理论基本假定, 则板的各位移分量, 应变分量、应力分量、内力分量均只取决于二维挠曲面函数  $w(x, y, t)$ , 从而达到了将三维弹性体问题化为二维板件问题的目的。

**运动方程** 考虑如图 2.2 所示板件微体动力平衡, 根据假定 (c), 忽略惯性力矩有

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x = 0 \quad (2.8a)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0 \quad (2.8b)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (2.8c)$$

将式 (2.6) 代入式 (2.8a), (2.8b) 可得剪力表达式

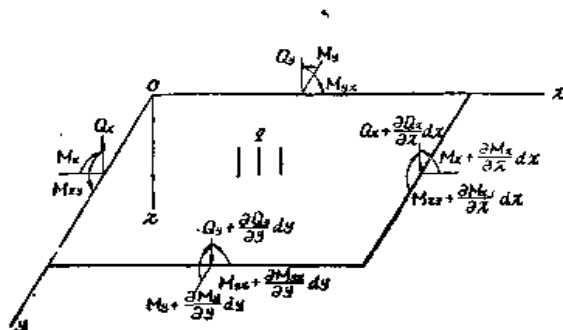


图 2.2

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w \quad (2.9a)$$

$$Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w \quad (2.9b)$$

式中  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  为拉普拉斯 (Laplace) 算子。

**基本方程** 将式 (2.9) 代入式 (2.8c), 得薄板横向振动的基本微分方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \nabla^2 \nabla^2 w + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ &= \frac{q}{D}(x, y, t) \end{aligned} \quad (2.10)$$

式中  $\rho$  为板件质量密度,  $q$  为单位面积板件上所承受横向动载荷。这是关于挠曲面函数  $w(x, y, t)$  的四阶偏微分方程。若求得满足边界及初始条件的方程 (2.10) 的解  $w(x, y, t)$ , 则即可由式 (2.6), (2.9) 求取内力, 由式 (2.3) 求取应力, 由式 (2.2) 求取应变, 由式 (2.1) 求取平面位移。很明显, 薄板小挠度振动的基本问题归结为在给定动荷载及边界条件和初始条件下求解方程 (2.10)。

**边界条件** 薄板振动所应满足的边界条件和薄板静力问题一样, 一般有固定、简支、自由、弹性支承、弹性嵌固等几种。这里先列出平行  $x$  轴的直线边  $y = y_0$  的边界条件 (平行  $y$  轴边界也类似), 然后给出斜边及曲线边的边界条件。

1. 固定边 若平板边界是完全固定边或平夹边 (沿平面方向可以自由滑动), 其边缘上各点挠度为零以及沿该边垂直方向的挠度斜率为零, 即

$$(w)_{y=y_0} = 0, \quad \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=y_0} = 0 \quad (2.11a)$$

2. 简支边 若平板边界是铰接支承 (无论水平方向可以或不可以滑动), 其边缘上各点挠度以及弯矩为零, 即

$$(w)_{y=y_0} = 0, \quad (M_y)_{y=y_0} = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=y_0} = 0 \quad (2.11b)$$

考虑到上式中第一个条件在直线边  $y = y_0$  上处处成立, 因此有  $\left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=y_0} = 0$ , 故第二个条件也可改写为

$$\left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=y_0} = 0 \quad (2.11c)$$

3. 自由边 若平板边界完全不受力, 应该有边缘上各点弯矩、扭矩、剪力为零的三个条件, 即

$$(M_y)_{y=y_0} = 0, \quad (M_{yz})_{y=y_0} = 0, \quad (Q_y)_{y=y_0} = 0 \quad (f)$$

由于基本方程 (2.10) 为四阶偏微分方程, 只能每边满足二个边界条件, 而不能满足上述三个力边界条件。为此采用凯尔文-克希霍夫 (Kelvin-Kirchhoff) 合力边界条件

$$(M_y)_{y=y_0} = 0, \quad (V_y)_{y=y_0} = \left( Q_y + \frac{\partial M_{yz}}{\partial x} \right)_{y=y_0} = 0 \quad (g)$$

后一个条件实际上是将扭矩  $M_{yz}$  分解为一对间距为  $dx$ , 值为  $M_{yz}$  的力偶, 而边界上每点相邻两微段产生垂直力在该点差  $\frac{\partial M_{yz}}{\partial x}$  相当于一分布剪力, 叠加到原剪力  $Q_y$  上, 一起满足边缘垂直力为零的条件。将内力表达式 (2.6), (2.9) 代入上述两式, 即得自由边边界条件

$$\left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]_{y=y_0} = 0, \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right]_{y=y_0} = 0 \quad (2.11 d)$$

4. 弹性支承边 若平板边界铰接支承在可用垂直线弹簧(弹簧常数 $k_w$ )表示的结构或地基上,其边缘上各点弯矩保持为零,而合剪力由弹簧支承力产生,即

$$(M_y)_{y=y_0} = 0, (V_y)_{y=y_0} = -k_w(w)_{y=y_0} \quad (h)$$

则有

$$\left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]_{y=y_0} = 0, \left[ k_w w - D \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - (2-\nu) D \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right]_{y=y_0} = 0 \quad (2.11 e)$$

当 $k_w = 0$ 时即为自由边界; $k_w = \infty$ 时即为简支边界,因此这种弹性支承边界是一种介于自由与简支边界中间的一般性情况。

另一种弹性支承边是刚接在垂直弹簧上,所不同的只是边缘上各点斜率(而不是弯矩)保持为零。

5. 弹性嵌固边 若平板边界连接在垂直方向不可移动,但在垂直边界平面内可转动(可用弹簧常数为 $k_\phi$ 的螺旋弹簧表示)的结构上,其边缘上各点挠度为零,而弯矩由弹簧支承力矩产生,即

$$(w)_{y=y_0} = 0, (M_y)_{y=y_0} = k_\phi \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=y_0} \quad (i)$$

则有

$$(w)_{y=y_0} = 0, \left[ k_\phi \frac{\partial w}{\partial y} + D \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]_{y=y_0} = 0 \quad (2.11 f)$$

当 $k_\phi = 0$ 时即为简支边界; $k_\phi = \infty$ 时即为固定边界,因此这种弹性嵌固边界是一种介于简支与固定边界中间的一般性情况。

6. 斜边或曲线边 若边界为一曲线边或并不与坐标轴平行的直线边,其外法向 $N$ 与 $x$ 轴正向夹角及切向 $T$ 与 $y$ 轴正向夹角均为 $\theta$ ,其边缘某点 $A$ 的弯矩为 $M_N$ ,扭矩为 $M_{NT}$ ,剪力为 $Q_N$ (其正向如图2.3所示),则对于

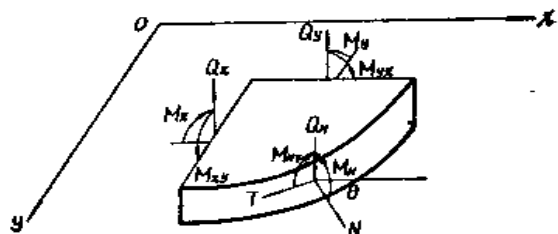


图 2.3

(1) 固定边有

$$(w)_A = 0, \left( \frac{\partial w}{\partial N} \right)_A = \left( \cos \theta \frac{\partial w}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial w}{\partial y} \right)_A = 0 \quad (2.11 g)$$

(2) 简支边有

$$(w)_A = 0, (M_N)_A = (\cos^2 \theta M_x + \sin^2 \theta M_y + 2 \sin \theta \cos \theta M_{xy})_A = 0 \quad (2.11 h)$$

(3) 自由边有

$$(M_N)_A = (\cos^2 \theta M_x + \sin^2 \theta M_y + 2 \sin \theta \cos \theta M_{xy})_A = 0$$

$$\left( Q_N + \frac{\partial M_N}{\partial T} \right)_A = \left[ \cos \theta Q_x + \sin \theta Q_y + \left( \cos \theta \frac{\partial}{\partial y} - \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} \right) \times (\sin \theta \cos \theta M_y - \sin \theta \cos \theta M_x + \cos^2 \theta M_{xy} - \sin^2 \theta M_{yx}) \right]_A = 0 \quad (2.11 i)$$

式中边缘点的内力表达式可由弹性体动力学一般性边界条件 (1.9) 沿厚度积分或取矩积分合成求得。进一步代入  $M_x, M_y, M_{xy}, M_{yx}, Q_x, Q_y$  表达式 (2.6), (2.9); 即可建立斜边或曲线边边界条件的  $w$  表达式。

**初始条件** 弹性体动力学初始条件 (1.10), (1.11) 在薄板情况下变为挠度  $w$  在初始时刻应满足沿板面给定的挠曲与其速度分布

$$(w)_{t=0} = w_0(x, y), \quad \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{t=0} = \dot{w}_0(x, y) \quad (2.12)$$

上面列出了薄板振动理论的基本方程和边界条件及初始条件以及由其解出的挠曲面函数进一步求算板内各内力、应力、应变、位移分量的全部表达式, 看来相当完整。但应该指出, 薄板理论本身是存在一些矛盾和不足的。例如, 由式 (2.9) 及 (2.5) 可知, 板内是存在垂直剪力  $Q_x, Q_y$  及相应垂直剪应力  $\tau_{xz}, \tau_{yz}$ 。而根据假定 (a) 是不存在垂直剪变形  $\gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ 。有剪应力而无剪变形, 显然是不符合弹性体动力学基本方程 (1.3d) 的。又如, 假定 (b) 认为板内不存在  $\sigma_x$ , 而根据弹性体动力学边界条件 (1.9c) 在板表面  $\sigma_z = q$  是不为零的, 显然这也是矛盾的。还有从板的边界条件来讲, 一般每边应该满足三个边界条件: 给定挠度  $w$  或剪力  $Q_N$ ; 给定法向转角  $\frac{\partial w}{\partial N}$  或弯矩  $M_N$ ; 给定切向转角  $\frac{\partial w}{\partial T}$  或扭矩  $M_{NT}$ 。但板的基本方程是四阶, 因而不能达到这一点, 在讨论自由边界时这一矛盾看得比较明显, 实际上对于其它边界也存在这一问题的。因此从第一章弹性体动力学标准来衡量, 薄板理论只是一种在一定假定前提下成立的近似理论, 又称平板的经典理论。关于平板进一步精确化理论和这些矛盾的克服与解决, 将在第八章内加以讨论。

## § 2.2 薄板横向振动的基本变分方程

现在再从能量观点来研究上述假定下的薄板, 并建立相应的变分方程。

**变形能** 薄板在振动过程中将发生变形, 具有应变和应力, 因而板内存在随时间发生变化的变形能。板的变形能可根据第一章弹性体动力学一般公式进行计算。由式 (1.22) 考虑到薄板基本假定  $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = \sigma_z = 0$ , 有比能

$$W = \frac{1}{2}(\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) \quad (2.13a)$$

代入式 (2.3) 有

$$W = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\nu \sigma_x \sigma_y) + \frac{1}{G} \tau_{xy}^2 \right] \quad (2.13b)$$

或

$$W = \frac{1}{2} \left[ \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + 2\nu \epsilon_x \epsilon_y) + G \gamma_{xy}^2 \right] \quad (2.13c)$$

代入式 (2.2) 有

$$W = \frac{E z^3}{2(1-\nu^2)} \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \quad (2.13d)$$

故薄板的变形能为

$$\begin{aligned}
U &= \iiint_V W dV = \iint_A \left[ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} W dz \right] dx dy \\
&= \frac{D}{2} \iint_A \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \\
&= \frac{D}{2} \iint_A \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right] dx dy \quad (2.14a)
\end{aligned}$$

利用式 (2.2) 有

$$U = \frac{D}{2} \iint_A \left[ (\kappa_x + \kappa_y)^2 - 2(1-\nu)(\kappa_x \kappa_y - \kappa_{xy}^2) \right] dx dy \quad (2.14b)$$

利用式 (2.6) 有

$$U = \iint_A (M_x \kappa_x + M_y \kappa_y + 2M_{xy} \kappa_{xy}) dx dy \quad (2.14c)$$

式中  $A$  为沿板中面积分域。式 (2.13), (2.14) 给出了薄板变形能用挠度、应变、应力、内力、曲率表示的各种表达式。

对于边界为简支或固定的矩形板, 设其边界为  $x=0, a$  及  $y=0, b$  上有  $w=0$ , 则在  $x=0, a$  上有  $\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$  及在  $y=0, b$  上有  $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$ , 根据分部积分有

$$\begin{aligned}
\int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dx dy &= \int_0^a \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) \Big|_0^b dx - \int_0^a \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) (w) \Big|_0^b dx \\
&\quad + \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) (w) dx dy = \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} dx dy \quad (a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy &= \int_0^a \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \Big|_0^b dy - \int_0^a \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) (w) \Big|_0^b dy \\
&\quad + \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) (w) dx dy = \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} dx dy \quad (b)
\end{aligned}$$

显然有

$$\int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dx dy = \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy \quad (c)$$

则式 (2.14a) 简化为

$$U = \frac{D}{2} \iint_A (\nabla^2 w)^2 dx dy \quad (2.14d)$$

**动能** 薄板的动能, 根据弹性体动力学一般公式, 考虑到假定 (a), (c) 有

$$T = \frac{\rho h}{2} \iint_A \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy \quad (2.15)$$

**变分方程** 根据弹性体动力学的哈密顿原理 (1.29), 在薄板情况下体积力消失, 表面力只有  $F_z = q$ , 所以薄板变分方程为

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt + \int_{t_0}^{t_1} \iint_A q \delta w dx dy dt = 0 \quad (2.16)$$

式中变形能  $U$  及动能  $T$  分别见式 (2.14a) 及 (2.15), 第二项为板面外载荷所作虚功。

按变分运算

$$\delta U = D \iint_A \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta w + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \delta w \right) - (1 - \nu) \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} \delta w \right) + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta w \right) - 2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \delta w \right) \right] \right\} dx dy \quad (d)$$

根据二维格林 (Green) 公式, 边界微元关系 (图2.3) 和内力表达式 (2.6), (2.9) 可得

$$\begin{aligned} \delta U = D \iint_A (\nabla^2 \nabla^2 w) \delta w dx dy - \int_L (\cos^2 \theta M_x + \sin^2 \theta M_y + 2 \sin \theta \cos \theta M_{xy}) \\ \times \left[ \cos \theta \delta \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \sin \theta \delta \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] dL + \int_L \left[ \cos \theta Q_x + \sin \theta Q_y \right. \\ \left. + \left( \cos \theta \frac{\partial}{\partial y} - \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} \right) (\sin \theta \cos \theta M_y - \sin \theta \cos \theta M_x + \cos^2 \theta M_{xy} \right. \\ \left. - \sin^2 \theta M_{yx}) \right] \times \delta w dL \end{aligned} \quad (e)$$

式中  $L$  为沿板边界积分域, 而

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \delta T dt = \rho h \iint_A \left[ \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} \delta w \right) dt \right] dx dy \\ = -\rho h \iint_A \left[ \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \delta w dt \right] dx dy \end{aligned} \quad (f)$$

将上述两式代入式 (2.16), 并注意到边界内力表达式 (2.11), 可得薄板振动的变分方程的第二种形式:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \iint_A \left[ D \nabla^2 \nabla^2 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q \right] \delta w dx dy dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_L M_N \delta \left( \frac{\partial w}{\partial N} \right) dL dt \\ + \int_{t_0}^{t_1} \int_L \left[ Q_N + \frac{\partial M_{NT}}{\partial T} \right] \delta w dL dt = 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

为保证式 (2.17) 成立, 对于第一项面积分, 由于板内  $\delta w$  是任意的, 所以其前系数必为零, 即给出薄板横向振动基本微分方程 (2.10); 对于第二、三项线积分, 当边界是给定  $\frac{\partial w}{\partial N}$  或  $w$  的位移边界条件, 则已满足为零, 当边界是  $\frac{\partial w}{\partial N}$  或  $w$  不给定的力边界条件, 则给出  $M_N = 0$  或  $Q_N + \frac{\partial M_{NT}}{\partial T} = 0$  的自然边界条件 (2.11 i)。这里也从变分原理角度再一次说明, 薄板理论中关于凯尔文-克希霍夫合力边界条件提法是正确的。

从另一角度来看式 (2.17), 如果我们选取一已满足位移边界条件的挠曲函数  $w(x, y, t)$  来满足变分方程 (2.16), 就是等价于满足了基本微分方程和力边界条件。因此可以从变分方程 (2.16) 出发进行薄板横向振动问题研究, 而不需要直接求解偏微分方程 (2.10), 这就为第七章一系列近似解法打下理论基础。

### § 2.3 薄板横向振动的基本积分方程

板件积分方程是用影响函数反映板面各处动载荷及惯性力对该点的挠曲效应, 采用叠加办法来建立基本方程的。用积分方程方法可以独立研究板件有关结构动力学一系列特性。由



于积分方程的建立比较直观, 因此常被用来研究弹性体系振动的一些一般性规律, 虽然直接用积分方程来求解结构响应还存在有一定困难。积分方程也还是第七章一些近似解法的理论基础。

在薄板振动情况下, 弹性体动力学积分方程 (1.33 c) 中只留下横向外载  $q$  和横向挠曲惯性力  $\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$  对各点的挠度效应, 因此薄板积分方程为

$$w(x, y, t) = \iint_A K(x, y, \xi, \eta) [q(\xi, \eta, t) - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(\xi, \eta, t)] d\xi d\eta \quad (2.18 a)$$

式中影响函数  $K(x, y, \xi, \eta)$  表示在板上  $(\xi, \eta)$  点作用单位横向载荷时产生板件的挠曲分布, 它是作用点  $(\xi, \eta)$  及挠曲点  $(x, y)$  的二元函数, 并具有对称性

$$K(x, y, \xi, \eta) = K(\xi, \eta, x, y) \quad (2.19)$$

若同时在几个板面点  $(\xi_i, \eta_i)$  各作用有集中力  $P_i$ , 则积分方程变为

$$w(x, y, t) = \iint_A K(x, y, \xi, \eta) [q(\xi, \eta, t) - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(\xi, \eta, t)] d\xi d\eta + \sum_{i=1}^n K(x, y, \xi_i, \eta_i) P_i(t) \quad (2.18 b)$$

在自由振动情况下有积分方程

$$w(x, y, t) = - \iint_A K(x, y, \xi, \eta) \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(\xi, \eta, t) d\xi d\eta \quad (2.18 c)$$

方程 (2.18) 在积分号下包含有未知挠曲函数  $w$  的导数, 所以它是一个积分微分方程。

对于固有振动, 方程 (2.18 c) 可设解

$$w(x, y, t) = W(x, y) T(t) \quad (a)$$

代入式 (2.18 c) 得

$$- \frac{T(t)}{\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}(t)} = \frac{W(x, y)}{\iint_A K(x, y, \xi, \eta) \rho h W(\xi, \eta) d\xi d\eta} \quad (b)$$

上式左边是时间  $t$  的函数, 而右边是空间  $(x, y)$  的函数, 要两者相等, 只有都等于同一常数, 假设是  $\omega^2$ , 则可得两个分离方程

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \omega^2 T(t) = 0 \quad (2.20 a)$$

$$W(x, y) = \omega^2 \iint_A K(x, y, \xi, \eta) \rho h W(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (2.20 b)$$

前一方程代表简谐振动解, 后一方程是代表振型  $W(x, y)$  所应满足的积分方程。令

$$\bar{W}(x, y) = W(x, y) \sqrt{\rho h} \quad (2.21 a)$$

$$\bar{K}(x, y, \xi, \eta) = K(x, y, \xi, \eta) \rho h \quad (2.21 b)$$

则式 (2.20 b) 变为

$$\bar{W}(x, y) = \omega^2 \iint_A \bar{K}(x, y, \xi, \eta) \bar{W}(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (2.22)$$

这是一个典型的具有实对称核的富来霍姆 (Fredholm) 型线性齐次积分方程。根据数理方

程研究<sup>[294]</sup>知道, 这个方程存在一系列实数特征值 $\omega_n$ 及特征函数 $W_n(x, y)$ , 使方程 (2.22) 有非零解, 它们相应于板件的固有频率与固有振型。不同特征值 $\omega_m, \omega_n$ 相应的特征函数 $\bar{W}_m(x, y), \bar{W}_n(x, y)$ 相互正交, 因为根据式 (2.22) 有

$$\bar{W}_m(x, y) = \omega_m^2 \iint_A \bar{K}(x, y, \xi, \eta) \bar{W}_m(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (c)$$

$$\bar{W}_n(x, y) = \omega_n^2 \iint_A \bar{K}(x, y, \xi, \eta) \bar{W}_n(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

将其第一式乘以 $\frac{\bar{W}_n(x, y)}{\omega_n^2}$ 沿板面积分, 将第二式乘以 $\frac{\bar{W}_m(x, y)}{\omega_m^2}$ 沿板面积分, 将分别得

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_m^2} \iint_A \bar{W}_m(x, y) \bar{W}_n(x, y) dx dy &= \iiint_A \bar{K}(x, y, \xi, \eta) \bar{W}_m(\xi, \eta) \\ &\quad \times \bar{W}_n(x, y) d\xi d\eta dx dy \\ \frac{1}{\omega_n^2} \iint_A \bar{W}_n(x, y) \bar{W}_m(x, y) dx dy &= \iiint_A \bar{K}(x, y, \xi, \eta) \bar{W}_n(\xi, \eta) \bar{W}_m(x, y) d\xi d\eta dx dy \end{aligned} \quad (d)$$

因为 $\bar{K}(x, y, \xi, \eta) = \bar{K}(\xi, \eta, x, y)$ , 所以上述两式右端相等, 故由两式相减得

$$\left( \frac{1}{\omega_m^2} - \frac{1}{\omega_n^2} \right) \iint_A \bar{W}_n(x, y) \bar{W}_m(x, y) dx dy = 0 \quad (e)$$

当 $\omega_m \neq \omega_n$ 时有

$$\iint_A \bar{W}_n(x, y) \bar{W}_m(x, y) dx dy = 0 \quad (m \neq n) \quad (2.23)$$

这就是振型正交性。利用这一类方程一些重要特性, 还可用来研究板件振动其它一些一般性规律, 这将在有关章节中提到。

## § 2.4 极坐标系中薄板振动方程

除了上述主要适用于矩形板振动分析的直角坐标系基本方程外, 对于某些曲线边界板, 诸如圆板、圆环板、扇形板、扇环形板等, 采用极坐标系的基本方程将是方便的。在极坐标系中上述一些板的边界条件提法显得十分简单、明了, 而若仍采用直角坐标系则将会遇到很大困难。

在极坐标系中, 取板中而位于坐标平面内, 中面上一点可用 $(r, \theta)$ 作为坐标, 取 $z$ 为垂直板中面方向坐标, 仍以向下为正 (图2.4)。位移 $u$ 沿 $r$ 方向,  $v$ 沿 $\theta$ 方向,  $w$ 沿 $z$ 方向。中面挠曲函数为 $w(r, \theta, t)$ 。

根据假定(a), (d), 由弹性体动力学的圆柱坐标系的几何方程(1.14d), (1.14e)可解得位移分量

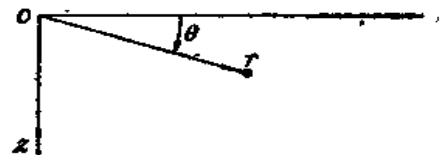


图 2.4

$$u(r, \theta, z, t) = -z \frac{\partial w(r, \theta, t)}{\partial r} \quad (2.24 a)$$

$$v(r, \theta, z, t) = -z \frac{\partial w(r, \theta, t)}{r \partial \theta} \quad (2.24 b)$$

进一步代入式 (1.14 a), (1.14 b), (1.14 f) 可求得应变分量

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = -z \kappa_r \quad (2.25 a)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r \partial \theta} = -z \left( \frac{\partial w}{r \partial r} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} \right) = -z \kappa_\theta \quad (2.25 b)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u}{r \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = -2z \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right) = -2z \kappa_{r\theta} \quad (2.25 c)$$

根据假定 (b), 弹性体动力学的圆柱坐标系物理方程 (1.15) 有

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta) \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r) \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{\tau_{r\theta}}{G} \end{aligned} \quad (a)$$

解出应力分量, 代入应变表达式 (2.25) 有

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\theta) = -\frac{E}{1-\nu^2} z \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left( \frac{\partial w}{r \partial r} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} \right) \right] \quad (2.26 a)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_r) = -\frac{E}{1-\nu^2} z \left[ \left( \frac{\partial w}{r \partial r} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} \right) + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right] \quad (2.26 b)$$

$$\tau_{r\theta} = G \gamma_{r\theta} = -2Gz \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right) \quad (2.26 c)$$

我们定义极坐标系内力分量: 弯矩、扭矩、剪力分别为

$$M_r = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_r z dz, \quad M_\theta = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_\theta z dz, \quad M_{r\theta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{r\theta} z dz \quad (2.27 a)$$

$$Q_r = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{r\theta} dz, \quad Q_\theta = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{\theta r} dz \quad (2.27 b)$$

其正方向如图2.5所示。将应力表达式 (2.26) 代入式 (2.27 a) 求积, 可得弯矩、扭矩表达式

$$M_r = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left( \frac{\partial w}{r \partial r} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} \right) \right] \quad (2.28 a)$$

$$M_\theta = -D \left[ \left( \frac{\partial w}{r \partial r} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} \right) + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right] \quad (2.28 b)$$

$$M_{r\theta} = -D(1-\nu) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right) \quad (2.28 c)$$

考虑如图2.5所示板件微体的动力平衡, 根据假定 (c) 忽略惯性力矩, 有

$$\frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{\partial M_{r\theta}}{r \partial \theta} - Q_r = 0 \quad (2.29 a)$$

$$\frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial M_\theta}{r \partial \theta} - Q_\theta = 0 \quad (2.29 b)$$

$$\frac{\partial Q_r}{\partial r} + \frac{\partial Q_\theta}{r \partial \theta} + q - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (2.29c)$$

将式 (2.28) 代入式 (2.29a), (2.29b) 可得  
剪力表达式

$$Q_r = -D \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 w \quad (2.30a)$$

$$Q_\theta = -D \frac{\partial}{r \partial \theta} \nabla^2 w \quad (2.30b)$$

式中  $\nabla^2 = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \theta^2} \right)$  为极坐标系的拉普拉斯算子。

将式 (2.30) 代入式 (2.29c) 得极坐标系中薄板横向振动的基本微分方程

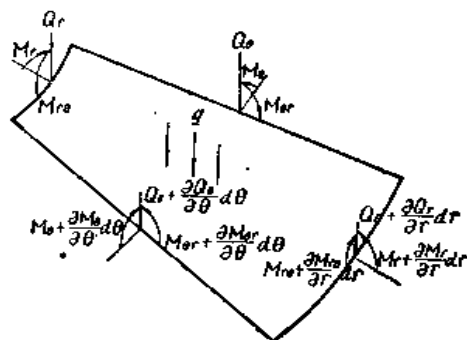


图 2.5

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\partial w}{r \partial r} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} \right) + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ &= \nabla^2 \nabla^2 w + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{q}{D}(r, \theta, t) \end{aligned} \quad (2.31)$$

由此可知, 极坐标系中薄板振动方程和直角坐标系中方程 (2.10) 在形式上是一样的, 只要各自采用相应的拉普拉斯算子。

如果板件形状、荷载及边界、初始条件均以平板中心轴对称, 则挠曲函数  $w$  与  $\theta$  无关, 这时有轴对称方程

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2 \partial^3 w}{r \partial r^3} - \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial r^2} + \frac{\partial w}{r^3 \partial r} + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ &= \frac{\partial}{r \partial r} \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\partial}{r \partial r} \left( r \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right] \right\} + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ &= \frac{q}{D}(r, t) \end{aligned} \quad (2.32)$$

而相应内力、应力、应变、位移表达式 (2.30), (2.28), (2.26), (2.25), (2.24) 中含  $\frac{\partial}{\partial \theta}$  各项也均将消失。

方程 (2.31) 或 (2.32) 的解必须在每边满足两个边界条件:

以  $r = r_0$  弧边为例, 有

$$\text{简支边: } w = 0, M_r = 0 \quad (2.33a)$$

$$\text{固定边: } w = 0, \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad (2.33b)$$

$$\text{自由边: } M_r = 0, Q_r + \frac{\partial M_{r\theta}}{r \partial \theta} = 0 \quad (2.33c)$$

以  $\theta = \theta_0$  径边为例, 有

$$\text{简支边: } w = 0, M_\theta = 0 \quad (2.33d)$$

$$\text{固定边: } w = 0, \frac{\partial w}{\partial \theta} = 0 \quad (2.33e)$$

$$\text{自由边: } M_\theta = 0, Q_\theta + \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r} = 0 \quad (2.33f)$$

对包含  $r = 0$  原点的薄板, 将有  $r = 0$  处力学量有限的条件, 以替代一弧边的边界条件。

初始条件保持式 (2.12) 不变, 只是给定  $w_0$ ,  $\dot{w}_0$  为相应坐标的函数, 这对其它坐标系也都是这样。

在极坐标系中薄板变分方程具有与直角坐标系中类似形式:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_A q \delta w r dr d\theta dt = 0 \quad (2.34)$$

只是式中薄板变形能

$$U = \frac{D}{2} \int_A \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\partial w}{r \partial r} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left( \frac{\partial w}{r \partial r} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} \right) - \left( \frac{\partial^2 w}{r \partial r \partial \theta} - \frac{\partial w}{r^2 \partial \theta} \right)^2 \right] \right\} r dr d\theta \quad (2.35)$$

在轴对称情况下为

$$U = \frac{D}{2} \int_A \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\partial w}{r \partial r} \right)^2 - 2(1-\nu) \frac{\partial w}{r \partial r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right\} r dr d\theta \quad (2.36)$$

薄板动能

$$T = \frac{\rho h}{2} \int_A \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 r dr d\theta \quad (2.37)$$

在极坐标系中薄板积分方程也具有与直角坐标系中类似形式:

$$w(r, \theta, t) = \iint_A K(r, \theta, \xi, \phi) \left[ q(\xi, \phi, t) - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(\xi, \phi, t) \right] \xi d\xi d\phi \quad (2.38)$$

只是影响函数  $K(r, \theta, \xi, \phi)$  表示在极坐标系中  $(\xi, \phi)$  点作用单位横向载荷所产生板件挠曲在极坐标系中分布。

## § 2.5 椭圆坐标系中薄板振动方程

具有椭圆边界薄板应用上述极坐标系仍是不方便的, 必须采用椭圆坐标系的基本方程 [198]。我们首先讨论椭圆坐标系  $(\xi, \eta)$  (图 2.6)。

在椭圆坐标系中  $\xi = \text{const.}$  为一组共焦椭圆族, 焦距为  $2c$ ;  $\eta = \text{const.}$  为一组共焦双曲线族, 其焦点与椭圆族交点相重。平面上一点可由一对  $(\xi, \eta)$  值所确定, 这就是平面的椭圆坐标系。 $\xi$  在 0 到  $\infty$  之间变化,  $\eta$  在 0 到  $2\pi$  之间变化。

若取两焦点连线为  $x$  轴, 两焦点连线的垂直对称轴为  $y$  轴, 建立一直角坐标系, 则在椭圆坐标系中一点  $(\xi, \eta)$  的直角坐标计算公式为

$$x = c \cosh \xi \cos \eta, \quad y = c \sinh \xi \sin \eta \quad (2.38)$$

反之, 在直角坐标系中一点  $(x, y)$  的椭圆坐标可按下列方程计算:

$$\frac{x^2}{c^2 \cosh^2 \xi} + \frac{y^2}{c^2 \sinh^2 \xi} = c^2, \quad \frac{x^2}{c^2 \cos^2 \eta} - \frac{y^2}{c^2 \sin^2 \eta} = c^2 \quad (2.39)$$

显然, 对于  $\xi = \xi_0$  的点在直角坐标系中连出一对焦点在  $(\pm c, 0)$  的椭圆, 当  $\xi = 0$  时为一与

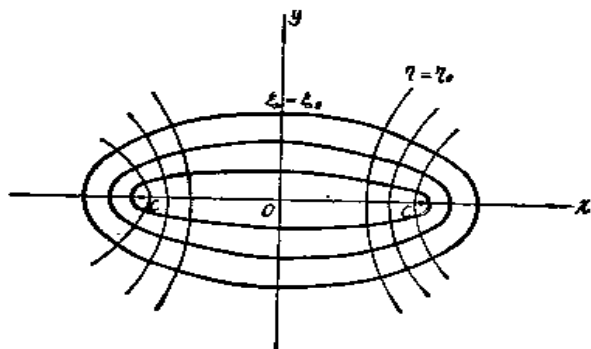


图 2.6

$x$  轴相重的直线, 对于  $\eta = \eta_0$  的点在直角坐标系中连出一对焦点在  $(\pm c, 0)$  的双曲线, 当  $\eta = 0, \pi$  时为一与  $x$  轴相重的直线,  $\eta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$  时为一与  $y$  轴相重的直线。

有了上述椭圆坐标系与直角坐标系之间基本关系式后, 可以将直角坐标系中拉普拉斯算子转换到椭圆坐标系中去, 即

$$\begin{aligned}\nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) + \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \\ &= h_0^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right)\end{aligned}\quad (2.40)$$

其中

$$h_0^2 = \frac{2}{c^2(\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta)} \quad (2.41)$$

从而可推得椭圆坐标系中薄板振动基本方程

$$\begin{aligned}D \nabla^2 \nabla^2 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{4D}{c^4(\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta)^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right) \\ &+ \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(\xi, \eta, t)\end{aligned}\quad (2.42)$$

边界条件为:

以  $\xi = \xi_0$  边为例, 有

$$\text{固定边: } w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0 \quad (2.43 a)$$

$$\text{简支边: } w = 0, \quad M_\xi = 0 \quad (2.43 b)$$

$$\text{自由边: } M_\xi = 0, \quad Q_\xi + h_0 \frac{\partial M_{\xi\eta}}{\partial \eta} = 0 \quad (2.43 c)$$

以  $\eta = \eta_0$  边为例, 有

$$\text{固定边: } w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0 \quad (2.43 d)$$

$$\text{简支边: } w = 0, \quad M_\eta = 0 \quad (2.43 e)$$

$$\text{自由边: } M_\eta = 0, \quad Q_\eta + h_0 \frac{\partial M_{\xi\eta}}{\partial \xi} = 0 \quad (2.43 f)$$

式中各内力表达式分别为

$$\begin{aligned}M_\xi &= -\frac{2D}{c^2(\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta)} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - \frac{(1-\nu)\operatorname{sh} 2\xi}{\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta} \frac{\partial w}{\partial \xi} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1-\nu)\sin 2\eta}{\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta} \frac{\partial w}{\partial \eta} \right]\end{aligned}\quad (2.44 a)$$

$$\begin{aligned}M_\eta &= -\frac{2D}{c^2(\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta)} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{(1-\nu)\operatorname{sh} 2\xi}{\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta} \frac{\partial w}{\partial \xi} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(1-\nu)\sin 2\eta}{\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta} \frac{\partial w}{\partial \eta} \right]\end{aligned}\quad (2.44 b)$$

$$M_{\xi\eta} = -\frac{D(1-\nu)}{c^2(\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta)} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\sin 2\eta}{\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta} \frac{\partial w}{\partial \xi} - \frac{\operatorname{sh} 2\xi}{\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta} \frac{\partial w}{\partial \eta} \right] \quad (2.44 c)$$

$$Q_\xi = -\frac{2\sqrt{2}D}{c^3(\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta)^{3/2}} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right) \right]$$

$$-\frac{2\text{sh}2\xi}{\text{ch}2\xi - \cos 2\eta} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right) \quad (2.44d)$$

$$Q_\eta = -\frac{2\sqrt{2}D}{c^3(\text{ch}2\xi - \cos 2\eta)^{3/2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right) \right. \\ \left. - \frac{2\text{sh}2\eta}{\text{ch}2\xi - \cos 2\eta} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right) \right\} \quad (2.44e)$$

有关位移、应变、应力表达式可参见下节正交曲线坐标系一般表达式。

## § 2.6 正交曲线坐标系中薄板振动方程

上述各节所述直角坐标系、极坐标系、椭圆坐标系都属于平面正交曲线坐标系的特殊情况。对于更为复杂边界平板问题往往需要应用一般性正交曲线坐标系。

对于平板中面上一点的位置，一般来说，可以用两组曲线中各一根曲线的交点来确定，形成曲线坐标。常用曲线坐标往往是正交的。例如，直角坐标系中两组曲线是两组正交平行线族；极坐标系中两组曲线是一组同心圆族和一组同心辐射线族；椭圆坐标系中两组曲线是一组共焦椭圆族和一组共焦双曲线族等等。在一般曲线坐标系中（图2.7），曲线坐标在直角坐标系中表达式给出两者之间关系式：

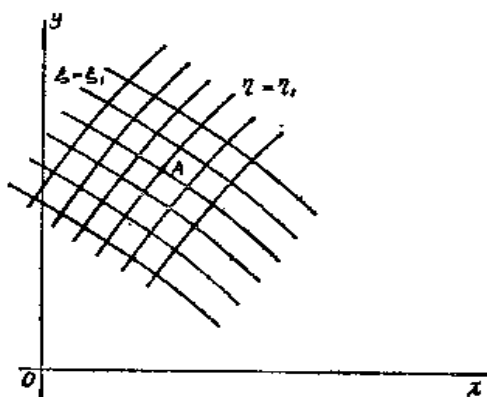


图 2.7

$$\xi = F(x, y), \quad \eta = G(x, y) \quad (2.45a)$$

反之有

$$x = f(\xi, \eta), \quad y = g(\xi, \eta) \quad (2.45b)$$

例如在极坐标系中，式(2.45a)为

$$r = F(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = G(x, y) = \arctg \frac{y}{x} \quad (2.46a)$$

在椭圆坐标系中，式(2.45b)为

$$x = f(\xi, \eta) = c \text{ch} \xi \cos \eta, \quad y = g(\xi, \eta) = c \text{sh} \xi \sin \eta \quad (2.46b)$$

$\xi = \text{const.}$  形成一族曲线， $\eta = \text{const.}$  形成另一族曲线。若平面上一点A是  $\xi = \xi_1$  及  $\eta = \eta_1$  两根曲线的交点，则在该曲线坐标系中A点的曲线坐标即为  $(\xi_1, \eta_1)$ 。

我们熟知，在直角坐标系中任一曲线微段弧长可表示为两直角坐标微分

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \quad (2.47a)$$

在极坐标系中也类似有

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 \quad (2.47b)$$

对于一确定的正交曲线坐标系，根据几何关系也可确立类似关系式

$$ds^2 = \frac{d\xi^2}{h_1^2} + \frac{d\eta^2}{h_2^2} \quad (2.48)$$

$h_1, h_2$  为反映曲线坐标系形状的特征参数，一般可根据关系式(2.45b)求得

$$\frac{1}{h_1^2} = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial \xi}\right)^2 \quad (2.49 a)$$

$$\frac{1}{h_2^2} = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial \eta}\right)^2 \quad (2.49 b)$$

比较式 (2.47) 和 (2.48) 很容易得到:

在直角坐标系中

$$h_1 = h_2 = 1 \quad (2.50 a)$$

在极坐标系中

$$h_1 = 1, \quad h_2 = \frac{1}{r} \quad (2.50 b)$$

再将式 (2.46 b) 代入式 (2.49), 可以推得椭圆坐标系中

$$h_1^2 = h_2^2 = \frac{2}{c^2(\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta)} = h_0^2 \quad (2.50 c)$$

根据薄板理论基本假定, 薄板在曲线坐标中的位移、应变、应力、内力分量可用特征参数  $h_1, h_2$  表示为  $w$  的关系式, 其中

位移分量

$$u = -zh_1 \frac{\partial w}{\partial \xi}, \quad v = -zh_2 \frac{\partial w}{\partial \eta} \quad (2.51)$$

应变分量

$$e_\xi = h_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + h_1 h_2 \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{h_1} \right) \right] v \quad (2.52 a)$$

$$e_\eta = h_2 \frac{\partial v}{\partial \eta} + h_1 h_2 \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{h_2} \right) \right] u \quad (2.52 b)$$

$$\gamma_{\xi\eta} = \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial \xi} (v h_2) + \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial \eta} (u h_1) \quad (2.52 c)$$

应力分量

$$\sigma_\xi = \frac{E}{1-\nu^2} (e_\xi + \nu e_\eta) \quad (2.53 a)$$

$$\sigma_\eta = \frac{E}{1-\nu^2} (e_\eta + \nu e_\xi) \quad (2.53 b)$$

$$\tau_{\xi\eta} = G \gamma_{\xi\eta} \quad (2.53 c)$$

内力分量

$$M_\xi = -D \left\{ h_1 \frac{\partial}{\partial \xi} \left( h_1 \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) + h_1 h_2^2 \frac{\partial w}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{h_1} \right) + \nu \left[ h_2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left( h_2 \frac{\partial w}{\partial \eta} \right) + h_1 h_1^2 \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{h_2} \right) \right] \right\} \quad (2.54 a)$$

$$M_\eta = -D \left\{ h_2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left( h_2 \frac{\partial w}{\partial \eta} \right) + h_2 h_1^2 \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{h_2} \right) + \nu \left[ h_1 \frac{\partial}{\partial \xi} \left( h_1 \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) + h_1 h_2^2 \frac{\partial w}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{h_1} \right) \right] \right\} \quad (2.54 b)$$

$$M_{\xi\eta} = -\frac{1-\nu}{2} D \left\{ \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( h_2^2 \frac{\partial w}{\partial \eta} \right) + \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( h_1^2 \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) \right\} \quad (2.54 c)$$

$$Q_\xi = -h_1 D \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ h_1 h_2 \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial w}{\partial \eta} \right) \right] \right\} \quad (2.54 d)$$



$$Q_{\eta} = -h_2 D \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ h_1 h_2 \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial w}{\partial \eta} \right) \right] \right\} \quad (2.54 e)$$

而平衡方程为

$$M_{\eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{h_2} \right) - \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{M_{\xi}}{h_2} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{M_{\xi\eta}}{h_1} \right) - M_{\xi\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{h_1} \right) + \frac{Q_{\xi}}{h_1 h_2} = 0 \quad (2.55 a)$$

$$M_{\xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{h_1} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{M_{\eta}}{h_1} \right) - \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{M_{\xi\eta}}{h_2} \right) - M_{\xi\eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{h_2} \right) + \frac{Q_{\eta}}{h_1 h_2} = 0 \quad (2.55 b)$$

$$h_1 h_2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{Q_{\xi}}{h_2} \right) + h_1 h_2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{Q_{\eta}}{h_1} \right) + q - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (2.55 c)$$

式(2.55 a), (2.55 b)用来计算剪力表达式(2.54 d)(2.54 e), 再代入式(2.55 c), 可建立曲线坐标系薄板振动的基本方程

$$D \nabla^2 \nabla^2 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(\xi, \eta, t) \quad (2.56 a)$$

式中拉普拉斯算子为

$$\nabla^2 = h_1 h_2 \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \right] \quad (2.56 b)$$

边界条件为:

以  $\xi = \xi_0$  边为例, 有

$$\text{固定边:} \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0 \quad (2.57 a)$$

$$\text{简支边:} \quad w = 0, \quad M_{\xi} = 0 \quad (2.57 b)$$

$$\text{自由边:} \quad M_{\xi} = 0, \quad Q_{\xi} + h_2 \frac{\partial M_{\xi\eta}}{\partial \eta} = 0 \quad (2.57 c)$$

以  $\eta = \eta_0$  边为例, 有

$$\text{固定边:} \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0 \quad (2.57 d)$$

$$\text{简支边:} \quad w = 0, \quad M_{\eta} = 0 \quad (2.57 e)$$

$$\text{自由边:} \quad M_{\eta} = 0, \quad Q_{\eta} + h_1 \frac{\partial M_{\xi\eta}}{\partial \xi} = 0 \quad (2.57 f)$$

若将式(2.50)的  $h_1, h_2$  值代入(2.51)~(2.57)各式即可推得直角坐标、极坐标、椭圆坐标系中薄板振动的各有关公式。因此上述各式为薄板的位移、应变、应力、内力分量及基本方程和边界条件的一般性表达式, 对于各种正交曲线坐标系均有普遍意义。

## § 2.7 斜坐标系中薄板振动方程

除了上述各正交曲线坐标系外, 属于非正交曲线坐标系中常用的是斜坐标系<sup>[184]</sup>, 它主要适用于平行四边形薄板振动问题。

斜坐标系由两组平行直线组成(图2.8): 一组平行线  $\eta = \text{const.}$  平行直角坐标系中  $x$  轴, 另一组平行线  $\xi = \text{const.}$  与直角坐标系的  $y$  轴成  $\beta$  角。平面内一点  $A$  由  $\xi = a$  和  $\eta = b$  两坐标确定。根据几何关系很容易建立斜坐标和直角坐标间关系式:

$$\xi = x - y \tan \beta, \quad \eta = y \sec \beta \quad (2.58)$$

则斜坐标系中拉普拉斯算子可算得为

$$\begin{aligned}\nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^2 \\ &= \frac{1}{\cos^2 \beta} \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2 \sin \beta \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right)\end{aligned}\quad (2.59)$$

从而可得斜坐标系中薄板振动基本方程

$$\begin{aligned}& D \nabla^2 \nabla^2 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ &= \frac{D}{\cos^4 \beta} \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2 \sin \beta \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - 2 \sin \beta \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right) \\ &+ \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(\xi, \eta, t)\end{aligned}\quad (2.60)$$

显然，直角坐标系应是斜坐标系当  $\beta = 0$  时的特殊情况，因此式(2.60)中取  $\beta = 0$  即为熟知的直角坐标系薄板振动基本方程(2.10)。

其边界条件为：

以  $\xi = \xi_0$  边为例，有

$$\text{固定边: } w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0 \quad (2.61 a)$$

$$\text{简支边: } w = 0, \quad M_\xi = 0 \quad (2.61 b)$$

$$\text{自由边: } M_\xi = 0, \quad V_\xi = 0 \quad (2.61 c)$$

以  $\eta = \eta_0$  边为例，有

$$\text{固定边: } w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0 \quad (2.61 d)$$

$$\text{简支边: } w = 0, \quad M_\eta = 0 \quad (2.61 e)$$

$$\text{自由边: } M_\eta = 0, \quad V_\eta = 0 \quad (2.61 f)$$

式中各内力表达式分别为

$$M_\xi = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\nu}{\cos^2 \beta} \left( \sin^2 \beta \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - 2 \sin \beta \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right) \right] \quad (2.62 a)$$

$$M_\eta = -D \left[ \frac{1}{\cos^2 \beta} \left( \sin^2 \beta \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - 2 \sin \beta \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right) + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right] \quad (2.62 b)$$

$$M_{\xi\eta} = -D \frac{(1-\nu)}{\cos \beta} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} - \sin \beta \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right] \quad (2.62 c)$$

$$\begin{aligned}V_\xi &= -\frac{D}{\cos^3 \beta} \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} - 4 \sin \beta \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^2 \partial \eta} + (2 + 3 \sin^2 \beta - \nu \cos^2 \beta) \frac{\partial^3 w}{\partial \xi \partial \eta^2} \right. \\ &\quad \left. - 2 \sin \beta \frac{\partial^3 w}{\partial \eta^3} \right] \quad (2.62 d)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V_\eta &= -\frac{D}{\cos^3 \beta} \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial \eta^3} - 4 \sin \beta \frac{\partial^3 w}{\partial \eta^2 \partial \xi} + (2 + 3 \sin^2 \beta - \nu \cos^2 \beta) \frac{\partial^3 w}{\partial \eta \partial \xi^2} \right. \\ &\quad \left. - 2 \sin \beta \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} \right] \quad (2.62 e)\end{aligned}$$

在斜坐标系中薄板变分方程具有与直角坐标系中类似形式

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt + \int_{t_0}^{t_1} \iint_A q \delta w \cos \beta d\xi d\eta dt = 0 \quad (2.63)$$

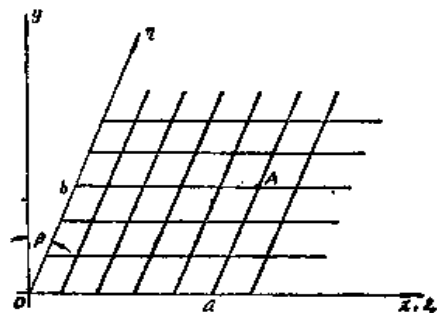


图 2.8

式中薄板变形能

$$U = \frac{D}{2} \iint_A \left\{ \frac{1}{\cos^4 \beta} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - 2 \sin \beta \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right)^2 \right. \\ \left. - \frac{2(1-\nu)}{\cos^2 \beta} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \right)^2 \right] \right\} \cos \beta d\xi d\eta \quad (2.64 a)$$

薄板动能

$$T = -\frac{\rho h}{2} \iint_A \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \cos \beta d\xi d\eta \quad (2.64 b)$$

附录  
单位  
符号

### 第三章 矩形板的振动

在建立薄板横向振动基本方程基础上, 下面将研究薄板的固有振动问题。如第一章所述, 固有振动即固有频率及振型的确立, 是研究薄板振动的基础与关键。下面各章将结合不同形状、不同边界的板件讨论求解薄板固有振动的各种方法。应该指出, 每种方法往往是针对某一类板件提出的, 但方法本身也还适用于其它类型板件的求解。我们首先将讨论最为常用和典型的矩形板的固有振动问题。

#### § 3.1 单向板

矩形板的一种特殊和简单情况是单向板。单向板中挠曲函数只与空间一维坐标变量有关。当矩形板的两对边无限延伸或相当长, 而沿这两对边边界条件是均匀的, 或者矩形板中两短边是自由, 而两长边边界条件又是均匀的时, 其远离自由边的板中间部份分析均可按单向板来处理。单向板的固有振动解又是其它矩形板振动分析的基础。

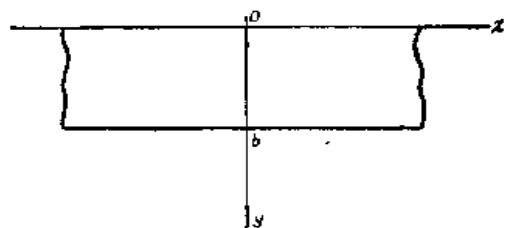


图 3.1

如图 3.1 所示单向板,  $x$  轴平行于长边,  $y$  轴垂直于长边, 宽为  $b$ 。对于单向板, 一切力学量对  $x$  的导数为零, 则基本方程 (2.10) 在固有振动情况下简化为

$$\frac{\partial^4 w(y, t)}{\partial y^4} + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w(y, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (3.1)$$

而其它力学量表达式则分别为

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y}, \quad e_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad M_y = -D \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad Q_y = -D \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \quad (3.2)$$

对于固有振动, 可设方程 (3.1) 的解为

$$w(y, t) = W(y) \sin(\omega t + \varphi) \quad (3.3)$$

代入得振型方程

$$\frac{d^4 W}{dy^4} - \alpha^4 W = 0 \quad (3.4a)$$

面

$$\alpha^4 = \omega^2 \frac{\rho h}{D} \quad (3.4b)$$

根据齐次常微分方程理论, 式 (3.4a) 的一般解为

$$W(y) = A_1 \sinh \alpha y + B_1 \cosh \alpha y + C_1 \sin \alpha y + D_1 \cos \alpha y \quad (3.5a)$$

或者重新组合为

$$W(y) = AY_1(\alpha y) + BY_2(\alpha y) + CY_3(\alpha y) + DY_4(\alpha y) \quad (3.5b)$$

式中

$$Y_1(y) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} \alpha y + \cos \alpha y), \quad Y_2(y) = \frac{1}{2\alpha}(\operatorname{sh} \alpha y + \sin \alpha y) \quad (3.6)$$

$$Y_3(y) = \frac{1}{2\alpha^2}(\operatorname{ch} \alpha y - \cos \alpha y), \quad Y_4(y) = \frac{1}{2\alpha^3}(\operatorname{sh} \alpha y - \sin \alpha y)$$

函数 (3.6) 的特点为四个函数及其一至三阶导函数在零点形成一单位对角矩阵, 即

$$Y_i^{(r-1)}(0) = \begin{cases} 0, & r \neq i \\ 1, & r = i \end{cases} \quad (i, r = 1, 2, 3, 4) \quad (3.7a)$$

并有导数关系

$$Y_i' = \alpha^4 Y_i \quad (i = 2, 3, 4) \quad (3.7b)$$

$$Y_i' = Y_{i-1} \quad (i = 2, 3, 4)$$

这给根据边界条件确定系数及建立频率方程带来很大方便。根据式 (3.2), 这时内力振型有

$$M_i^*(y) = -D \frac{d^2 W}{dy^2}, \quad Q_i^*(y) = -D \frac{d^3 W}{dy^3} \quad (3.8)$$

解 (3.5b) 中四个常数由两对边的每边两个边界条件确定。根据式 (2.11) 及式 (3.8) 在  $y = 0$  或  $y = b$  边界上的振型边界条件有

$$\text{固定边:} \quad W = \frac{dW}{dy} = 0 \quad (3.9a)$$

$$\text{简支边:} \quad W = \frac{d^2 W}{dy^2} = 0 \quad (3.9b)$$

$$\text{自由边:} \quad \frac{d^2 W}{dy^2} = \frac{d^3 W}{dy^3} = 0 \quad (3.9c)$$

$$\text{弹支边:} \quad \frac{d^2 W}{dy^2} = 0, \quad \frac{d^3 W}{dy^3} = \frac{k_w}{D} W \quad (3.9d)$$

$$\text{弹嵌边:} \quad W = 0, \quad \frac{d^2 W}{dy^2} = -\frac{k_s}{D} \frac{dW}{dy} \quad (3.9e)$$

对边简支单向板 根据式 (3.9b) 有振型边界条件

$$y = 0: \quad W(0) = \frac{d^2 W}{dy^2}(0) = 0 \quad (3.10a)$$

$$y = b: \quad W(b) = \frac{d^2 W}{dy^2}(b) = 0 \quad (3.10b)$$

将解 (3.5b) 代入条件 (3.10a), 并注意到特性 (3.7a) 有

$$A = C = 0 \quad (3.11a)$$

所以解变为

$$W(y) = BY_2(\alpha y) + DY_4(\alpha y) \quad (3.11b)$$

代入条件 (3.10b) 得方程

$$W(b) = BY_2(\alpha b) + DY_4(\alpha b) = 0 \quad (3.12a)$$

$$\frac{d^2 W}{dy^2}(b) = B\alpha^4 Y_4(\alpha b) + DY_2(\alpha b) = 0 \quad (3.12b)$$

这是关于系数  $B, D$  的齐次线代方程组, 为得非零解, 其系数行列式必为零, 即有

$$Y_{\frac{3}{2}}(\alpha b) - \alpha^4 Y_{\frac{1}{2}}(\alpha b) = -\frac{1}{\alpha^2} (\sin \alpha b \operatorname{sh} \alpha b) = 0 \quad (a)$$

因为  $\alpha \neq 0$ ,  $\operatorname{sh} \alpha b \neq 0$ , 所以有频率方程

$$\sin \alpha b = 0 \quad (3.13a)$$

解得

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{b} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.13b)$$

由式 (3.4b) 知,

$$\omega_n = \alpha_n^2 \sqrt{\frac{D}{\rho h}} = \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.14)$$

这就是对边简支单向板的第  $n$  阶固有频率解。代入式 (3.12a), 求出相应振型系数关系

$$B_n = -\frac{Y_4(\alpha_n b)}{Y_2(\alpha_n b)} D_n = -\frac{D_n}{\alpha_n^2} \quad (b)$$

代回振型解 (3.11), 得固有振型

$$\begin{aligned} W_n(y) &= B_n Y_2(\alpha_n y) + D_n Y_4(\alpha_n y) \\ &= \left( -\frac{D_n}{\alpha_n^2} \right) \sin \alpha_n y \end{aligned} \quad (c)$$

上式中括号内为一常数, 对于振型可取为 1。再注意到式 (3.13b), 则对边简支单向板的第  $n$  阶固有振型解为

$$W_n(y) = \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.15)$$

解 (3.14), (3.15) 表明, 固有频率与振型是一一对应的, 相当两式中取同样  $n$  值的一对  $\omega_n$  与  $W_n$  相对应,  $n$  可以取无穷多个正整数值, 因此连续板件有无穷多个固有频率及振型。对边简支单向板的振型解是一个沿跨度方向的正弦函数, 第  $n$  阶振型相应于跨内有  $n$  个半波。显然, 这一振型解是完全满足振型方程 (3.4a) 及振型边界条件 (3.9b) 的。

其它简单边界条件单向板 按照上面类似方法, 根据振型一般解 (3.5b) 及振型边界条件 (3.9a) — (3.9c), 可以推得其它几种由固定、简支、自由等简单边界组成的单向板频率方程:

$$\text{固定-固定板:} \quad \operatorname{ch} \alpha b \cdot \cos \alpha b - 1 = 0 \quad (3.16a)$$

$$\text{自由-自由板:} \quad \operatorname{ch} \alpha b \cdot \cos \alpha b - 1 = 0 \quad (3.16b)$$

$$\text{固定-简支板:} \quad \operatorname{th} \alpha b - \operatorname{tg} \alpha b = 0 \quad (3.16c)$$

$$\text{自由-简支板:} \quad \operatorname{th} \alpha b - \operatorname{tg} \alpha b = 0 \quad (3.16d)$$

$$\text{固定-自由板:} \quad \operatorname{ch} \alpha b \cdot \cos \alpha b + 1 = 0 \quad (3.16f)$$

这些频率方程均为超越方程, 具有无穷多个根。其频率系数  $(\alpha b)_n$  解 ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) 连同简支-简支板解列于表 3.1。表中给出前三阶频率系数数值及  $n \geq 4$  各阶频率系数近似表达式。频率方程解的这一表达式可用图解法根据双曲函数和三角函数特性确定。表中自由-自由板的第一、二阶频率系数为零分别表示平移及转动的刚体运动, 自由-简支板的第一阶频率系数为零表示转动的刚体运动, 均不是振动。

由频率系数求固有圆频率的公式按式 (3.4b) 为

$$\omega_n = \frac{(\alpha b)_n^2}{b^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad (3.17)$$

简单边界条件单向板之频率系数 $(ab)_n$ 值

表3.1

边界条件	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n \geq 4$
简支-简支	$\pi$	$2\pi$	$3\pi$	$n\pi$
固定-固定	4.730	7.853	10.99	$\frac{2n+1}{2}\pi$
自由-自由	0	0	4.730	$\frac{2n-3}{2}\pi$
固定-简支	3.927	7.069	10.21	$\frac{4n+1}{4}\pi$
自由-简支	0	3.927	7.069	$\frac{4n-3}{4}\pi$
固定-自由	1.875	4.694	7.854	$\frac{2n-1}{2}\pi$

与上述第  $n$  阶固有频率  $\omega_n$  相应的第  $n$  阶固有振型分别为

$$\text{固定-固定板: } W_n = (\operatorname{ch} \alpha_n y - \cos \alpha_n y) - \alpha_n (\operatorname{sh} \alpha_n y - \sin \alpha_n y) \quad (3.18a)$$

$$\text{自由-自由板: } W_1 = 1, \quad W_2 = 1 - \frac{2y}{b}$$

$$W_n = (\operatorname{ch} \alpha_n y + \cos \alpha_n y) - \alpha_n (\operatorname{sh} \alpha_n y + \sin \alpha_n y) \quad (n > 2) \quad (3.18b)$$

$$\text{固定-简支板: } W_n = (\operatorname{ch} \alpha_n y - \cos \alpha_n y) - \alpha_n (\operatorname{sh} \alpha_n y - \sin \alpha_n y) \quad (3.18c)$$

$$\text{自由-简支板: } W_1 = 1 - \frac{y}{b}$$

$$W_n = (\operatorname{ch} \alpha_n y + \cos \alpha_n y) - \alpha_n (\operatorname{sh} \alpha_n y + \sin \alpha_n y) \quad (n > 1) \quad (3.18d)$$

$$\text{固定-自由板: } W_n = (\operatorname{ch} \alpha_n y - \cos \alpha_n y) - \alpha_n (\operatorname{sh} \alpha_n y - \sin \alpha_n y) \quad (3.18e)$$

式中振型系数  $\alpha_n$  见表3.2, 前三阶列出数值,  $n \geq 4$  给出一般计算公式, 公式中  $\alpha_n = \frac{(ab)_n}{b}$ , 而  $(ab)_n$  值见表3.1。

简单边界条件单向板之振型系数  $\alpha_n$  值

表3.2

边界条件	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n \geq 4$
固定-固定	0.9825	1.0008	1.0000	$\frac{\operatorname{ch}(ab)_n - \cos(ab)_n}{\operatorname{sh}(ab)_n - \sin(ab)_n}$
自由-自由	—	—	0.9825	$\frac{\operatorname{ch}(ab)_n - \cos(ab)_n}{\operatorname{sh}(ab)_n - \sin(ab)_n}$
固定-简支	1.0008	1.0000	1.0000	$\frac{\operatorname{ch}(ab)_n + \cos(ab)_n}{\operatorname{sh}(ab)_n + \sin(ab)_n}$
自由-简支	—	1.0008	1.0000	$\frac{\operatorname{ch}(ab)_n + \cos(ab)_n}{\operatorname{sh}(ab)_n + \sin(ab)_n}$
固定-自由	0.7341	1.0185	0.9982	$\frac{\operatorname{ch}(ab)_n + \cos(ab)_n}{\operatorname{sh}(ab)_n + \sin(ab)_n}$

**弹性边界条件单向板** 对于具有弹性支承边界条件(2.11e)及弹性嵌固边界条件(2.11f)的单向板也可用类似方法求得其固有频率及振型。单向板振型一般解适用于求解一边弹性

(弹性支承或弹性嵌固)，一边其它边界单向板，也适用于两边弹性边界单向板，同时两边弹性常数可以不一样。下面仅列出对边弹性常数相等的两边弹性嵌固单向板结果。

两边具有相同无量纲弹嵌常数

$$K = \frac{k_s b}{D} \quad (3.19)$$

的弹性嵌固边界单向板可用一般解 (3.5)，按边界条件 (2.11 f) 确定频率方程为

$$\left\{ \frac{\alpha b}{K} (\text{sh} \alpha b + \sin \alpha b) + (\text{ch} \alpha b - \cos \alpha b) \right\}^2 - (\text{sh} \alpha b - \sin \alpha b) \\ \times \left\{ (\text{sh} \alpha b + \sin \alpha b) + \frac{2\alpha b}{K} (\text{ch} \alpha b + \cos \alpha b) + \left( \frac{\alpha b}{K} \right)^2 (\text{sh} \alpha b - \sin \alpha b) \right\} = 0 \quad (3.20)$$

方程 (3.20) 的解和弹嵌常数有关，其头三阶频率系数  $(\alpha b)_n$  列于表 3.3 中。

对边弹嵌边界单向板之频率系数  $(\alpha b)_n$  值

表 3.3

$k$	0	0.5	1	2	3	5	7	10	20	30	100	$\infty$
$n=1$	3.142	3.284	3.399	3.577	3.710	3.897	4.025	4.186	4.374	4.471	4.641	4.730
$n=2$	6.283	6.359	6.427	6.547	6.647	6.808	6.930	7.068	7.329	7.460	7.710	7.853
$n=3$	9.425	9.476	9.525	9.613	9.691	9.825	9.935	10.07	10.34	10.49	10.80	10.99

显然，弹嵌边界是介于简支与固定边界之间的一种中间状态。从表 3.3 可以看出，当弹嵌常数趋于零时，频率系数即为简支-简支边界单向板解；弹嵌常数趋于无穷大时，频率系数即为固定-固定边界单向板解。这一结果也可直接从频率方程 (3.20) 推得，即当  $K$  趋于零或无穷时，方程 (3.20) 即分别蜕化为简支或固定边界单向板的频率方程 (3.13 a) 或 (3.16 a)。由频率系数  $(\alpha b)_n$  计算固有圆频率公式仍同式 (3.17)。

两边弹性嵌固单向板之相应第  $n$  阶固有振型为

$$W_n = \frac{(\alpha b)_n}{K} (\text{sh} \alpha_n y + \sin \alpha_n y) + (\text{ch} \alpha_n y - \cos \alpha_n y) - a_n (\text{sh} \alpha_n y - \sin \alpha_n y) \quad (3.21 a)$$

式中

$$a_n = \frac{\frac{(\alpha b)_n}{K} [\text{sh}(\alpha b)_n + \sin(\alpha b)_n] + [\text{ch}(\alpha b)_n - \cos(\alpha b)_n]}{\text{sh}(\alpha b)_n - \sin(\alpha b)_n} \quad (3.21 b)$$

也同样可以看出，当  $K$  趋于零或无穷大时，振型 (3.21) 分别蜕化为简支或固定边界单向板的振型表达式 (3.15) 或 (3.18 a)。

同样可以证明，弹性支承边界是介于简支与自由边界之间的一种中间状态。因此弹性边界在工程中能更适合于确切反映实际边界支承状态。

## § 3.2 四边简支板

上述单向板是矩形板简化为一维问题的一种特殊情况，它的固有振动问题是求解一常系数常微分方程，所以是应用常微分方程理论求得问题的精确解析解。但在一般情况下，矩形



板则是二维问题，它的固有振动分析需求解一偏微分方程，因此根据板的不同边界条件将需应用相应的不同方法。这些方法均属于研究平板振动的基本方法。

矩形板振动中最简单的一种是四边简支板，也是最常见的一种，我们将首先研究四边简支板的固有振动。

显然对矩形板振动的研究，最方便是采用直角坐标系（图3.2）的薄板横向振动基本方程（2.10），其相应自由振动方程为

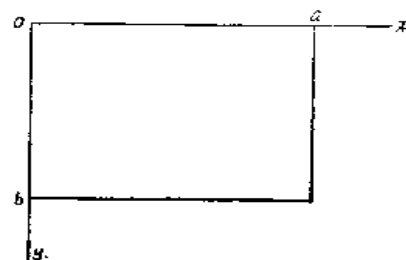


图 3.2

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (3.22)$$

对于固有振动，可设上述方程解为式(3.3)代入，从而给出矩形板振型方程

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} - \alpha^4 W = 0 \quad (3.23)$$

式中 $\alpha^4$ 表达式见式(3.4b)。

对于四边简支板，四个简支边的振型边界条件按式(2.11b)，(2.11c)有

$$x = 0, \quad x = a: W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 \quad (3.24a)$$

$$y = 0, \quad y = b: W = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0 \quad (3.24b)$$

满足方程(3.23)及边界条件(3.24)的振型解可直接用双三角函数来表示

$$W(x, y) = A \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3.25a)$$

其中 $A$ 为常数。代入方程(3.23)得

$$A \left[ \pi^4 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - \alpha^4 \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = 0 \quad (a)$$

若要对板上任一点上式都成立，并有振型非零解（ $A \neq 0$ ）之条件为

$$\left[ \pi^4 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - \alpha^4 \right] = 0 \quad (3.25b)$$

将上式代入(3.4b)，可得四边简支矩形板之第 $(m, n)$ 阶固有频率公式

$$f_{mn} = \frac{\omega_{mn}}{2\pi} = \frac{\pi}{2} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad (3.26a)$$

或写成式(3.17)形式

$$\omega_{mn} = \frac{\lambda_{mn}^2}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad (3.26b)$$

$$\lambda_{mn} = (\alpha a)_{mn} = \sqrt{\pi^2 \left( m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)} \quad (3.26c)$$

频率系数 $(\alpha a)_{mn}$ 只与阶次 $(m, n)$ 及长宽比 $a/b$ 有关，与板的材料常数无关，具体数字可查表3.4。

与此频率相应的四边简支矩形板之第 $(m, n)$ 阶振型为

$$W_{mn}(x, y) = \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3.26d)$$

四边简支矩形板之频率系数  $\lambda_{mn}(m, n)$  值

表3.4

阶次	$a/b$				
	0.4	2/3	1.0	1.5	2.5
1	3.383 (1.1)	3.776 (1.1)	4.443 (1.1)	5.664 (1.1)	8.459 (1.1)
2	4.023 (1.2)	5.236 (1.2)	7.025 (2.1)	7.854 (2.1)	10.06 (2.1)
3	4.907 (1.3)	6.623 (2.1)	7.025 (1.2)	9.935 (1.2)	12.27 (3.1)
4	5.928 (1.4)	7.025 (1.3)	8.886 (2.2)	10.54 (3.1)	14.82 (4.1)
5	6.408 (2.1)	7.551 (2.2)	9.935 (3.1)	11.32 (2.2)	16.02 (1.2)
6	6.767 (2.2)	8.886 (2.3)	9.935 (1.3)	13.33 (3.2)	16.92 (2.2)
7	7.025 (1.5)	8.947 (1.4)	11.33 (3.2)	13.42 (4.1)	17.56 (5.1)
8	7.327 (2.3)	9.655 (3.1)	11.33 (2.3)	14.48 (1.3)	18.32 (3.2)
9	8.168 (1.6)	10.31 (3.2)	12.95 (4.1)	15.47 (2.3)	20.42 (6.1)

由正弦函数特性知道, 式 (3.26d) 中  $m, n$  分别代表振型沿  $x, y$  方向的半波数。由式 (3.26a) 知,  $m = n = 1$  时频率最低, 即为板的基频, 这时相应的板的振型为在  $x, y$  方向各形成一个半波。当  $m = 2, n = 1$  时相应的板振型为  $x$  向两个半波,  $y$  方向一个半波。这时由式 (3.26d) 知, 在  $x = \frac{a}{2}$  直线处振型处处为零, 形成一节线。依次类推, 当  $m = m_0, n = n_0$  时形成振型在  $x$  向有  $m_0$  个半波,  $(m_0 - 1)$  个节线; 在  $y$  向有  $n_0$  个半波,  $(n_0 - 1)$  个节线, 这些节线均平行板的边界, 如图3.3所示。对于非基频情况, 频率大小排列次序不但和  $m, n$  值大小有关, 还和  $a, b$  比值有关, 具体要按式 (3.26a) 计算结果的数值确定, 详情可参见表3.4, 表中括号内数字代表  $(m, n)$ 。

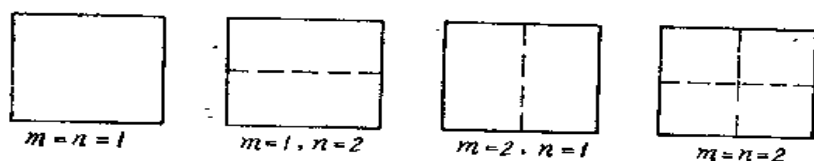


图 3.3

从表3.4可以发现, 一般来说,  $(m, n)$  数值越高, 频率越高; 若  $x$  向长 ( $a$  值较大) 则  $x$  向半波数较多时频率不高, 而在  $y$  向有相同半波数时频率较高, 也就是依频率大小次序,  $x$  向 (长向) 先出现多节线; 对于同样阶次, 随长宽比增加, 频率系数增加; 对于同样  $(m, n)$  数, 也随长宽比增加而频率系数增加。

在方板 ( $a = b$ ) 情况下, 其振型节线就比较特殊。因为按式 (3.26a) 方板有  $\omega_{mn} = \omega_{nm}$ , 因此相应的振型为

$$W_{mn}(x, y) = A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a} + A_{nm} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{a} \quad (b)$$

其中  $A_{mn}$  及  $A_{nm}$  为任意常数, 由不同  $A_{mn}$  与  $A_{nm}$  值间组合的  $W_{mn}$  均为其相应振型。例如  $m=1$ ,  $n=4$  及  $m=4$ ,  $n=1$  时其不同  $A_{14}$  及  $A_{41}$  间组合形成各种振型节线如图 3.4 所示。它们的节线不像  $a \times b$  矩形板那样规正, 而是变化多端 [188]。实际可能出现振型将和板的局部状态有关。



图 3.4

### § 3.3 对边简支板

从上节分析可知, 正弦函数是能满足对边为简支的板的边界条件。因此, 双正弦函数将满足四边简支板边界条件, 代入基本方程, 将偏微分方程降为代数方程求解。对于对边简支、另对边其它边界条件矩形板 (图 3.5), 将采用单正弦函数满足对边简支边界条件, 代入基本方程, 将偏微分方程降为常微分方程, 求取一般解, 用另对边边界条件确定其中待定系数从而求解。这种利用单向解析函数降维方法在数理方程求解中是常见的。

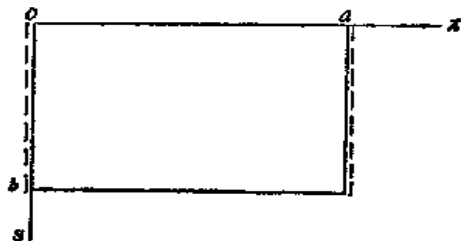


图 3.5

对边简支矩形板的基本振型方程仍是式 (3.23)。若  $x=0$  及  $x=a$  为简支边, 则其振型边界条件按式 (2.11 b), (2.11 c) 有

$$x=0, \quad x=a; \quad W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 \quad (3.27 a)$$

可设满足上述边界条件的振型解为

$$W(x, y) = Y_m(y) \sin \frac{m\pi}{a} x \quad (3.28)$$

其中  $Y_m$  为  $y$  的未知函数。代入方程 (3.23), 考虑到在板面处处成立, 得  $Y_m(y)$  应满足的方程

$$\frac{d^4 Y_m}{dy^4} - 2 \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{d^2 Y_m}{dy^2} + \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^4 - \alpha^4 \right] Y_m = 0 \quad (3.29)$$

式 (3.28) 为一常系数常微分方程, 其解

$$Y_m = e^{\beta_m y} \quad (a)$$

中  $\beta_m$  应满足特征方程

$$\beta_m^4 - 2 \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \beta_m^2 + \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^4 - \alpha^4 \right] = 0 \quad (b)$$

从而解出四个根

$$\beta_m = \pm i \beta_{1m}, \quad \pm \beta_{2m} \quad (3.30 a)$$

其中

$$\beta_{1m} = \sqrt{\alpha^2 - \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2}, \quad \beta_{2m} = \sqrt{\alpha^2 + \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2} \quad (3.30 b)$$

故有一般解

$$Y_m(y) = A_m \sin \beta_{1m} y + B_m \cos \beta_{1m} y + C_m \operatorname{sh} \beta_{2m} y + D_m \operatorname{ch} \beta_{2m} y \quad (3.31)$$

代入式 (3.27) 得振型

$$W(x, y) = [A_m \sin \beta_{1m} y + B_m \cos \beta_{1m} y + C_m \operatorname{sh} \beta_{2m} y + D_m \operatorname{ch} \beta_{2m} y] \sin \frac{m\pi}{a} x \quad (3.32a)$$

式中四个待定系数  $A_m, B_m, C_m, D_m$  将由另两对边的振型边界条件确定。

解 (3.32a) 是以  $\alpha^2 > \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2$  为前提的。根据式 (3.26c), 这一点在大部份情况下是成立的。但在有的条件下<sup>[78]</sup>会出现  $\alpha^2 < \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2$  情况。根据常微分方程理论, 这时解 (3.32a) 应相应改为

$$W(x, y) = [A_m \operatorname{sh} \beta_{1m} y + B_m \operatorname{ch} \beta_{1m} y + C_m \operatorname{sh} \beta_{2m} y + D_m \operatorname{ch} \beta_{2m} y] \sin \frac{m\pi}{a} x \quad (3.32b)$$

式中

$$\beta_{1m} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \alpha^2} \quad (3.30c)$$

为了叙述简便起见, 本书下面公式推导凡不作说明均以式 (3.32a) 为准, 在  $\alpha^2 < \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2$  情况下应改为式 (3.32b), 就不再重复说明。

和单向板一样, 另两对边的简单边界条件有六种, 除了上节已经讨论的另两对边为简支 (即四边简支板) 情况外, 另五种边界条件板的结果将在下面分别列出。

对边简支对边固定板 平行  $x$  轴两边为固定边界情况下, 振型边界条件除式 (3.27) 外, 还应有

$$y = 0, y = b: W = \frac{\partial W}{\partial y} = 0 \quad (3.27b)$$

将解 (3.32) 代入边界条件 (3.27b) 得关于  $A_m, B_m, C_m, D_m$  的齐次线代方程组

$$\left. \begin{aligned} B_m + D_m &= 0 \\ \beta_{1m} A_m + \beta_{2m} C_m &= 0 \\ \sin \beta_{1m} b \cdot A_m + \cos \beta_{1m} b \cdot B_m + \operatorname{sh} \beta_{2m} b \cdot C_m + \operatorname{ch} \beta_{2m} b \cdot D_m &= 0 \\ \beta_{1m} \cos \beta_{1m} b \cdot A_m - \beta_{1m} \sin \beta_{1m} b \cdot B_m + \beta_{2m} \operatorname{ch} \beta_{2m} b \cdot C_m \\ + \beta_{2m} \sin \beta_{2m} b \cdot D_m &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

为求取方程组 (c) 的非零解, 则其系数行列式应为零, 有

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \beta_{1m} & 0 & \beta_{2m} & 0 \\ \sin \beta_{1m} b & \cos \beta_{1m} b & \operatorname{sh} \beta_{2m} b & \operatorname{ch} \beta_{2m} b \\ \beta_{1m} \cos \beta_{1m} b & -\beta_{1m} \sin \beta_{1m} b & \beta_{2m} \operatorname{ch} \beta_{2m} b & \beta_{2m} \operatorname{sh} \beta_{2m} b \end{vmatrix} = 0 \quad (d)$$

或展开成

$$(\beta_{1m}^2 - \beta_{2m}^2) \sin \beta_{1m} b \operatorname{sh} \beta_{2m} b - 2\beta_{1m} \beta_{2m} (\cos \beta_{1m} b \operatorname{ch} \beta_{2m} b - 1) = 0 \quad (3.33a)$$

式中 $\beta_{1m}, \beta_{2m}$ 通过式(3.30b)及(3.4b)和板的圆频率 $\omega$ 发生联系,因此式(3.33a)是对边简支、对边固定矩形板的频率方程。式(3.33a)是一个关于频率的超越代数方程,对应每个 $m$ 给定值,有无穷多个频率解 $\omega_m (n=1, 2, 3, \dots)$ 。

第 $(m, n)$ 阶频率值 $\omega_m$ 或其对应的 $\alpha_m$ 及 $\beta_{1m}, \beta_{2m}$ 为齐次线代方程组(c)的特征根。对应每个频率可以求得相应方程组(c)的特征向量 $[A_m, B_m, C_m, D_m]^T$ ,代回式(3.32)即得第 $(m, n)$ 阶振型

$$W_m(x, y) = [(\beta_{2m} \sin \beta_{1m} y - \beta_{1m} \operatorname{sh} \beta_{2m} y) + \alpha_m (\cos \beta_{1m} y - \operatorname{ch} \beta_{2m} y)] \sin \frac{m\pi}{a} x \quad (3.34a)$$

式中

$$\alpha_m = \frac{\beta_{1m} \operatorname{sh} \beta_{2m} b - \beta_{2m} \sin \beta_{1m} b}{\cos \beta_{1m} b - \operatorname{ch} \beta_{2m} b} \quad (3.35a)$$

对于其余四种对边简支矩形板将直接列出有关结果。

三边简支一边固定板

振型边界条件

$$\left. \begin{aligned} y=0: W = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0 \\ y=b: W = \frac{\partial W}{\partial y} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.27c)$$

频率方程

$$\beta_{1m} \operatorname{sh} \beta_{2m} b \cos \beta_{1m} b - \beta_{2m} \operatorname{ch} \beta_{2m} b \sin \beta_{1m} b = 0 \quad (3.33b)$$

振型

$$W_m(x, y) = [\sin \beta_{1m} y - \alpha_m \operatorname{sh} \beta_{2m} y] \sin \frac{m\pi}{a} x \quad (3.34b)$$

式中

$$\alpha_m = \frac{\sin \beta_{1m} b}{\operatorname{sh} \beta_{2m} b} \quad (3.35b)$$

对边简支一边固定一边自由板

振型边界条件

$$\left. \begin{aligned} y=0: W = \frac{\partial W}{\partial y} = 0 \\ y=b: \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.27d)$$

频率方程

$$\begin{aligned} (\beta_{1m}^2 - \beta_{2m}^2) \left[ \frac{\alpha^4 \alpha^4 (2\nu - 1)}{m^4 \pi^4} + (\nu - 1)^2 \right] \sin \beta_{1m} b \operatorname{sh} \beta_{2m} b \\ + 2\beta_{1m} \beta_{2m} \left[ \left( \frac{\alpha^4 \alpha^4}{m^4 \pi^4} \right) (\cos \beta_{1m} b \operatorname{ch} \beta_{2m} b + 1) + (\nu - 1)^2 (\cos \beta_{1m} b \operatorname{ch} \beta_{2m} b - 1) \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.33c)$$

振型

$$W_m(x, y) = [(\beta_{2m} \sin \beta_{1m} y - \beta_{1m} \operatorname{sh} \beta_{2m} y) - \alpha_m (\cos \beta_{1m} y - \operatorname{ch} \beta_{2m} y)] \sin \frac{m\pi}{a} x \quad (3.34c)$$

式中

$$a_{mn} = \frac{\left(\frac{\alpha_{mn}^2 a^2}{m^2 \pi^2} + \nu - 1\right) \beta_{2mn} \sin \beta_{1mn} b + \left(\frac{\alpha_{mn}^2 a^2}{m^2 \pi^2} - \nu + 1\right) \beta_{1mn} \operatorname{sh} \beta_{2mn} b}{\left(\frac{\alpha_{mn}^2 a^2}{m^2 \pi^2} + \nu - 1\right) \cos \beta_{1mn} b + \left(\frac{\alpha_{mn}^2 a^2}{m^2 \pi^2} - \nu + 1\right) \operatorname{ch} \beta_{2mn} b} \quad (3.35 c)$$

三边简支一边自由板

振型边界条件

$$\left. \begin{aligned} y=0, \quad W = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0 \\ y=b, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.27 e)$$

频率方程

$$\operatorname{th} \beta_{2mn} b \operatorname{ctg} \beta_{1mn} b - \frac{\beta_{2mn}}{\beta_{1mn}} \left[ \frac{\frac{\alpha_{mn}^2 a^2}{m^2 \pi^2} + \nu - 1}{\frac{\alpha_{mn}^2 a^2}{m^2 \pi^2} - \nu + 1} \right] = 0 \quad (3.33 d)$$

振型

$$W_{mn}(x, y) = [\sin \beta_{1mn} y + a_{mn} \operatorname{sh} \beta_{2mn} y] \sin \frac{m\pi}{a} x \quad (3.34 d)$$

式中

$$a_{mn} = \frac{\sin \beta_{1mn} b \left( \frac{\alpha_{mn}^2 a^2}{m^2 \pi^2} + \nu - 1 \right)}{\operatorname{sh} \beta_{2mn} b \left( \frac{\alpha_{mn}^2 a^2}{m^2 \pi^2} - \nu + 1 \right)} \quad (3.35 d)$$

对边简支对边自由板

振型边界条件

$$y=0, \quad y=b: \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} = 0 \quad (3.27 f)$$

频率方程:

$$\begin{aligned} & 2\beta_{1mn}\beta_{2mn} \left[ \frac{\alpha_{mn}^4 a^4}{m^4 \pi^4} - (\nu-1)^2 \right]^2 (\operatorname{ch} \beta_{2mn} b \cos \beta_{1mn} b - 1) \\ & + \left[ \beta_{1mn}^2 \left( \frac{\alpha_{mn}^2 a^2}{m^2 \pi^2} - \nu + 1 \right)^4 - \beta_{2mn}^2 \left( \frac{\alpha_{mn}^2 a^2}{m^2 \pi^2} + \nu - 1 \right)^4 \right] \sin \beta_{1mn} b \operatorname{sh} \beta_{2mn} b = 0 \end{aligned} \quad (3.33 e)$$

振型

$$\begin{aligned} W_{mn}(x, y) = & \left[ \beta_{2mn} \left( \frac{\alpha_{mn}^2 a^2}{m^2 \pi^2} + \nu - 1 \right) \sin \beta_{1mn} y + \beta_{1mn} \left( \frac{\alpha_{mn}^2 a^2}{m^2 \pi^2} - \nu + 1 \right) \operatorname{sh} \beta_{2mn} y \right] \\ & - a_{mn} \left[ \left( \frac{\alpha_{mn}^2 a^2}{m^2 \pi^2} - \nu + 1 \right) \cos \beta_{1mn} y + \left( \frac{\alpha_{mn}^2 a^2}{m^2 \pi^2} + \nu - 1 \right) \operatorname{ch} \beta_{2mn} y \right] \end{aligned} \quad (3.34 e)$$

式中

$$a_{mn} = \frac{\beta_{2mn} \left( \frac{\alpha_{mn}^2 a^2}{m^2 \pi^2} + \nu - 1 \right) \sin \beta_{1mn} b - \beta_{1mn} \left( \frac{\alpha_{mn}^2 a^2}{m^2 \pi^2} - \nu + 1 \right)^2 \operatorname{sh} \beta_{2mn} b}{\left[ \frac{\alpha_{mn}^4 a^4}{m^4 \pi^4} - (\nu-1)^2 \right] (\cos \beta_{1mn} b - \operatorname{ch} \beta_{2mn} b)} \quad (3.35 e)$$

根据频率方程 (3.33) 求得的各种对边简支方板 [78][119] 的头六阶频率系数  $\lambda_{mn}$  见表 3.5。各种长宽比情况下矩形板的基频系数  $\lambda_{11}$  见表 3.6。而板的圆频率按式 (3.26b) 为

$$\omega_{mn} = \frac{\lambda_{mn}^2}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad (3.36)$$

不同边界条件对边简支方板的频率系数  $\lambda_{mn}$  (有自由边板  $\nu = 0.3$ )

表 3.5

边界条件	$\lambda_{11}$	$\lambda_{21}$	$\lambda_{12}$	$\lambda_{22}$	$\lambda_{31}$	$\lambda_{13}$
对边简支对边固定	5.380	7.399	8.326	9.725	10.11	11.36
三边简支一边固定	4.863	7.188	7.658	9.280	10.01	10.64
对边简支一边固定一边自由	3.562	6.457	5.750	7.938	9.519	8.509
三边简支一边自由	3.418	6.419	5.269	7.686	9.502	7.865
对边简支对边自由	3.103	6.240	4.016	6.837	8.411	6.060

从表 3.5 可以看出, 对于同样的  $(m, n)$  顺序的不同边界条件板, 其频率系数大小排列将发生变化。例如, 一对边简支另一对边固定方板  $\lambda_{12} > \lambda_{21}$ , 而三边简支一边自由方板  $\lambda_{12} < \lambda_{21}$ 。其原因在于两板  $x$  向边界相同, 而  $y$  向固定-固定要比  $x$  向简支-简支刚, 而  $y$  向简支-自由要比  $x$  向简支-简支柔, 因此前者  $y$  向出现两个半波比  $x$  向出现两个半波的频率要高, 后者  $y$  向出现两个半波比  $x$  向出现两个半波的频率要低。对于同样的  $(m, n)$  数, 频率系数大小将依赖于边界条件的固定、简支、自由边数。三种边界条件相比, 固定边最刚, 简支边次之, 自由边最柔, 因此在其它边的边界条件相同情况下, 固定边板频率系数高于简支边板, 简支边板频率系数高于自由边板。例如, 表中对于同样的  $\lambda_{mn}$  列, 则对边简支、对边固定板的频率系数将高于三边简支、一边固定板, 这是因为两者有同样的二边简支、一边固定, 但第四边前者为固定边, 后者为简支边。因此表中从上到下频率系数均有规律减小就是这个原因。

不同边界条件对边简支矩形板基频系数  $\lambda_{11}$  (有自由边板  $\nu = 0.3$ )

表 3.6

边界 $a/b$	对边简支对边固定	三边简支一边固定	对边简支一边固定 一边自由	三边简支一边自由	对边简支对边自由
0.5	3.483	3.428	3.192	3.183	3.124
2/3	4.167	3.947	3.314	3.266	3.114
1.0	5.380	4.863	3.562	3.418	3.103
1.5	7.507	6.522	4.101	3.703	3.092
2.5	12.06	10.19	5.534	4.336	3.080

从表 3.6 可以发现, 和四边简支板一样, 各种对边简支板的频率系数将随  $a/b$  增加而增加 (对于相同  $a$  值, 则频率增加); 和方板一样, 同样  $a/b$  的矩形板, 边界条件刚性减小 (表中自左至右), 则频率系数有规律减小。

还应指出一点, 从不同边界条件板的频率方程 (3.33) 各式比较知道, 凡具有自由边界板, 其频率方程含有泊松比  $\nu$ , 故其频率解还与  $\nu$  值有关。表 3.5 及表 3.6 中频率系数对于带自由边界板均为  $\nu = 0.3$  结果。 $\nu$  对频率系数影响比较复杂, 一般来说, 当  $\nu$  变化时, 对于短跨方向有自由边的板频率系数影响较大。例如对边简支、一边固定、一边自由矩形板基频系

数随 $\nu$ 变化情况见表3.7。

与这些频率值相应的振型 $W_{mn}(x, y)$ 将有四边简支板的类似规律, 即在 $x$ 向有 $m$ 个半波,  $(m-1)$ 个节线; 在 $y$ 向有 $n$ 个半波,  $(n-1)$ 个节线。对于同样 $(m, n)$ 数的不同边界条件板, 在边界处振型有些改变, 自由边处代替半波为 $\frac{1}{4}$ 波。而对于较大 $(m, n)$ 值, 其中间部份振型受边界条件、 $a/b$ 值、及另一方向 $n$ 或 $m$ 值影响均较小。对于对边对称边界板, 其对称所在方向的 $m$ 或 $n$ 值为偶数时, 则振型沿此方向也对称。

不同 $\nu$ 值下对边简支、一边固定、  
一边自由矩形板基频系数 $\lambda_{11}$  表3.7

$\nu$ $a/b$	0.3	1/3	0.5
0.4	3.192	3.176	3.126
2/3	3.314	3.257	3.183
1.0	3.562	3.403	3.297
1.5	4.101	3.679	3.525
2.5	5.534	4.298	4.063

对边简支振型一般解 (3.32) 尚可用于另对边为弹性支承或弹性嵌固情况<sup>[59]</sup>。在一般情况下, 边界可能既包括弹性支承又包括弹性嵌固, 而且两对边弹性常数也可不一样, 则振型边界条件一般有

$$\left. \begin{aligned} y=0: M_y &= -K_1 \frac{\partial W}{\partial y}, V_y = K_3 W \\ y=b: M_y &= K_2 \frac{\partial W}{\partial y}, V_y = -K_4 W \end{aligned} \right\} \quad (3.27g)$$

其中,  $K_1, K_2$ 为弹性嵌固常数,  $K_3, K_4$ 为弹性支承常数。假定它们沿 $x$ 方向均是不变化的。下面分两种情况来分析。

**对边简支、对边弹性嵌固板** 即振型边界条件 (3.27g) 中取 $K_1=K_2=K, K_3=K_4=\infty$  (相当 $W=0$ )。代入式 (3.32) 可求得频率方程

$$\frac{\beta_{2m}^2 - \beta_{1m}^2}{2\beta_{1m}\beta_{2m}} + (\beta_{1m}^2 + \beta_{2m}^2) \frac{D}{K} \left[ \frac{\operatorname{ctg} \beta_{2m} b}{\beta_{1m}} - \frac{\operatorname{ctg} \beta_{1m} b}{\beta_{2m}} + \frac{D}{K} \left( \frac{\beta_{1m}^2 + \beta_{2m}^2}{2\beta_{1m}\beta_{2m}} \right) \right] + \frac{1 - \cos \beta_{1m} b \operatorname{ch} \beta_{2m} b}{\sin \beta_{1m} b \operatorname{sh} \beta_{2m} b} = 0 \quad (3.33f)$$

振型

$$W_{mn}(x, y) = [\operatorname{ch} \beta_{2mn} y - \cos \beta_{1mn} y + a_{1mn} \operatorname{sh} \beta_{2mn} y - a_{2mn} \sin \beta_{1mn} y] \sin \frac{m\pi}{a} x \quad (3.34f)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} a_{1mn} &= \frac{(\beta_{1mn}^2 + \beta_{2mn}^2) \sin \beta_{1mn} b + \beta_{1mn} \frac{K}{D} (\operatorname{ch} \beta_{2mn} b - \cos \beta_{1mn} b)}{\frac{K}{D} (\beta_{2mn} \sin \beta_{1mn} b - \beta_{1mn} \operatorname{sh} \beta_{2mn} b)} \\ a_{2mn} &= \frac{(\beta_{1mn}^2 + \beta_{2mn}^2) \operatorname{sh} \beta_{2mn} b + \beta_{2mn} \frac{K}{D} (\operatorname{ch} \beta_{2mn} b - \cos \beta_{1mn} b)}{\frac{K}{D} (\beta_{2mn} \sin \beta_{1mn} b - \beta_{1mn} \operatorname{sh} \beta_{2mn} b)} \end{aligned} \right\} \quad (3.35f)$$

很容易证明, 上述诸式当 $K=\infty$ 时即简化为对边简支、对边固定板的频率方程及振型 (3.33a), (3.34a), (3.35a); 当 $K=0$ 时即简化为四边简支板的频率方程及振型 (3.25b),



(3.26d)。

对边简支、对边弹性支承板 即振型边界条件(3.27g)中取  $K_1 = K_2 = \infty$  (相当  $\frac{\partial W}{\partial y} = 0$ )， $K_3 = K_4 = K$ ，代入式(3.32)可求得频率方程

$$\frac{(g_2 h_1)^2 - (g_1 h_2)^2}{2g_1 g_2 h_1 h_2} + (h_1 + h_2) \frac{K}{D} \left[ \frac{\operatorname{ctg} \beta_{1m} b}{g_2 h_1} - \frac{\operatorname{cth} \beta_{2m} b}{g_1 h_2} + \frac{K(h_1 + h_2)}{D 2g_1 g_2 h_1 h_2} \right] + \frac{1 - \cos \beta_{1m} b \operatorname{ch} \beta_{2m} b}{\sin \beta_{1m} b \operatorname{sh} \beta_{2m} b} = 0 \quad (3.33g)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} g_1 &= \beta_{1m} \left[ \beta_{1m}^2 + (2 - \nu) \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right], & g_2 &= \beta_{2m} \left[ \beta_{2m}^2 - (2 - \nu) \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right] \\ h_1 &= \beta_{1m} \left[ \beta_{1m}^2 + \nu \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right], & h_2 &= \beta_{2m} \left[ \beta_{2m}^2 - \nu \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.33h)$$

振型

$$W_{mn}(x, y) = \left[ \operatorname{ch} \beta_{2m} y + \frac{h_2}{h_1} \cos \beta_{1m} y + a_{1mn} \operatorname{sh} \beta_{2m} y + a_{2mn} \sin \beta_{1m} y \right] \sin \frac{m\pi}{a} x \quad (3.34g)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} a_{1mn} &= \frac{\frac{K}{D}(h_1 + h_2) \sin \beta_{1m} b + g_1 h_2 (\cos \beta_{1m} b - \operatorname{ch} \beta_{2m} b)}{g_1 h_2 \operatorname{sh} \beta_{2m} b - g_2 h_1 \sin \beta_{1m} b} \\ a_{2mn} &= \frac{\frac{K}{D}(h_1 + h_2) h_2 \operatorname{sh} \beta_{2m} b + g_2 h_1 h_2 (\cos \beta_{1m} b - \operatorname{ch} \beta_{2m} b)}{h_1 (g_1 h_2 \operatorname{sh} \beta_{2m} b - g_2 h_1 \sin \beta_{1m} b)} \end{aligned} \right\} \quad (3.35g)$$

也可以证明，上述诸式当  $K = \infty$  时即简化为对边简支、对边固定板的频率方程及振型(3.33a)，(3.34a)，(3.35a)；当  $K = 0$  时即简化为相当于垂直移动自由，而转角保持为零的滑移边界情况。

对边简支、对边弹嵌矩形板的基频系数  $\lambda_{11}$ 

表3.8

$a/b$ $Kb/D$	0.4	0.7	1.0	1.5
0	3.383	3.846	4.443	5.664
0.5	3.389	3.857	4.506	5.798
1	3.393	3.874	4.549	5.908
2	3.400	3.905	4.632	6.087
4	3.409	3.959	4.754	6.346
6	3.417	3.998	4.844	6.524
10	3.428	4.054	4.963	6.750
20	3.447	4.127	5.114	7.084
$\infty$	3.483	4.275	5.380	7.507

由式(3.33f) 计算所得基频系数  $\lambda_{11}$  随无量纲弹性常数  $\frac{Kb}{D}$  及长宽比  $\frac{a}{b}$  变化情况见表

3.8。表中数值表明，由于  $K$  值增加，边界转动刚度增加，因而频率系数值增高。显然，在  $K = 0$  及  $K = \infty$  两种极端情况，即相当此对边简支或固定边界板结果（见表3.4及表3.6）。

当两对边弹性常数不一时，可用两边弹性常数均等于其中之一，查表3.8所得两个频率系数的平均值来近似计算。

### § 3.4 四边固定板

对于非对边简支板，上节所述一般性解法就不再适用，需要针对不同边界采用不同求解

的方法。对于常用的四边固定板，介绍一种展开成付里叶 (Fourier) 级数的解法<sup>[119]</sup>。

四边固定矩形板 (图3.6)的基本振型方程仍是式(3.23)。其振型边界条件按式(2.11a)

有

$$\left. \begin{aligned} x=0, \quad x=a; \quad W=\frac{\partial W}{\partial x}=0 \\ y=0, \quad y=b; \quad W=\frac{\partial W}{\partial y}=0 \end{aligned} \right\} \quad (3.36)$$

首先设满足上述全部边界条件的振型级数

解

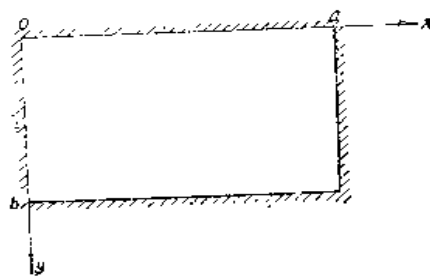


图 3.6

$$\begin{aligned} W(x, y) = W_0(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} \left[ (-1)^i \left( \frac{x^3}{a^3} - \frac{x^2}{a^2} \right) + \left( \frac{x^3}{a^3} - 2 \frac{x^2}{a^2} + \frac{x}{a} \right) \right. \\ \left. - \frac{1}{i\pi} \sin \frac{i\pi x}{a} \right] \times \left[ (-1)^j \left( \frac{y^3}{b^3} - \frac{y^2}{b^2} \right) + \left( \frac{y^3}{b^3} - 2 \frac{y^2}{b^2} + \frac{y}{b} \right) - \frac{1}{j\pi} \sin \frac{j\pi y}{b} \right] \end{aligned} \quad (3.37)$$

式中  $A_{ij}$  是待定系数。选择适当  $A_{ij}$  间比值以满足振型方程 (3.23)，其方法是将振型(3.37)代入方程(3.23)，并展开成双重付里叶级数

$$\begin{aligned} L(W_0) &= \frac{\partial^4 W_0}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W_0}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W_0}{\partial y^4} - \alpha^4 W_0 \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b} = 0 \end{aligned} \quad (a)$$

式中  $a_{ij}$  为  $L(W_0)$  的付里叶系数。为保证式 (a) 成立，必须有

$$a_{ij} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b L(W_0) \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b} dx dy = 0 \quad (b)$$

即得关于系数  $A_{ij}$  的无穷阶齐次线代方程组

$$\begin{aligned} A_{mn} \left[ \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - \frac{\alpha^4}{\pi^4} \right] - \frac{4}{m^2 n^2} \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^4 + 2 \left( \frac{m}{a} \right)^2 \left( \frac{n}{b} \right)^2 - \frac{\alpha^4}{\pi^4} \right] \left\{ 2 + (-1)^n \sum_{j=1}^{\infty} A_{mj} \right. \\ \left. + [1 + 2(-1)^n] \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j A_{mj} \right\} - \frac{4}{m^2 n^2} \left[ \left( \frac{n}{b} \right)^4 + 2 \left( \frac{n}{b} \right)^2 \left( \frac{m}{a} \right)^2 - \frac{\alpha^4}{\pi^4} \right] \left\{ 2 + (-1)^m \sum_{i=1}^{\infty} A_{in} \right. \\ \left. + [1 + 2(-1)^m] \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i A_{in} \right\} + \frac{16}{m^2 n^2 \pi^4} \left[ 2 \left( \frac{m}{a} \right)^2 \left( \frac{n}{b} \right)^2 - \frac{\alpha^4}{\pi^4} \right] \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ 2 + (-1)^i \right. \\ \left. + (-1)^n [1 + 2(-1)^i] \right\} \left\{ 2 + (-1)^j + (-1)^m [1 + 2(-1)^j] \right\} A_{ij} = 0 \end{aligned} \quad (3.38)$$

( $m, n = 1, 2, 3, \dots$ )

上述线代方程组要求得非零解，则其系数行列式为零，从而推得关于频率系数  $\lambda = (\alpha a)$  的频率方程。当然实际计算  $m, n$  只能取有限项进行。例如，当取  $m, n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  时，按式 (3.38) 所得三十六阶线代方程组和相应频率方程求得的方板头六阶频率系数

$$\lambda_{mn} = \sqrt{\omega_{mn} a^2} \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \text{ 列于表 3.9}$$

四边固定方板的频率系数  $\lambda_{mn}$ 

表3.9

$\lambda_{11}$	$\lambda_{12}$	$\lambda_{22}$	$\lambda_{13}$	$\lambda_{23}$	$\lambda_{33}$
5.993	8.567	10.40	11.50	12.84	15.59

频率系数为  $\lambda_{mn}$  的固有频率相应的振型表达式 (3.37) 中以  $A_{mn}$  为最大, 其它  $A_{ij}$  ( $i \neq m$ ,  $j \neq n$ ) 较小, 但不为零和前面两节振型在  $x, y$  两方向完全分离变量 (见式 (3.25a), (3.28)) 是不一样的。四边固定板的振型是  $x$  方向为  $i$  个半波,  $y$  方向为  $j$  个半波的振型乘  $A_{ij}$  的组合。因此第  $(m, n)$  阶振型  $W_{mn}$  不简单地是  $x$  方向  $m$  个半波,  $y$  方向  $n$  个半波, 节线也不一定是平行边界。

### § 3.5 悬臂板

对于三边自由一边固定的悬臂板介绍一种利用单向解析函数代入变分方程降为另一方向的常微分方程的康特洛维奇 (Канторович) 法 [170]。

三边自由一边固定矩形板 (图3.7) 的基本振型方程仍是式(3.23), 其振型边界条件按式(2.11a)及式(2.11d)有

$$x=0: W = \frac{dW}{dx} = 0 \quad (3.39a)$$

$$x=a: \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} = 0 \quad (3.39b)$$

$$y=0, y=b: \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} = 0 \quad (3.39c)$$

而其相应的振型变分方程按式(2.14a), (2.15), (2.16)及(3.4b)有

$$\delta \int_0^a \int_0^b \left\{ (\nabla^2 W)^2 - 2(1-\nu) \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] - \alpha^4 W^2 \right\} dx dy = 0 \quad (3.40)$$

首先设振型函数为  $y$  方向满足位移边界的已知解析函数  $Y_n(y)$  和  $x$  方向未知函数  $u(x)$  的乘积

$$W(x, y) = u(x) Y_n(y) \quad (3.41)$$

对于本问题,  $Y_n(y)$  不需要满足任何位移边界条件, 一般可取自由-自由单向板第  $n$  阶振型函数 (梁函数) (3.18b)。而未知函数  $u(x)$  将通过满足变分方程满足。将式 (3.41) 代入方程 (3.40) 经变分运算, 可得  $u(x)$  应满足的常微分方程

$$I_{1n} \frac{d^4 u}{dx^4} - 2 \left[ I_{2n} - \nu (I_{2n} + I_{3n}) \right] \frac{d^2 u}{dx^2} - (\alpha^4 - I_{4n}) u = 0 \quad (3.42)$$

及自然边界条件

$$x=a: I_{1n} \frac{d^2 u}{dx^2} + \nu I_{3n} u = I_{1n} \frac{d^3 u}{dx^3} - 2 \left[ I_{2n} - \nu \left( I_{2n} + \frac{1}{2} I_{3n} \right) \right] \frac{du}{dx} = 0 \quad (3.43a)$$

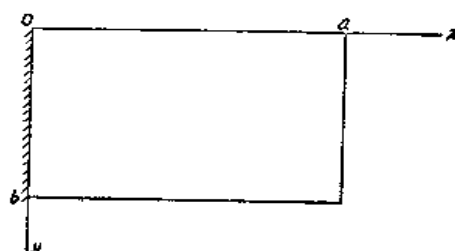


图 3.7

另外  $u(x)$  还应满足位移边界条件

$$x=0: u = \frac{du}{dx} = 0 \quad (3.43b)$$

式中

$$I_{1n} = \int_0^b Y_n^2 dy, \quad I_{2n} = \int_0^b \left( \frac{dY_n}{dy} \right)^2 dy, \quad I_{3n} = \int_0^b Y_n \frac{d^2 Y_n}{dy^2} dy, \quad I_{4n} = \int_0^b \left( \frac{d^2 Y_n}{dy^2} \right)^2 dy \quad (3.44a)$$

式 (3.44a) 中各式均为已知。对于取用  $Y_n$  为梁函数的上述各值具体算式或数值见附录 I。

常微分方程 (3.42) 满足边界条件 (3.43b) 的一般解为

$$u(x) = A \left[ \operatorname{ch} \frac{\alpha_0 x}{b} - \cos \frac{\beta_0 x}{b} \right] + B \left[ \frac{1}{\alpha_0} \operatorname{sh} \frac{\alpha_0 x}{b} - \frac{1}{\beta_0} \sin \frac{\beta_0 x}{b} \right] \quad (3.45a)$$

式中

$$\frac{\alpha_0}{\beta_0} = \sqrt{\{(ab)^4 - J_{4n} + [J_{2n} - \nu(J_{2n} + J_{3n})]^2\}^{\frac{1}{2}} \pm [J_{2n} - \nu(J_{2n} + J_{3n})]} \quad (3.45b)$$

将解 (3.45a) 代入边界条件 (3.43a)，可得关于系数  $A, B$  的二阶线性代数方程组。由其系数行列式为零可得频率方程

$$\begin{aligned} & (ab)^4 - J_{4n} - 2\nu J_{3n} [J_{2n} - \nu(J_{2n} + \frac{1}{2}J_{3n})] + \{(ab)^4 - J_{4n} + (1-\nu)^2 J_{2n}^2 \\ & + [J_{2n} - \nu(J_{2n} + J_{3n})]^2\} \operatorname{ch} \frac{\alpha_0 a}{b} \cos \frac{\beta_0 a}{b} + \left\{ [J_{2n} - \nu(J_{2n} + J_{3n})] \sqrt{(ab)^4 - J_{4n}} \right. \\ & \left. - \nu^2 J_{3n}^2 \frac{[J_{2n} - \nu(J_{2n} + J_{3n})]}{(ab)^4 - J_{4n}} \right\} \operatorname{sh} \frac{\alpha_0 a}{b} \sin \frac{\beta_0 a}{b} = 0 \end{aligned} \quad (3.45c)$$

上述两式中

$$J_{2n} = \frac{b^2 I_{2n}}{I_{1n}}, \quad J_{3n} = \frac{b^3 I_{3n}}{I_{1n}}, \quad J_{4n} = \frac{b^4 I_{4n}}{I_{1n}} \quad (3.44b)$$

将式 (3.45b) 及 (3.4b) 代入式 (3.46)，对应每个  $n$  值，即可求得一系列频率值 ( $m=1, 2, 3, \dots$ )，其第  $(m, n)$  阶频率系数  $\lambda_{mn} = \sqrt{\omega_{mn}^2} \sqrt{\frac{\rho h}{D}}$  见表 3.10。将  $\lambda_{mn}$  及按式 (3.45b) 求得的相应  $\alpha_{0mn}, \beta_{0mn}$  代回关于  $A, B$  的齐次线性代数方程，求出振型系数比，再代回式 (3.45a) 及式 (3.41)，即得相应振型。由于式 (3.41) 以分离变量形式表示振型，所以与固有频率  $\omega_{mn}$  相应的第  $(m, n)$  阶振型  $W_{mn}$  也将会有  $x$  方向  $m$  个半波， $y$  方向  $n$  个半波及节线平行边界的特点。

悬臂矩形板频率系数  $\lambda_{mn}$  ( $\nu=0.3$ )

表 3.10

$b/a$	$\lambda_{11}$	$\lambda_{12}$	$\lambda_{21}$	$\lambda_{13}$	$\lambda_{22}$
1.0	1.864	2.931	4.615	5.211	6.571
0.8	1.859	3.175	4.624	6.275	5.930
0.6	1.852	3.570	4.635	7.713	6.516
0.4	1.849	4.235	4.643	7.779	7.567

上面 § 3.2—§ 3.5 各节提到了不同边界条件矩形板固有振动的几种求解方法。比较这几

种方法可以看出, 无论是方法原理一直到结果均有很大差别。前三节所述方法是一种求解微分方程的精确解, 而 § 3.5 则是一种求解变分方程的近似解。其中 § 3.2 给出的频率结果是初等解析函数表达式, § 3.3 给出的是频率所满足的超越方程。§ 3.4 给出的是频率所满足的无穷阶代数方程组:

$$x = 0; \quad \frac{d^2 u}{dx^2} = 0 \quad (3.46 a)$$

另外还有位移边界条件

$$x = 0; \quad u = 0 \quad (3.46 b)$$

同样可得  $u(x)$  的一般解

$$u(x) = A \sinh \frac{\alpha_0 x}{b} + B \sin \frac{\beta_0 x}{b} \quad (3.46 c)$$

及频率方程

$$\frac{(\beta_0^2 - \nu J_{3,0})^2}{\beta_0} \operatorname{tg} \frac{\beta_0 a}{b} = \frac{(\alpha_0^2 + \nu J_{3,0})^2}{\alpha_0} \operatorname{th} \frac{\alpha_0 a}{b} \quad (3.46 d)$$

### § 3.6 适合于求解各种边界条件矩形板的梁函数组合法

对于一般性边界条件的矩形板固有振动分析, 也就是在矩形板四边的每边任取简支、固定、自由、弹性边界之一的一般情况下, 可采用双向梁函数组合级数逼近方法, 将取得较为满意结果<sup>[265][282]</sup>。虽然这是一种近似解, 但由于方法具有普遍性, 加上电算技术发展, 在一般微机能够容纳的项数情况下即能达到足够精度, 所以工程上大部分矩形板振动分析均采用此法。

在 § 3.1 中已经讨论过, 当一个矩形板的一个方向相当长时, 其另一方向的振型将十分接近相应边界条件单向板或梁的振型函数 (简称“梁函数”, 详见附录 I)。而当矩形板两个方向长度较为接近时, 其主要区域 (尤其是中间部分) 振型也十分接近于两个方向相应边界条件梁函数乘积, 而且第  $(m, n)$  阶矩形板的振型函数又和  $x$  向相应边界条件梁的第  $m$  阶梁函数与  $y$  向相应边界条件梁的第  $n$  阶梁函数乘积十分接近。利用这一特点, 下面我们 will 用梁函数组合级数满足变分方程来求解固有振动问题。首先讨论用多项梁函数组合级数的矩形板振动分析, 给出一般性计算方程和各边为简单边界条件下的实用数值结果, 然后给出用单项梁函数组合级数的矩形板固有频率的一般性解析公式。

#### 多项组合法

对于每边边界条件为一致的, 而又任为简支、固定、自由、弹支、弹嵌边界之一的一般性矩形薄板 (图 3.2) 的挠度振型可设为

$$W(x, y) = \sum_{m=1}^p \sum_{n=1}^q A_{mn} X_m(x) Y_n(y) \quad (3.47)$$

式中  $X_m(x)$  及  $Y_n(y)$  分别为与  $x, y$  方向两端边界条件相应的第  $m$  及  $n$  阶梁振型函数。例如, 对于悬臂矩形板 (图 3.7), 则  $X_m(x)$  为固定-自由梁第  $m$  阶振型函数 (3.18 e),  $Y_n(y)$  为自

由一自由第  $n$  阶梁振型函数 (3.18 b)。由于在第二章我们已经详细讨论了各种端部边界条件的单向板, 即梁的振型函数具体表达式及其有关系数, 因此在式 (3.47) 中, 对于各种边界条件的矩形板, 其相应的  $X_m(x)$  及  $Y_n(y)$  均为已知函数。而  $A_{mn}$  是待定系数, 它是用来调整不同阶次梁函数的组合以逼近矩形板振型真实解。采取式 (3.47) 形式的振型函数已保证了各种边界条件矩形板的位移边界条件, 因此可通过位移变分原理进一步满足基本方程及力边界条件。这种满足变分方程过程即为求解待定系数  $A_{mn}$  所应满足的代数方程组。

将式 (3.47) 代入矩形板振型变分方程 (3.40), 并经变分运算, 可得关于  $\delta A_{mn}$  的单一齐次方程。进一步考虑到  $A_{mn}$  任意性, 由  $\delta A_{mn}$  前系数为零, 可得  $A_{mn}$  所应满足的线代方程组

$$\sum_{m=1}^p \sum_{n=1}^q [C_{mn}^{ij} - \lambda^4 \delta_{mn}^{ij}] A_{mn} = 0 \quad \left( \begin{array}{l} i = 1, 2, 3, \dots, p \\ j = 1, 2, 3, \dots, q \end{array} \right) \quad (3.48)$$

式中

$$\lambda^4 = \omega^2 b^4 \frac{\rho h}{D} \quad (3.49 a)$$

$$\delta_{mn}^{ij} = \begin{cases} 1 & \text{若 } m=i \text{ 及 } n=j \\ 0 & \text{若 } m \neq i \text{ 或 } n \neq j \end{cases} \quad (3.49 b)$$

$$C_{mn}^{ij} = \begin{cases} \frac{b^4}{a^4} (\alpha a)^2 + 2\nu \frac{b^2}{a^2} E_{mn} F_{nn} + 2(1-\nu) \frac{b^2}{a^2} H_{mn} K_{nn} + (\alpha b)^4, & \text{若 } m=i \text{ 及 } n=j \\ \nu \frac{b^4}{a^2} [E_{mi} F_{nn} + E_{nn} F_{mi}] + 2(1-\nu) \frac{b^2}{a^2} H_{mi} K_{nn}, & \text{若 } m \neq i \text{ 或 } n \neq j \end{cases} \quad (3.49 c)$$

而

$$\begin{aligned} E_{mn} &= a \int_0^b X_m \frac{d^2 X_m}{dx^2} dx, \quad F_{nn} = b \int_0^a Y_n \frac{d^2 Y_n}{dy^2} dy \\ H_{mn} &= a \int_0^b \frac{dX_m}{dx} \frac{dX_n}{dx} dx, \quad K_{nn} = b \int_0^a \frac{dY_n}{dy} \frac{dY_n}{dy} dy \end{aligned} \quad (3.49 d)$$

$(\alpha a)_m$  及  $(\alpha b)_n$  分别为  $x$  及  $y$  方向相应边界条件梁的第  $m$  及  $n$  阶频率系数, 其值可见表 3.1, 表 3.3。式 (3.49 d) 是和梁函数有关的积分值, 可根据梁函数  $X_m(x)$  或  $Y_n(y)$  进行具体计算, 对于常用边界条件的积分值公式及前几阶数值结果可详见附录 I。

式 (3.48) 是关于  $A_{mn}$  的  $p \times q$  阶齐次线代方程组, 为求得  $A_{mn}$  的非零解, 必有其系数行列式为零, 从而给出频率方程

$$\text{Det}([C] - \lambda^4 [I]) = 0 \quad (3.50)$$

式中矩阵  $[C]$  的第  $(i, j)$  行  $(m, n)$  列元素为  $C_{mn}^{ij}$ ,  $[I]$  为单位对角矩阵。从式 (3.50) 可解得一系列频率系数  $\lambda_{ij}$  及相应固有圆频率  $\omega_{ij}$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, p, j = 1, 2, 3, \dots, q$ ), 进一步代回方程组 (3.48), 可求得相应各阶振型系数  $A_{mn}^{ij}$ , 再按式 (3.47) 求得第  $(i, j)$  阶振型

$$W_{ij}(x, y) = \sum_{m=1}^p \sum_{n=1}^q A_{mn}^{ij} X_m(x) Y_n(y) \quad (a)$$

综上所述, 对于各种边界条件矩形板, 按上面所列公式及有关数据, 均可求得固有频率及振型, 主要工作为求解特征值方程 (3.50), 这对一般计算机均特别方便, 可以做到取足

够多项数, 以保证具有一定精度。

作为一个例子, 下面将求解上面几节未曾讨论过的四边自由矩形板<sup>[157]</sup>。式 (3.47) 中  $X_m, Y_n$  均为自由-自由梁函数,  $p, q$  各取 10, 即总共为 100 项。按式 (3.50) 算得方板 ( $\nu = 0.343$ ) 头六阶频率系数及相应振型如下。

$$\lambda_1 = 3.017$$

$$W_1 = (X_2Y_2) + 0.0325(X_2Y_4 + X_4Y_2) - 0.005X_4Y_4 - 0.00257 \\ \times (X_6Y_6 + X_6Y_2) + 0.00121(X_4Y_6 + X_6Y_4) - 0.000365X_6Y_6 + \dots \quad (b\ 1)$$

$$\lambda_2 = 4.385$$

$$W_2 = (X_1Y_3 - X_3Y_1) - 0.204(X_1Y_5 - X_5Y_1) - 0.0061(X_3Y_5 - X_5Y_3) \\ + 0.00518(X_1Y_7 - X_7Y_1) + 0.00207(X_3Y_7 - X_7Y_3) + \dots \quad (b\ 2)$$

$$\lambda_3 = 4.958$$

$$W_3 = (X_1Y_3 + X_3Y_1) - 0.0449(X_3Y_3) + 0.0202(X_1Y_5 + X_5Y_1) \\ + 0.00363(X_3Y_5 + X_5Y_3) + 0.00252(X_2Y_6) - 0.00505(X_1Y_7 + X_7Y_1) \\ + \dots \quad (b\ 3)$$

$$\lambda_4 = 7.917$$

$$W_4 = (X_3Y_3) + 0.0228(X_1Y_3 + X_3Y_1) - 0.0275(X_1Y_5 + X_5Y_1) \\ + 0.0690(X_3Y_4 + X_4Y_2) - 0.00674(X_5Y_5) + 0.0054(X_1Y_7 + X_7Y_1) \\ + \dots \quad (b\ 4)$$

$$\lambda_5 = 8.267$$

$$W_5 = (X_2Y_4 - X_4Y_2) - 0.0142(X_2Y_6 - X_6Y_2) - 0.00511(X_4Y_6 - X_6Y_4) \\ + 0.00643(X_2Y_8 - X_8Y_2) + 0.00426(X_4Y_8 - X_8Y_4) + \dots \quad (b5)$$

$$\lambda_6 = 8.797$$

$$W_6 = (X_2Y_4 + X_4Y_2) - 0.0641(X_2Y_2) + 0.125(X_4Y_4) + 0.0489 \\ (X_2Y_6 + X_6Y_2) - 0.00347(X_4Y_6 + X_6Y_4) + 0.00645(X_6Y_6) + \dots \quad (b\ 6)$$

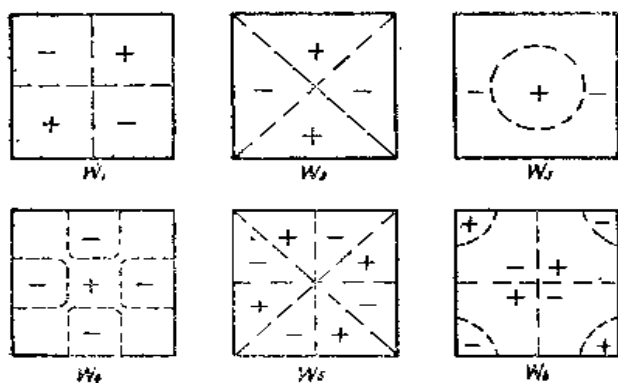


图 3.8

$$\lambda_1 = 22.33$$

$$W_1 = X_2Y_2 + 0.072X_4Y_2 + 0.024X_2Y_4 + \dots \quad (c1)$$

$$\lambda_2 = 22.93$$

$$W_2 = X_3Y_1 - 0.098X_1Y_3 - 0.011X_3Y_3 + \dots \quad (c2)$$

$$\lambda_3 = 34.76$$

按式 (b) 作出的振型节线图如图 3.8 所示。

从式 (b) 反映的各阶振型系数比值可以看出, 相应每阶振型中有一项是主要的, 而其它项占有成份就很小, 并随项的  $m, n$  数增加而越来越小。这一现象对于矩形板也是成立的。例如  $\frac{a}{b} = 1.5$  的四边自由板 ( $\nu = 0.25$ ) 有以下频率系数及相应振型结果。

$$W_3 = X_1 Y_3 + 0.085 X_3 Y_1 - 0.014 X_3 Y_3 + \dots \quad (c3)$$

$$\lambda_4 = 34.81$$

$$W_4 = X_3 Y_2 - 0.026 X_1 Y_4 + \dots \quad (c4)$$

$$\lambda_5 = 37.87$$

$$W_5 = X_4 Y_1 - 0.42 X_2 Y_3 + \dots \quad (c5)$$

但比较(b), (c)两式又发现, 对于方板, 将出现 $X_m Y_n \pm X_n Y_m (m \neq n)$ 为主的振型, 而矩形板没有这种现象, 而只是以某一项 $X_m Y_n$ 为主。对于不同边界条件板, 按上述梁函数组合法进行计算表明, 板件固有振动一般可分两类:

A类: 凡边界条件不以对角线为对称的板(包括方板、矩形板)以及边界条件以对角线为对称的矩形板(两邻边边长相差较大), 则振型以 $(X_m Y_n)$ 项为主。

B类: 凡边界条件以对角线为对称(例如, 四边固定, 四边自由, 邻边固定邻边自由板等)的方板, 将会出现以 $(X_m Y_n \pm X_n Y_m)$ 混合项为主振型, 而且对于四边边界条件均相同方板则有数值 $(m - n) = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots$ ; 对于两对邻边边界条件各自相同的方板, 则数值 $(m - n) = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ 。

### 单项组合法

考虑到多项组合法解中均有一项为主的特点, 对于用梁函数组合法解一般性边界条件薄板的固有频率与振型, 可以进一步简化, 即对于A类板, 可在振型表达式(3.47)中仅取单独一项

$$W_{mn}(x, y) = A_{mn} X_m(x) Y_n(y) \quad (3.51)$$

其中 $m, n$ 可取不同的正整数, 表示振型的不同阶次。用振型表达式(3.51)代入振型变分方程, 经过上面类似过程, 可求得频率的一次代数方程, 直接解出固有圆频率

$$\omega_{mn} = \frac{\lambda_{mn}^2}{b^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad (3.52a)$$

$$\lambda_{mn}^2 = \sqrt{(\alpha a)_m^4 \left(\frac{b}{a}\right)^4 + 2[\nu E_{mn} F_{nn} + (1-\nu) H_{mn} K_{nn}] \left(\frac{b}{a}\right)^2 + (\alpha b)_n^4} \quad (3.52b)$$

式(3.52b)中各符号意义及求法同前。式(3.52)是适用于一般性边界条件A类薄板任意阶频率的统一解析公式。这一公式对于工程应用相当简便、实用。

为了方便应用, 现将简单及弹嵌边界条件板之 $(\alpha a)_m, (\alpha b)_n, E_{mn}, F_{nn}, H_{mn}, K_{nn}$ 值分别列于表3.11及表3.12内。从表中可以看出, 对于非自由边界板有 $E_{mn} = -H_{mn}, F_{nn} = -K_{nn}$ , 因此可进一步简化为

$$\lambda_{mn}^2 = \sqrt{(\alpha a)_m^4 \left(\frac{b}{a}\right)^4 + 2E_{mn} F_{nn} \left(\frac{b}{a}\right)^2 + (\alpha b)_n^4} \quad (3.52c)$$

因而频率与 $\nu$ 无关; 而具有自由边界板则仍需按式(3.52b)计算, 所以频率与 $\nu$ 有关。据此也可建立关于 $\nu$ 变化所引起频率变化的统一修正公式:

$$\omega_{mn}(\nu_1) = \frac{\lambda_{mn}^2(\nu_1)}{\lambda_{mn}^2(\nu_0)} \times \omega_{mn}(\nu_0) \quad (3.53)$$

若已知 $\nu = \nu_0$ 的具有某边界条件板的圆频率 $\omega_{mn}(\nu_0)$ , 则可按式(3.53)推算 $\nu = \nu_1$ 的同一板的圆频率, 其中 $\lambda_{mn}^2(\nu_1), \lambda_{mn}^2(\nu_0)$ 均按式(3.52b)计算。

当然, 对于四边简支板, 式(3.52c)给出的是精确解(3.26c)。

作为例子, 这里按式(3.52)直接写出上面未曾讨论过的三边固定, 一边( $x = a$ )简支



简单边界条件板之 $(\alpha a)_m, (\alpha b)_n, E_{mn}, F_{mn}, H_{mn}, k_{mn}$ 值

表3.11

$x, y$ 向边界条件	$m, n$	$(\alpha a)_m, (\alpha b)_n$	$E_{mn}, F_{mn}$	$H_{mn}, K_{mn}$
简支—简支	1, 2, 3, ...	$m\pi$	$-m^2\pi^4$	$m^2\pi^2$
固定—简支	1	3.927	-11.15	11.15
	2	7.069	-42.89	42.89
	3, 4, 5, ...	$(m + \frac{1}{4})\pi$	$-(m + \frac{1}{4})^2\pi^2 \left[ 1 - \frac{1}{(m + \frac{1}{4})\pi} \right]$	$(m + \frac{1}{4})^2\pi^2 \left[ 1 - \frac{1}{(m + \frac{1}{4})\pi} \right]$
固定—固定	1	4.730	-12.30	12.30
	2	7.853	-46.05	46.05
	3, 4, 5, ...	$(m + \frac{1}{2})\pi$	$-(m + \frac{1}{2})^2\pi^2 \left[ 1 - \frac{2}{(m + \frac{1}{2})\pi} \right]$	$(m + \frac{1}{2})^2\pi^2 \left[ 1 - \frac{2}{(m + \frac{1}{2})\pi} \right]$
固定—自由	1	1.875	0.8582	4.648
	2	4.694	-13.29	32.42
	3, 4, 5, ...	$(m - \frac{1}{2})\pi$	$-(m - \frac{1}{2})^2\pi^2 \left[ 1 - \frac{2}{(m - \frac{1}{2})\pi} \right]$	$(m - \frac{1}{2})^2\pi^2 \left[ 1 + \frac{2}{(m - \frac{1}{2})\pi} \right]$
自由—简支	1	0	0	3
	2	3.927	-11.15	26.87
	3, 4, 5, ...	$(m - \frac{3}{4})\pi$	$-(m - \frac{3}{4})^2\pi^2 \left[ 1 - \frac{1}{(m - \frac{3}{4})\pi} \right]$	$(m - \frac{3}{4})^2\pi^2 \left[ 1 + \frac{3}{(m - \frac{3}{4})\pi} \right]$
自由—自由	1	0	0	0
	2	0	0	12
	3	4.730	-12.30	49.48
	4, 5, 6, ...	$(m - \frac{3}{2})\pi$	$-(m - \frac{3}{2})^2\pi^2 \left[ 1 - \frac{2}{(m - \frac{3}{2})\pi} \right]$	$(m - \frac{3}{2})^2\pi^2 \left[ 1 + \frac{6}{(m - \frac{3}{2})\pi} \right]$

注：凡表中有 $m$ 的地方，对于 $y$ 方向一律改为相应的 $n$ 。

### 矩形板基频系数

$$\begin{aligned}
 \lambda_{11}^2 &= \sqrt{(3.927)^4 \left(\frac{b}{a}\right)^4 + 2 \times 11.15 \times 12.30 \left(\frac{b}{a}\right)^2 + (4.730)^4} \\
 &= \sqrt{237.8 \left(\frac{b}{a}\right)^4 + 274.3 \left(\frac{b}{a}\right)^2 + 500.5} \quad (d)
 \end{aligned}$$

可算得其方板基频系数 $\lambda_{11}^2 = 31.82$ ，而由附录Ⅲ知较精确解为 $\lambda_{11}^2 = 31.83$ ，因此由式(3.52)求得的频率误差不是很大。计算表明，式(3.52)的误差对于无自由边板约为0.5%，对于具有一边自由边板约为1%，对于具有多边自由边板，则误差要稍大些，频率均偏高。

式(3.52)只适用于A类板。对于边界条件以对角线对称的方板或接近方板的矩形板 $(0.8 \leq \frac{a}{b} \leq 1.25)$ 的B类板，则用式(3.52)计算有较大误差，其原因在于上面所述振型主

弹嵌边界条件板之 $(\alpha\alpha)_m, (\alpha b)_n, E_{mm}, F_{nn}$ 值

表3.12

$K = \frac{k_4 b}{D}$	$m, n = 1$		$m, n = 2$		$m, n = 3$		$m, n = 4$		$m, n = 5$		$m, n = 6$	
	$(\alpha\alpha)_m$ $(\alpha b)_n$	$E_{mm}$ $F_{nn}$	$(\alpha\alpha)_m$ $(\alpha b)_n$	$E_{mm}$ $F_{nn}$	$(\alpha\alpha)_m$ $(\alpha b)_n$	$E_{mm}$ $F_{nn}$	$(\alpha\alpha)_m$ $(\alpha b)_n$	$E_{mm}$ $F_{nn}$	$(\alpha\alpha)_m$ $(\alpha b)_n$	$E_{mm}$ $F_{nn}$	$(\alpha\alpha)_m$ $(\alpha b)_n$	$E_{mm}$ $F_{nn}$
0	3.142	-9.870	6.283	-39.48	9.425	-88.83	12.57	-157.9	15.71	-246.7	18.85	-355.3
0.5	3.284	-9.876	6.359	-39.49	9.476	-88.83	12.61	-157.9	15.74	-246.7	18.88	-355.3
1	3.399	-9.888	6.427	-39.51	9.525	-88.84	12.64	-157.9	15.77	-246.7	18.90	-355.3
2	3.577	-9.932	6.547	-39.57	9.613	-88.87	12.71	-157.9	15.83	-246.8	18.95	-355.3
3	3.710	-9.991	6.647	-39.65	9.691	-88.93	12.78	-158.0	15.88	-246.8	19.00	-355.3
5	3.897	-10.13	6.809	-39.90	9.825	-89.10	12.89	-158.1	15.98	-246.9	19.08	-355.4
7	4.025	-10.27	6.930	-40.16	9.935	-89.25	12.99	-158.3	16.06	-247.1	19.16	-355.6
10	4.156	-10.46	7.068	-40.56	10.07	-89.72	13.11	-158.8	16.17	-247.4	19.26	-355.8
20	4.374	-10.93	7.329	-41.70	10.34	-91.12	13.38	-160.1	16.43	-248.8	19.50	-357.2
30	4.471	-11.22	7.460	-42.49	10.49	-92.35	13.53	-161.5	16.60	-250.3	19.67	-358.7
100	4.641	-11.88	7.710	-44.52	10.80	-95.80	13.89	-166.5	16.99	-256.6	20.09	-366.1
$\infty$	4.730	-12.30	7.853	-46.05	10.99	-98.90	14.14	-171.6	17.28	-264.0	20.24	-376.2

要项为 $X_m Y_n \pm X_n Y_m$ 组合项，而不再具有式(3.51)形式。因此建议对B类方板，采用简化振型形式可为

$$W_{mn}(x, y) = A_{mn} [X_m(x)Y_n(y) \pm X_n(x)Y_m(y)] \quad (3.53a)$$

对于B类（接近方板的）矩形板，可采用简化振型

$$W_{mn}(x, y) = A_{mn} X_m Y_n + B_{mn} X_n Y_m \quad (3.53b)$$

再按上而方法求得频率与振型。而实际上按式(3.52)求得的B类频率为按式(3.53b)求得两个频率的中间值。当 $\frac{a}{b}$ 远离1或 $m, n$ 值增加时，按式(3.52)和按式(3.53)计算的频率结果差别就不大了。

#### 矩形板频率系数

上面对于一般情况矩形薄板介绍了两种方法：一种较精确但计算量较大，即频率方程(3.50)及振型表达式(3.47)；另一种较简单但有一定误差，即频率算式(3.52)及振型表达式(3.51)。为了适应工程实用既方便又精确需要，现将按式(3.50)取36项计算所得21种具有不同长宽比的简单边界条件矩形板<sup>[155]</sup>的头六阶频率系数结果列于附录Ⅲ；具有不同弹嵌系数及长宽比的四边弹嵌边界条件矩形板的头六阶频率系数结果列于表3.13，可供读者使用。

### § 3.7 混合边界条件板

可以注意到，上面各节所讨论的矩形板的边界条件在每边均为一致的，即每一边为单一边界条件。在本节将要讨论在一边中具有不同边界条件组合的特殊情况，即混合边界条件板的解法<sup>[17][201]</sup>。这里主要是应用叠加法<sup>[367]</sup>求解部分固定、部分简支边界条件矩形板的固有振动，这是薄板弯曲理论中铁摩辛柯(Timoshenko)叠加法原理在动力问题中的一种推广。

设矩形板四边边界上某些局部边界为固定边, 其余则为简支边, 如图3.9所示。振型在四边均应满足位移为零条件, 而在固定段还应满足位移 (沿垂直边界方向) 的一阶导数为零的条件; 在简支段还应满足弯矩为零的条件。现以四边简支板作为基本结构, 选择其相应挠度振型函数为

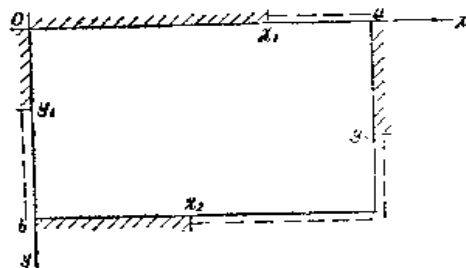


图 3.9

$$W(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (3.54)$$

显然振型函数 (3.54) 已满足四边位移为零的条件, 但尚未满足上述另一个边界条件 (在固定、简支段各不相同)。对于部分固定、部分简支板, 在这基本结构板上的边界上还作用有一定的分布弯矩其值就是根据尚未满足的另一个边界条件所确定。现将这些未知弯矩分布在各自区间内展开成付里叶级数:

$$x=0: M_x(y) = \sum_{n=1}^{\infty} E'_n \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (3.55a)$$

$$x=a: M_x(y) = \sum_{n=1}^{\infty} E''_n \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (3.55b)$$

$$y=0: M_y(x) = \sum_{m=1}^{\infty} F'_m \sin \frac{m\pi}{a} x \quad (3.55c)$$

$$y=b: M_y(x) = \sum_{m=1}^{\infty} F''_m \sin \frac{m\pi}{a} x \quad (3.55d)$$

式中  $E'_n, E''_n, F'_m, F''_m$  均为待定系数。

四边弹板板的频率系数  $\lambda$ 

表3.13

$b/a$	$K = \frac{k_d b}{D}$	阶 次					
		1	2	3	4	5	6
1.0	0	4.443	7.025	8.886	9.935	9.935	11.33
	20	5.575	8.019	9.790	10.80	10.83	12.15
	$\infty$	5.999	8.568	10.41	11.47	11.50	12.85
0.9	0	4.226	6.468	6.889	8.453	9.046	10.55
	20	5.311	7.387	7.872	9.319	9.850	11.09
	$\infty$	5.716	7.892	8.412	9.907	10.46	11.98
0.8	0	4.024	5.928	6.767	8.046	8.168	9.815
	20	5.079	6.784	7.745	8.892	8.902	10.55
	$\infty$	5.393	7.247	8.278	9.455	9.449	11.16
0.6	0	3.863	4.907	6.469	6.659	7.327	8.623
	20	4.722	5.708	7.105	7.548	8.183	9.340
	$\infty$	5.089	6.106	7.545	8.073	8.714	9.796

进一步根据计入边界弯矩做功的振型变分原理

$$\delta(U - \omega^2 T) - \int_0^b \left[ M_x(y) \delta \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right) \right]_{x=0} dy + \int_0^b \left[ M_x(y) \delta \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right) \right]_{x=a} dy \\ - \int_0^a \left[ M_y(x) \delta \left( \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right]_{y=0} dx + \int_0^a \left[ M_y(x) \delta \left( \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right]_{y=b} dx = 0 \quad (a)$$

代入式(3.54), (3.55), 进行变分运算, 并考虑到三角函数的正交性有

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ D \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2 \left( \frac{ab}{4} \right) A_{mn} - \rho h \omega^2 \left( \frac{ab}{4} \right) A_{mn} \right. \\ \left. - E'_m \left( \frac{m\pi}{a} \right) \left( \frac{a}{2} \right) + E''_m \left( \frac{m\pi}{a} \right) \left( \frac{a}{2} \right) \cos m\pi - F'_n \left( \frac{n\pi}{b} \right) \left( \frac{b}{2} \right) \right. \\ \left. + F''_n \left( \frac{n\pi}{b} \right) \left( \frac{b}{2} \right) \cos n\pi \right\} \delta A_{mn} = 0 \quad (b)$$

从而可得在边界弯矩作用下四边简支板挠度振型解(3.54), 其中系数值

$$A_{mn} = \frac{\frac{2\pi}{abD} [mE'_m + (-1)^{m+1}mE''_m + nF'_n + (-1)^{n+1}nF''_n]}{\left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2 - \frac{\rho h}{D} \omega^2} \quad (3.56)$$

下面将进一步根据另一个边界条件以确定 $E'_m, E''_m, F'_n, F''_n$ 所应满足的方程。对于 $x=0$ 边, 在 $0 < y < y_1$ 段为固定, 有 $\frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$ , 因此将式(3.54)代入并在 $0 < y < y_1$ 区间内展开成付里叶级数

$$\frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{x=0} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left( \frac{m\pi}{a} \right) \sin \frac{n\pi}{b} y = \sum_{n_1=1}^{\infty} B_{n_1} \sin \frac{n_1\pi}{y_1} y = 0 \quad (c)$$

从而有

$$\frac{y_1}{2} B_{n_1} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{y_1} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{m\pi}{a} \right) A_{mn} \right] \sin \frac{n\pi}{b} y \sin \frac{n_1\pi}{y_1} y dy = 0 \quad (3.57a) \\ (n_1=1, 2, 3, \dots)$$

类似对于 $x=a$ 边的 $0 < y < y_2$ 段,  $y=0$ 边的 $0 < x < x_1$ 段,  $y=b$ 边的 $0 < x < x_2$ 段的固定边界条件也可推得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{y_2} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left( \frac{m\pi}{a} \right) A_{mn} \right] \sin \frac{n\pi}{b} y \sin \frac{n_2\pi}{y_2} y dy = 0 \quad (3.57b) \\ (n_2=1, 2, 3, \dots)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{x_1} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n\pi}{b} \right) A_{mn} \right] \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{m_1\pi}{x_1} x dx = 0 \quad (3.57c) \\ (m_1=1, 2, 3, \dots)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{x_2} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{n\pi}{b} \right) A_{mn} \right] \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{m_2\pi}{x_2} x dx = 0 \quad (3.57d) \\ (m_2=1, 2, 3, \dots)$$

对于 $x=0$ 边, 在 $y_1 < y < b$ 段为简支, 有 $M_x \Big|_{x=0} = 0$ , 因此将式(3.55a)在 $y_1 < y < b$ 区间内展开成付里叶级数

$$M_x|_{x=0} = \sum_{n=1}^{\infty} E'_n \sin \frac{n\pi}{b} y = \sum_{n_1=1}^{\infty} C_{n_1} \sin \frac{n_1\pi}{(b-y_1)} (y-y_1) = 0 \quad (d)$$

从而有

$$\frac{(b-y_1)}{2} C_{n_1} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{y_1}^b E'_n \sin \frac{n\pi}{b} y \sin \frac{n_1\pi}{(b-y_1)} (y-y_1) dy = 0 \quad (3.58a)$$

( $n_1=1, 2, 3, \dots$ )

类似对于  $x=a$  边的  $y_2 < y < b$  段,  $y=0$  边的  $x_1 < x < a$  段,  $y=b$  边的  $x_2 < x < a$  段的简支边界条件也可推得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{y_2}^b E''_n \sin \frac{n\pi}{b} y \sin \frac{n_2\pi}{(b-y_2)} (y-y_2) dy = 0 \quad (n_2=1, 2, 3, \dots) \quad (3.58b)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \int_{x_1}^a F'_m \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{m_1\pi}{(a-x_1)} (x-x_1) dx = 0 \quad (m_1=1, 2, 3, \dots) \quad (3.58c)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \int_{x_2}^a F''_m \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{m_2\pi}{(a-x_2)} (x-x_2) dx = 0 \quad (m_2=1, 2, 3, \dots) \quad (3.58d)$$

将  $A_{mn}$  的解 (3.56) 代入 (3.57) 与 (3.58) 联立之, 即可建立关于  $E'_n$ ,  $E''_n$ ,  $F'_m$ ,  $F''_m$  的联立齐次线代方程组。由其系数行列式为零, 即可确立混合边界矩形板的频率方程, 从而求得各阶频率及相应振型系数, 再代回式

(3.56), (3.54), 即可求得相应振型。作为例子, 下面就二类混合边界方板的固有振动问题求取有关结果。

**中部局部固定的简支方板** 对于边界中部局部固定的简支板, 可利用其对称性简化计算。现以两对边中部局部固定, 另两对边无固定段的简支方板 (图3.10) 为例来加以说明。

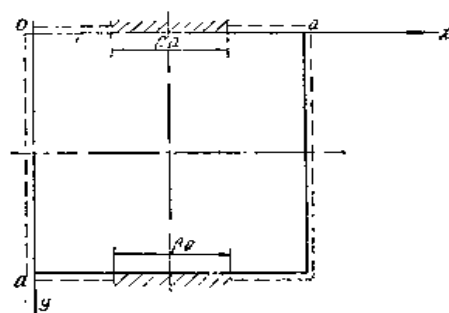


图 3.10

设方板的  $y=0$  及  $y=a$  两边中部均有  $\beta a$  长一段的固定边, 而其它边界段皆为简支。在这种情况下有  $E'_n = E''_n = 0$ ,  $F'_m = F''_m$ , 并以  $x = \frac{a}{2}$ ,  $y = \frac{a}{2}$  双轴对称, 所以  $m, n$  均只取奇数即可。

由式(3.56), (3.57c), (3.58c)可得基本算式

$$A_{mn} = \frac{4\pi a^2}{D} \left( \frac{n}{(m^2 + n^2)^2 \pi^4 - \lambda^4} \right) F'_m \quad (3.59a)$$

$$\sum_{n=1,3,5}^{\infty} \int_{(1-\beta)\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left[ \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \left( \frac{n\pi}{a} \right) A_{mn} \right] \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{m_1\pi}{\beta \frac{a}{2}} \left( x - \frac{a}{2} + \frac{\beta a}{2} \right) dx = 0 \quad (3.59b)$$

$$\sum_{m=1,3,5}^{\infty} \int_0^{(1-\beta)\frac{a}{2}} F'_m \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{m_1\pi}{(1-\beta)\frac{a}{2}} x dx = 0 \quad (3.59c)$$

( $m_1=1, 3, 5, \dots$ )

式中  $\lambda$  为无量纲频率系数, 可参见式 (3.26b)。将式 (3.59a) 及式 (3.59b) 消去  $A_{mn}$ ,

有

$$\sum_{m=1,3,5}^{\infty} \int_{(1-\beta)\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} F'_m \left( \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{4\pi^2 a}{D} \times \frac{n^2}{(m^2+n^2)^2 \pi^4 - \lambda^4} \right) \cdot \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{m_1 \pi}{\beta \frac{a}{2}} \left( x - \frac{a}{2} + \frac{\beta a}{2} \right) dx = 0 \quad (3.59d)$$

$$(m_1=1,3,5,\dots)$$

式(3.59c), (3.59d)为关于 $F'_m$ 的齐次线代方程组, 即可求解固有频率。例如,  $\beta = \frac{1}{2}$ , 取 $m=1, 3, 5, 7$ ,  $m_1=1, 3$ 可得四阶齐次线代方程组, 求得基频系数近似解 $\lambda_1^{(1)} \approx 5.313$ ; 取 $m=1, 3, 5, 7, 9, 11$ ,  $m_1=1, 3, 5$ , 可得六阶齐次线代方程组, 求得基频系数近似解 $\lambda_1^{(2)} \approx 5.318$ 。

按上述方法可以求得各种不同情况下中部局部固定的简支方板的基频系数, 现列于表3.14。

边界中部局部固定的简支方板的基频系数 $\lambda_1$ 

表3.14

具有固定段边界数 \ $\beta$	0	1/3	1/2	2/3	1
四边	4.443	5.822	5.958	5.983	5.999
对边	4.443	5.206	5.320	5.367	5.381
一边	4.443	4.796	4.831	4.858	4.863

**端部局部固定的简支方板** 对于边界一端局部固定的简支板, 也可利用局部对称性简化计算。现以两对边端部局部固定, 另两对边无固定段的简支方板(图3.11)为例来加以说明。

设方板的 $y=0$ 及 $y=a$ 两边一端均有 $\beta a$ 长一段固定, 而其它边界段皆为简支。在这种情况下也有 $E'_x = E''_x = 0$ ,  $F'_m = F''_m$ , 但只以 $y = \frac{a}{2}$ 轴对称, 所以按 $m$ 取正整数,  $n$ 取奇数计算。

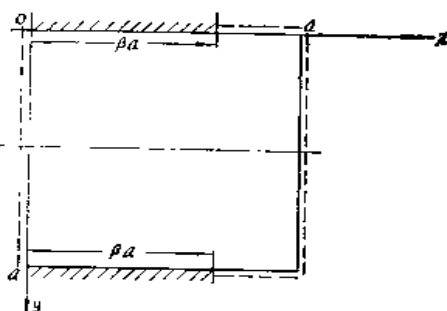


图 3.11

这时, 式(3.59a)仍成立。进一步按式(3.57c), (3.58c), 并代入式(3.59a), 可得基本算式:

$$\sum_{m=1,2,3}^{\infty} \int_0^{\beta a} F'_m \left( \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{4\pi^2 a}{D} \times \frac{n^2}{(m^2+n^2)^2 \pi^4 - \lambda^4} \right) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{m_1 \pi}{\beta a} x dx = 0 \quad (m_1=1,2,3,\dots) \quad (3.60a)$$

$$\sum_{m=1,2,3}^{\infty} \int_{\beta a}^a F'_m \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{m_1 \pi}{(1-\beta)a} (x - \beta a) dx = 0 \quad (m_1=1,2,3,\dots) \quad (3.60b)$$

同样可求取各阶固有频率。例如,  $\beta = \frac{1}{2}$ , 取 $m=1, 2, 3, 4$ ,  $m_1=1, 2$ , 可求得基频系数近似解 $\lambda_1^{(1)} \approx 5.032$ ; 取 $m=1, 2, 3, 4, 5, 6$ ,  $m_1=1, 2, 3$ , 可求得基频系数近似解 $\lambda_1^{(2)} \approx 5.046$ 。

按上述方法，可以求得各种不同情况下端部局部固定的简支方板的基频系数，列于表 3.15。

边界端部局部固定的简支方板的基频系数  $\lambda_1$ 

表 3.15

$\beta$ 具有固定段边界数	0	1/3	1/2	2/3	1
对边	4.143	4.712	5.049	5.273	5.381
一边	4.143	4.593	4.733	4.827	4.863

从上述有关数据可以看到，随固定段长度、固定边界数增加，频率将提高，在同样固定段长度及固定边界数情况下，中部固定将比端部固定频率高；当然当整个边界全为固定或简支情况下，频率值就变为前面几节简单边界条件板的解。

### § 3.8 具有附加质量、刚度、支承的板

在工程中经常遇到在板的内部或边界的局部或点上附加有质量、弹簧刚度、固定支承情况，其中质量包括移动或转动质量[46][58][87][229]；刚度包括抗线位移或抗角位移弹簧刚度；支承包括移动或转动约束支座[55][56][122][134][217]等情况。由于这类板件的具体情况相当复杂，故本节只能介绍一些典型问题的基本处理原则与方法，详细过程读者可结合具体对象以及前面各节的基本知识加以灵活运用。

处理具有各种附加条件板的方法可分为两大类：一是将附加条件作为边界条件处理[153][90]；二是将附加条件作为内部附加等效载荷处理[329]。下面将依次分别加以叙述。

#### 一、内部点质量

对边 ( $x=0, x=a$ ) 简支，对边其它边界条件的矩形板的内部位于  $(\xi, \eta)$  处有一集中质量  $M$  (图 3.12)。现经  $(\xi, \eta)$  点作一垂直简支边界的直线  $y=\eta$ ，将板分成两块： $0 \leq y \leq \eta$  及  $\eta \leq y \leq b$ 。而这两块板仍具有一对边简支的边界条件，只是在交界边界处具有附加质量  $M$ 。对两块分板的每一块，按 § 3.3 方法，其挠度振型分别可写为

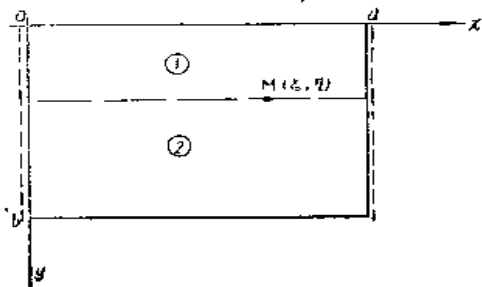


图 3.12

$$W^{(1)}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} [A_m^{(1)} \sin \beta_{1m} y + B_m^{(1)} \cos \beta_{1m} y + C_m^{(1)} \operatorname{sh} \beta_{2m} y + D_m^{(1)} \operatorname{ch} \beta_{2m} y] \times \sin \frac{m\pi}{a} x \quad (0 \leq y \leq \eta) \quad (3.61a)$$

$$W^{(2)}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} [A_m^{(2)} \sin \beta_{1m} y + B_m^{(2)} \cos \beta_{1m} y + C_m^{(2)} \operatorname{sh} \beta_{2m} y + D_m^{(2)} \operatorname{ch} \beta_{2m} y] \times \sin \frac{m\pi}{a} x \quad (\eta \leq y \leq b) \quad (3.61b)$$

式中  $\beta_{1m}, \beta_{2m}$  是与频率有关的系数，见式 (3.30b)，其中八组待定常数  $A_m^{(1)}, B_m^{(1)}, C_m^{(1)},$

$D_m^{(1)}, A_m^{(2)}, B_m^{(2)}, C_m^{(2)}, D_m^{(2)}$  将取决于  $y=0, y=b$  两边原有四个边界条件及  $y=\eta$  上四个连续条件:

$$W^{(1)}|_{y=\eta} = W^{(2)}|_{y=\eta} \quad (3.62a)$$

$$\frac{\partial W^{(1)}}{\partial y}|_{y=\eta} = \frac{\partial W^{(2)}}{\partial y}|_{y=\eta} \quad (3.62b)$$

$$M_y^{(1)}|_{y=\eta} = M_y^{(2)}|_{y=\eta} \quad (3.62c)$$

$$Q_y^{(1)}|_{y=\eta} - M\omega^2 W^{(1)}(\xi, \eta)\delta(x-\xi) = Q_y^{(2)}|_{y=\eta} \quad (3.62d)$$

式中  $\delta(x-\xi)$  为单位脉冲函数, 又称狄雷克(Dirac)-德尔塔(Delta)函数。它在  $x=\xi$  处为无穷, 在  $x \neq \xi$  处为零, 沿全  $x$  轴的积分值为 1, 详见附录 IV。根据上述八个边界与连续条件, 很容易建立八组系数所应满足的齐次线代方程组, 只要注意  $\delta$  函数的付里叶级数展开式为

$$\delta(x-\xi) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{a} \xi \sin \frac{n\pi}{a} x \quad (3.63)$$

进一步由系数行列式为零, 可建立具有内部附加质量的板的频率方程。下面用两个例子来进行具体分析。

**中心具有附加集中质量的四边简支方板** 根据  $y=0$  为简支边界条件, 有  $B_m^{(1)} = D_m^{(1)} = 0$ , 对于  $y=b$  为简支边界条件尚有

$$W^{(2)}|_{y=b} = \frac{\partial^2 W^{(2)}}{\partial y^2}|_{y=b} = 0 \quad (a)$$

和式 (3.62a) 一式 (3.62b) 四个条件一起, 可建立关于  $A_m^{(1)}, C_m^{(1)}, A_m^{(2)}, B_m^{(2)}, C_m^{(2)}, D_m^{(2)}$  的齐次线代方程组, 从而求得频率方程

$$1 - \frac{\xi \lambda^2}{2} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \left( \frac{\operatorname{th} \frac{1}{2} \sqrt{m^2 \pi^2 - \lambda^2}}{\sqrt{m^2 \pi^2 - \lambda^2}} - \frac{\operatorname{th} \frac{1}{2} \sqrt{m^2 \pi^2 + \lambda^2}}{\sqrt{m^2 \pi^2 + \lambda^2}} \right) = 0 \quad (3.64a)$$

相应振型为

$$W_m(x, y) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left\{ \frac{\operatorname{sh} \sqrt{m^2 \pi^2 - \lambda^2} \frac{y}{a}}{\sqrt{m^2 \pi^2 - \lambda^2} \operatorname{ch} \frac{1}{2} \sqrt{m^2 \pi^2 - \lambda^2}} - \frac{\operatorname{sh} \sqrt{m^2 \pi^2 + \lambda^2} \frac{y}{a}}{\sqrt{m^2 \pi^2 + \lambda^2} \operatorname{ch} \frac{1}{2} \sqrt{m^2 \pi^2 + \lambda^2}} \right\} \sin \frac{n\pi}{a} x \quad (3.64b)$$

式中  $\lambda$  为频率方程 (3.64a) 的各阶特征根, 而相对质量

$$\xi = \frac{M}{M_0} = \frac{M}{\rho h a^2} \quad (3.64c)$$

频率系数

$$\lambda^2 = \omega a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \quad (3.64d)$$

由于附加质量位于四边简支板的中心, 因此对于原四边简支板  $x$  或  $y$  方向为偶数半波 ( $m$  或  $n=2, 4, 6, \dots$ ) 的频率将没有影响。式 (3.64a) 求得各阶频率系数  $\lambda$ , 将对应于  $x$  及  $y$  方向均为对称的振型 ( $m, n=1, 3, 5, \dots$ )。由式 (3.64a) 求得的对不同相对质量  $\xi$  及不同阶次 ( $m, n$ ) 的频率系数值见表 3.16。



中心具有附加集中质量的四边简支方板的频率系数  $\lambda_{mn}$ 

表3.16

$\xi = \frac{M}{M_0}$	0	0.1	0.5	1	5	$\infty$
$\lambda_{11}$	4.443	4.046	3.378	2.897	2.010	0
$\lambda_{13}$	9.936	8.626	7.695	7.460	7.270	7.222
$\lambda_{33}$	13.32	12.57	12.21	12.17	12.12	12.10

四边简支方板中心有无质量的频率比

表3.17

$\xi = \frac{M}{M_0}$	0	0.1	0.5	1	5	$\infty$
$\omega_{11}/\omega_{11}^{(0)}$	1	0.8293	0.5780	0.4251	0.2047	0
$\omega_{13}/\omega_{13}^{(0)}$	1	0.7532	0.5998	0.5633	0.5354	0.5283
$\omega_{33}/\omega_{33}^{(0)}$	1	0.8897	0.8391	0.8332	0.8262	0.8244

为了更好地了解附加质量对板件固有频率效应，表3.17列出了不同相对附加质量情况下各阶频率  $\omega_{mn}$  与无附加质量的原四简方板频率  $\omega_{mn}^{(0)}$  之比值。从表中可以清楚看出下列几点：随着附加质量增加，板的频率逐渐下降；对于基频（ $x, y$  向均为一个半波），当附加质量无限增加时，结构将不再振动，而对于其它频率，附加质量无限增加时，频率降低，趋于定值；附加质量影响对基频最为显著，一般来说，随阶次提高，附加质量影响将会减小；对于阶次很高的频率，不是很大的附加质量的影响可以忽略不计。从表中也可看出，具有10%原板质量的附加质量时基频即下降17%，因此一般工程中附加质量为原板质量百分之几时即应考虑其对频率效应。

具有四个对称分布集中质量的四边简支方板 利用上述原理，同样能处理具有多个集中质量的板件固有振动问题。例如，上述四边简支方板具有四个集中质量，对称分布在四角区。这时可以将板分成三块分板建立十二个边界条件方程，求解十二组未知系数。而在剪力连续条件（3.62d）中将应引入相应两个质量不同位置的两个  $\delta$  函数。至于其它过程完全类似。

例如，对于四个集中质量相等，每个质量位于离板顶角在  $x$  与  $y$  方向距各为  $\frac{a}{4}$  的四边简支方板的相应一个方向对称，另一方向反对称振型的频率方程为<sup>[87]</sup>

$$1 - \frac{\xi \lambda^2}{2} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \left( \frac{\operatorname{th} \frac{1}{4} \sqrt{m^2 \pi^2 - \lambda^2}}{\sqrt{m^2 \pi^2 - \lambda^2}} - \frac{\operatorname{th} \frac{1}{4} \sqrt{m^2 \pi^2 + \lambda^2}}{\sqrt{m^2 \pi^2 + \lambda^2}} \right) = 0 \quad (3.65)$$

## 二、内部点刚度

对于矩形板内部有一附加横向刚度情况，同样可以采取上面具有附加集中质量类似办法进行分析。若集中刚度  $R$  位于  $(\xi, \eta)$  处（图3.12），仍可将板沿  $y = \eta$  分成二部分，分别取用挠度振型（3.61a）及（3.61b），只是  $y = \eta$  上的四个连续条件中式（3.62d）发生改变，在点刚度情况下应为

$$Q_y^{(1)}|_{y=\eta} + k W^{(1)}(\xi, \eta) \delta(x - \xi) = Q_y^{(2)}|_{y=\eta} \quad (3.66)$$

同样用条件（3.66）和式（3.62a），（3.62b），（3.62c）以及  $y = 0$ ， $y = b$  两边的四个边界条件一起来决定式（3.61）中八组待定系数及相应频率方程和振型。

对比式 (3.66) 和式 (3.62d) 可以发现, 对于附加点刚度, 相当于有附加等效质量

$$\tilde{M} = -\frac{k}{\omega^2} \quad (3.67)$$

由于求解点刚度问题的其它方程均不发生变化, 因此在所有求解点质量问题中所得频率方程结果中的集中质量值用式 (3.67) 代替, 即可给出相应矩形板附加点刚度问题结果。

另外还应指出, 当板上一点同时附加集中质量  $M$  和刚度  $k$  时, 则可用  $\tilde{M} = M - \frac{k}{\omega^2}$  值代替原有集中质量值进行计算。这时当频率为  $\omega = \sqrt{\frac{k}{M}}$  时, 附加质量-弹簧系统和板的振动不再耦合。当  $k \rightarrow \infty$  时, 其解也可作为点刚性支承结果。

### 三、内部点支承

一对边简支矩形板 (图3.12), 内部位于  $(\xi, \eta)$  处有一横向刚性支承, 但允许自由转动。在固有振动过程中,  $(\xi, \eta)$  处存在一未知反力振型  $P$ 。采用解决内部点质量同样处理方法, 可得解 (3.61a) 及 (3.61b) 和  $y = \eta$  处连续条件, 式 (3.62a), (3.62b), (3.62c) 及

$$Q_y^{(1)}|_{y=\eta} + P\delta(x-\xi) = Q_y^{(2)}|_{y=\eta} \quad (3.68)$$

连同  $y = 0$ ,  $y = b$  两边四个边界条件, 可以确定解 (3.61) 中八组待定系数的联立代数方程组。注意到连续条件 (3.68) 中载荷项不再含  $W$  因子, 所以此代数方程组是非齐次的, 非齐次项包含未知的  $P$ 。借助式 (3.63), 可以解得

$$\left. \begin{aligned} A_m^{(1)} &= P\bar{A}_m^{(1)}, & B_m^{(1)} &= P\bar{B}_m^{(1)}, & C_m^{(1)} &= P\bar{C}_m^{(1)}, & D_m^{(1)} &= P\bar{D}_m^{(1)} \\ A_m^{(2)} &= P\bar{A}_m^{(2)}, & B_m^{(2)} &= P\bar{B}_m^{(2)}, & C_m^{(2)} &= P\bar{C}_m^{(2)}, & D_m^{(2)} &= P\bar{D}_m^{(2)} \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

将这些解代回式 (3.61), 可以给出具有  $P$  乘子的  $W(x, y)$  表达式, 进一步求取  $(\xi, \eta)$  处挠度振型, 该处的挠度应为零, 从而给出

$$\begin{aligned} W(\xi, \eta) &= W^{(1)}(\xi, \eta) = W^{(2)}(\xi, \eta) \\ &= P \sum_{m=1}^{\infty} [\bar{A}_m^{(1)} \sin \beta_{1m} \eta + \bar{B}_m^{(1)} \cos \beta_{1m} \eta \\ &\quad + \bar{C}_m^{(1)} \operatorname{sh} \beta_{2m} \eta + \bar{D}_m^{(1)} \operatorname{ch} \beta_{2m} \eta] \sin \frac{m\pi}{a} \xi = 0 \end{aligned} \quad (c)$$

由于  $P$  不恒为零, 从而可得方程

$$\begin{aligned} &\sum_{m=1}^{\infty} [\bar{A}_m^{(1)} \sin \beta_{1m} \eta + \bar{B}_m^{(1)} \cos \beta_{1m} \eta + \bar{C}_m^{(1)} \operatorname{sh} \beta_{2m} \eta \\ &\quad + \bar{D}_m^{(1)} \operatorname{ch} \beta_{2m} \eta] \sin \frac{m\pi}{a} \xi = 0 \end{aligned} \quad (3.69)$$

从上述求解过程可知, 系数  $\bar{A}_m^{(1)}$ ,  $\bar{B}_m^{(1)}$ ,  $\bar{C}_m^{(1)}$ ,  $\bar{D}_m^{(1)}$  和  $\beta_{1m}$ ,  $\beta_{2m}$  有关, 再根据式 (3.30b), (3.4b) 知, 它们均是固有频率  $\omega$  的函数, 因此式 (3.69) 即为该板的频率方程。

**内部点支承的四边简支矩形板** 根据简支边界条件有  $\bar{B}_m^{(1)} = \bar{D}_m^{(1)} = 0$ , 则频率方程 (3.69) 具有下列表达式 (若  $\alpha^2 > \frac{m^2 \pi^2}{a^2}$ ):

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{\sin \beta_{1m} \eta \cdot \sin \beta_{1m} (b - \eta)}{\beta_{1m} \sin \beta_{1m} b} - \frac{\operatorname{sh} \beta_{2m} \eta \cdot \operatorname{sh} \beta_{2m} (b - \eta)}{\beta_{2m} \operatorname{sh} \beta_{2m} b} \right] \frac{\sin^2 \frac{m\pi}{a} \xi}{(\beta_{1m}^2 + \beta_{2m}^2)} = 0 \quad (3.70)$$

从而解得各阶固有频率及固有振型。按此式求得的中心支承的具有不同长宽比的四边简支矩形板的基频系数值列于表3.18；按此式求得的在一对称轴某点支承的四边简支方板的基频系数值列于表3.19，而  $\omega_1 = \frac{\lambda_1^2}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}}$ 。显然，由于内部点支承，板的固有频率增加很多。

中心点支承的四边简支矩形板的基频系数  $\lambda_1$ 

表3.18

$b/a$	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$\lambda_1$	9.545	7.255	6.702	4.775	4.244	3.924

在对称轴上一点支承的四边简支方板的基频系数  $\lambda_1$ 

表3.19

$\xi/a$	0	0.125	0.25	0.375	0.5
$\lambda_1$	4.443	5.050	5.511	6.237	7.255

#### 四、对角线支承

对角线支承的对边简支矩形板（图3.13）可根据上面点支承结果进一步推广求取。由于对角线固定，则在固有振动时其上作用有一定分布反力，反力振型可展开成付里叶级数

$$P(s) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sin n\pi s \quad (3.71)$$

式中， $p_n$ 为付里叶系数是未知的， $s$ 为由角点起算的沿对角线相对坐标

$$s = \frac{\xi}{a} = \frac{\eta}{b} \quad (3.72a)$$

现考虑其中第  $n$  项反力分布引起对角线相对坐标

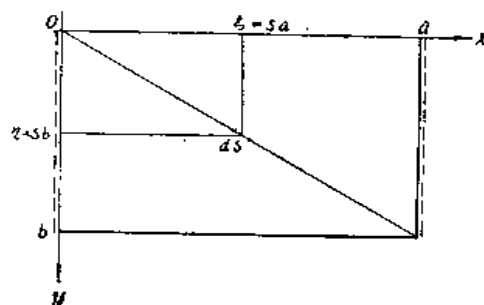


图 3.13

$$u = \frac{x}{a} = \frac{y}{b} \quad (3.72b)$$

处挠曲振型可用  $(p_n \sin n\pi s) ds$  作为集中力面引起挠曲沿全对角线积分面成，参考本节式 (c)，即有

$$W_n(u) = \int_0^1 p_n \sin n\pi s \sum_{m=1}^{\infty} [\overline{A}_m^{(i)}(s) \sin \beta_{1m} b u + \overline{B}_m^{(i)}(s) \cos \beta_{1m} b u + \overline{C}_m^{(i)}(s) \operatorname{sh} \beta_{2m} b u + \overline{D}_m^{(i)}(s) \operatorname{ch} \beta_{2m} b u] \sin m\pi u ds \quad (3.73a)$$

式中

$$i = \begin{cases} 1 & u \leq s \\ 2 & u > s \end{cases} \quad (3.73b)$$

$\bar{A}_n^{(1)}, \bar{B}_n^{(1)}, \bar{C}_n^{(1)}, \bar{D}_n^{(1)}$  与  $p_n$  关系在上面一小节已知。面对角线上位移

$$W(u) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(u) \quad (3.73c)$$

将  $W(u)$  沿对角线展开成付里叶系数。鉴于  $W(u)$  在对角线上处处为零, 因此有其付里叶系数

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} W_n(u) \sin k\pi u du = 0 \quad (k=1, 2, 3, \dots) \quad (3.74)$$

在式 (3.74) 中代入式 (3.73a), 取  $k$  为不同值, 即可建立关于未知  $p_n$  的齐次线性方程组, 则由其系数行列式为零建立频率方程。当然实际计算中  $n$  及  $k$  均取有限项。

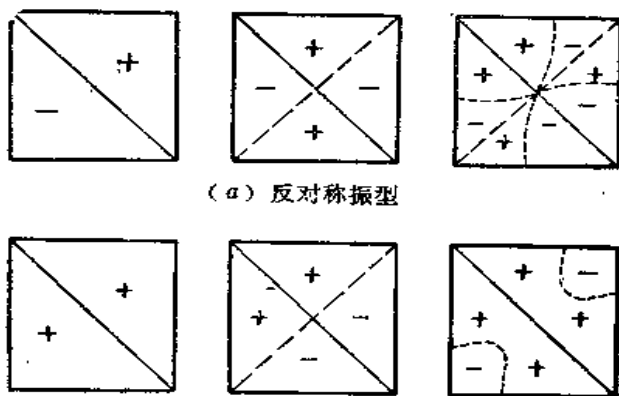
对角线支承的四边简支矩形板的频率系数

表3.20

$b/a$		1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
反对称振型	$\lambda_{0,1}$	7.025	6.011	5.606	5.359	5.175
	$\lambda_{0,2}$	11.01	8.472	7.158	6.548	6.194
	$\lambda_{0,3}$	15.14	9.749	8.988	8.062	7.309
对称振型	$\lambda_{1,1}$	8.112	6.580	5.827	5.434	5.198
	$\lambda_{1,2}$	9.935	8.645	7.834	7.030	6.476
	$\lambda_{1,3}$	12.43	10.28	9.034	8.467	7.851

对角线支承的四边简支矩形板<sup>[90]</sup> 根据  $y=0, y=b$  边简支条件按上述公式取14项, 求得的前三阶反对称频率系数  $\lambda_{0,k}$  及前三阶对称频率系数  $\lambda_{1,k} (k=1, 2, 3)$  列于表3.20, 其方板的相应振型见图3.14。

这里应该指出有趣的一点是, 从图3.14可以看出, 在对角线支承的四边简支方板情况下, 反对称第一阶振型相当于对角线无支承的四边简支方板第二阶振型 (详见 §3.2), 因此两者频率系数也是一样的 (可比较表3.20和表3.4结果); 同样, 对角线支承四边简支方板的对称第二阶振型与频率和对角线无支承的四边简支方板第四阶振型与频率是一致的。



(a) 反对称振型

(b) 对称振型

图 3.14

### 五、边界附加质量、刚度

若对边简支板 (图3.15) 的另二对边中一边上某点附有集中质量  $M$ 、横向刚度  $k_m$  (对于自由边) 或集中转动惯量  $J$ 、转动刚度  $k_r$  (对于自由、简支边), 则可以将这些条件反映在边界条件中进行求解。

这类问题的挠度振型基本解仍有 §3.3 所述形式:

$$W(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} [A_m \sin \beta_{1m} y + B_m \cos \beta_{1m} y + C_m \sinh \beta_{2m} y + D_m \cosh \beta_{2m} y]$$

$$+ D_m \operatorname{ch} \beta_{2m} y] \sin \frac{m\pi}{a} x \quad (3.75)$$

该解在全板域都成立。其中四组系数  $A_m$ ,  $B_m$ ,  $C_m$ ,  $D_m$  由计入上述附加质量、刚度的另两对边四个边界条件确定。例如, 附加质量、刚度落在  $y=0$  边界上  $(\xi, 0)$  处, 则该边具有下列边界条件算式:

$$Q_y|_{y=0} = (k_m - M\omega^2)W(\xi, 0)\delta(x - \xi) \quad (3.76a)$$

$$M_y|_{y=0} = (J\omega^2 - k_\theta) \frac{\partial W}{\partial y}(\xi, 0)\delta(x - \xi) \quad (3.76b)$$

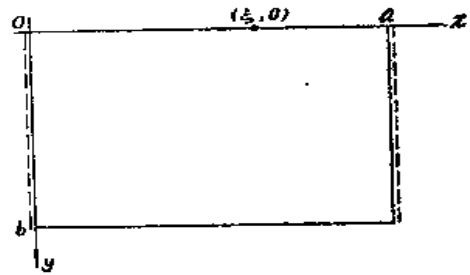


图 3.15

将  $\delta(x - \xi)$  的付里叶展开式 (3.63) 及  $W(x, y)$  表达式 (3.75) 代入式 (3.76), 并注意到  $Q_y$ ,  $M_y$  表达式 (2.6), (2.9), 则可和  $y=b$  两个边界条件一起, 建立起四阶齐次联立方程组, 从而求得频率方程和相应固有频率、振型。

将处理内部点支承的同样方法应用到上述诸方程中也同样可以求解边界具有附加横向约束支座或转动约束支座的矩形板自由振动分析中去。

## 六、等效外荷法

与上述各小节不同, 在本小节中将介绍视附加质量、刚度、支承为附加外载来进行求解的方法, 而板的原有边界条件不发生变化。

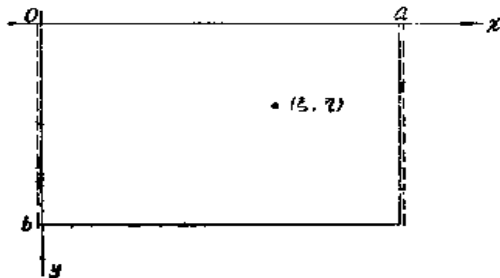


图 3.16

设对边简支矩形板(图3.16)内部  $(\xi, \eta)$  处有一集中质量或横向刚度或横向约束支座或者有一集中转动惯量或转动刚度或转动约束支座。现就各种不同情况分别叙述其求解方法。

### 1. 横向约束支座

板在  $(\xi, \eta)$  点具有横向固定约束, 则相当在支承点有一集中反力作用在板面  $(\xi, \eta)$  上。设在固有振动时该反力振型为  $P$ , 则挠度振型满足方程

$$\nabla^2 \nabla^2 W - \alpha^4 W = -\frac{P}{D} \delta(x - \xi) \delta(y - \eta) \quad (3.77)$$

其中  $\alpha^4$  由式 (3.4b) 所定义。设方程解为

$$W(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} [Y_m(y) + \Phi_m(y)] \sin \frac{m\pi}{a} x \quad (3.78)$$

其中第一部分为式 (3.77) 相应齐次方程在满足  $x=0$ ,  $x=a$  两边简支条件下的一般解, 根据 §3.3 具有解 (3.31) 的形式 (若  $\alpha^2 > (\frac{m\pi}{a})^2$ ), 现改写为

$$Y_m(y) = a_m Y_{1m}(y) + b_m Y_{2m}(y) + c_m Y_{3m}(y) + d_m Y_{4m}(y) \quad (3.79)$$

式中

$$Y_{1m}(y) = \frac{1}{2\alpha^2} (\beta_{2m}^2 \cos \beta_{1m} y + \beta_{1m}^2 \operatorname{ch} \beta_{2m} y) \quad (3.80 a)$$

$$Y_{2m}(y) = \frac{1}{2\alpha^2 \alpha} \left( \frac{\beta_{2m}^2}{\beta_{1m}} \sin \beta_{1m} y + \frac{\beta_{1m}^2}{\beta_{2m}} \operatorname{sh} \beta_{2m} y \right) \quad (3.80 b)$$

$$Y_{3m}(y) = \frac{1}{2\alpha^2 \alpha^2} (\operatorname{ch} \beta_{2m} y - \cos \beta_{1m} y) \quad (3.80 c)$$

$$Y_{4m}(y) = \frac{1}{2\alpha^2 \alpha^3} \left( \frac{1}{\beta_{2m}} \operatorname{sh} \beta_{2m} y - \frac{1}{\beta_{1m}} \sin \beta_{1m} y \right) \quad (3.80 d)$$

按式 (3.30 b) 有

$$\beta_{1m} = \sqrt{\alpha^2 - \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2}, \quad \beta_{2m} = \sqrt{\alpha^2 + \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2} \quad (3.81)$$

以上各式及其对  $y$  的导数满足在  $y = 0$  处条件:

$$Y_{m(r-1)}^{(r-1)}(0) = \begin{cases} 0 & r \neq i \\ 1 & r = i \end{cases} \quad (i, r = 1, 2, 3, 4) \quad (3.82)$$

式中记号  $(r-1)$  代表函数对  $y$  求  $(r-1)$  阶导数。

式 (3.78) 中第二部分为方程 (3.77) 的特解, 根据  $\delta(x-\xi)$  的付里叶展开式 (3.63), 可知  $\Phi_m(y)$  应满足微分方程

$$\begin{aligned} \Phi_m''''(y) - 2\frac{m^2\pi^2}{a^2}\Phi_m''(y) + \left(\frac{m^4\pi^4}{a^4} - \alpha^4\right)\Phi_m(y) \\ = -\frac{2P}{aD} \sin \frac{m\pi}{a} \xi \cdot \delta(y-\eta) \end{aligned} \quad (d)$$

用拉普拉斯 (Laplace) 积分变换方法<sup>[329]</sup> 可求得该方程特解

$$\Phi_m(y) = \begin{cases} 0 & 0 \leq y \leq \eta \\ -\frac{2\alpha^2}{D} P \sin \frac{m\pi}{a} \xi Y_{4m}(y-\eta) & \eta < y \leq b \end{cases} \quad (3.83)$$

将解 (3.79), (3.83) 代入式 (3.78), 利用另两对边四个边界条件及横向支承条件  $W(\xi, \eta) = 0$ , 可建立关于  $a_m, b_m, c_m, d_m$  及未知参数  $P$  的齐次线代方程组, 从而求得频率方程及相应固有频率、振型。

本法同样可求解多点支承情况, 可假设多个未知  $P_k$ , 而对应每个  $P_k$  有相应特解  $\Phi_m^{(k)}(y)$ 。将这些特解叠加计入到解 (3.78) 中去, 利用各  $P_k$  所在点的挠度振型  $W(\xi_k, \eta_k) = 0$  及两对边边界条件, 类似可建立相应频率方程, 求取问题的解。

## 2. 集中质量与横向刚度

若在  $(\xi, \eta)$  点具有集中质量  $M$  及横向刚度  $k_w$ , 则相当在该点有一集中力振型

$$P = (k_w - M\omega^2)W(\xi, \eta) \quad (3.84)$$

因此, 在上述解 (3.83) 中将  $P$  代以式 (3.84), 根据解 (3.78) 及另两对边四个边界条件, 即可建立关于  $a_m, b_m, c_m, d_m$  的齐次线代方程组, 从而求得频率方程及相应固有频率、振型。

## 3. 集中转动惯量、转动刚度或转动约束支座

板在  $(\xi, \eta)$  点具有  $y$  方向转动约束支座, 则相当在支承点有一集中反力矩作用。设该反力矩振型为  $M^*$ 。利用上面同样原理可求得挠度振型解为式 (3.78), 只是其中

$$\Phi_m(y) = \begin{cases} 0, & 0 \leq y \leq \eta \\ -\frac{2a^2}{D} M^* \sin \frac{m\pi}{a} \xi Y_{3m}(y-\eta), & \eta < y \leq b \end{cases} \quad (3.85)$$

同样, 利用另两对边四个边界条件及转动约束条件  $\frac{\partial W}{\partial y}(\xi, \eta) = 0$ , 可建立关于  $a_m, b_m, c_m, d_m$  及未知参数  $M^*$  的齐次线代方程组, 从而求得频率方程及相应固有频率、振型。

对于集中转动惯量  $J$ , 转动刚度  $k_\phi$  情况, 则可代以

$$M^* = (J\omega^2 - k_\phi) \frac{\partial W}{\partial y}(\xi, \eta) \quad (3.86)$$

类似求解。

### § 3.9 开 孔 板

对于一般性边界条件矩形板内部开有一定形状孔洞, 而孔洞周边自由或有简单附加质量、刚度等非位移边界条件均可用 § 3.6 节所述梁函数组合法求解。因为双向梁函数组合级数 (3.47) 已经满足矩形板外周边的位移边界条件, 而内周边又无位移边界条件, 则同样可代入位移振型变分方程 (3.40) 进行求解, 只是注意积分域为扣除孔洞域的板域<sup>[102][146][205][245]</sup>。

按此法求得的中心开内方孔的四边简支、四边固定方板的频率系数与孔跨比 (孔长  $c$  与板长  $a$  之比) 关系见表 3.21, 3.22; 中心开内圆孔的四边简支、四边固定方板的基频系数与孔跨比 (孔半径  $R$  与板长  $a$  之比) 关系见表 3.23。从表 3.23 可以发现, 在孔较小时有一段范围是随孔径增加而频率减小, 而在孔较大时则随孔径增加而频率增加。这主要是开孔造成质量、刚度减小两种效应在不同径跨比时综合效果不同造成的。在表 3.21, 3.22 中部分频率也有类似情况。

具有内方孔的四边简支方板频率系数  $\lambda_n$  ( $\nu = 0.3$ )

表 3.21

$n \backslash c/a$	0	0.3	0.5	0.7
1	4.443	4.604	4.988	6.164
2	7.025	6.877	6.542	7.078
3	8.886	8.683	8.503	9.445
4	9.935	9.874	10.23	10.83

具有内方孔的四边固定方板频率系数  $\lambda_n$  ( $\nu = 0.3$ )

表 3.22

$n \backslash c/a$	0	0.3	0.5	0.7
1	5.999	6.356	8.081	12.74
2	8.567	8.556	8.792	12.93
3	10.40	10.26	10.56	13.56
4	11.50	11.23	11.33	13.87

具有内圆孔的方板基频系数  $\lambda_1$  ( $\nu = 0.3$ )

表3.23

边界 \ $R/a$	0	0.05	0.10	0.15
四边简支	4.443	4.419	4.401	4.424
四边固定	5.999	5.929	5.980	6.186



## 第四章 曲线边界板的振动

除矩形板外,最常遇的是具有曲线形边界的板的振动问题,其中主要有圆板、圆环板、扇形板、椭圆板等。与建立在直角坐标系上的矩形板不同,这些板将涉及极坐标系及其它正交曲线坐标系薄板振动方程求解问题。

### § 4.1 简单边界整圆板

#### 一、极坐标系薄板方程的一般解

圆板、圆环板、扇形板、环扇形板、半圆板等固有振动问题的基本方程是极坐标系的薄板振动方程 (2.31) 的齐次式

$$\nabla^4 \nabla^2 w + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (4.1)$$

对于不同形状、不同边界条件的板,式 (4.1) 的解还要满足相应边界条件。作为解的共同基础,首先讨论方程 (4.1) 的一般解。

设方程 (4.1) 的解

$$w(r, \theta, t) = W(r, \theta) \sin(\omega t + \varphi) \quad (4.2)$$

则代入方程 (4.1), 振型  $W(r, \theta)$  将应满足

$$\nabla^2 \nabla^2 W - \alpha^4 W = 0 \quad (4.3a)$$

和式 (3.4b) 一样, 式中

$$\alpha^4 = \omega^2 \frac{\rho h}{D} \quad (4.3b)$$

式 (4.3a) 也可写为

$$(\nabla^2 W + \alpha^2 W)(\nabla^2 W - \alpha^2 W) = 0 \quad (a)$$

即

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \pm \alpha^2 W = 0 \quad (4.3c)$$

进一步设振型

$$W(r, \theta) = R(r) \Phi(\theta) \quad (b)$$

代入方程 (4.3c) 得

$$\left( \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right) \Phi + \frac{1}{r^2} R \frac{d^2 \Phi}{d\theta^2} \pm \alpha^2 R \Phi = 0 \quad (c)$$

即

$$\frac{\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \pm \alpha^2 R}{-\frac{R}{r^2}} = \frac{\frac{d^2 \Phi}{d\theta^2}}{\Phi} = -m^2 \quad (d)$$

所以分离为

$$\begin{cases} \frac{d^2 \Phi}{d\theta^2} + m^2 \Phi = 0 \end{cases} \quad (4.4a)$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left( \pm \alpha^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R = 0 \end{cases} \quad (4.4b)$$

式 (4.4a) 为二阶常系数常微分方程, 其解为

$$\Phi(\theta) = E_m \sin m\theta + F_m \cos m\theta \quad (e)$$

式 (4.4b) 为贝塞尔 (Bessel) 方程, 其解为

$$R(r) = A_m^0 J_m(\alpha r) + B_m^0 I_m(\alpha r) + C_m^0 Y_m(\alpha r) + D_m^0 K_m(\alpha r) \quad (f)$$

式中  $J_m, Y_m, I_m, K_m$  分别为  $m$  阶第一、二类及第一、二类修正贝塞尔函数<sup>[305]</sup>。代入式 (b) 可得基本方程 (4.3a) 的一般解

$$\begin{aligned} W(r, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} W_m(r, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} [A_m J_m(\alpha r) + B_m I_m(\alpha r) + C_m Y_m(\alpha r) \\ + D_m K_m(\alpha r)] \cos m\theta + \sum_{m=1}^{\infty} [A'_m J_m(\alpha r) + B'_m I_m(\alpha r) \\ + C'_m Y_m(\alpha r) + D'_m K_m(\alpha r)] \sin m\theta \end{aligned} \quad (4.5)$$

其中八组待定系数  $A_m, B_m, C_m, D_m, A'_m, B'_m, C'_m, D'_m$  将取决于边界条件。

## 二、整圆板的一般解

对于中面为一完整圆形的整圆板, 由于圆心 ( $r=0$ ) 处第二类贝塞尔函数  $Y_m, K_m$  为无限, 因此在一般解 (4.5) 中有  $C_m = D_m = C'_m = D'_m = 0$ 。若整圆板的边界条件以某轴对称, 则将  $\theta=0$  坐标轴放在该轴上, 必有以  $\theta=0$  轴对称振型, 所以可以取  $\sin m\theta$  项系数  $A'_m = B'_m = 0$ , 故一般整圆板有振型解中

$$W_m(r, \theta) = [A_m J_m(\alpha r) + B_m I_m(\alpha r)] \cos m\theta \quad (4.6)$$

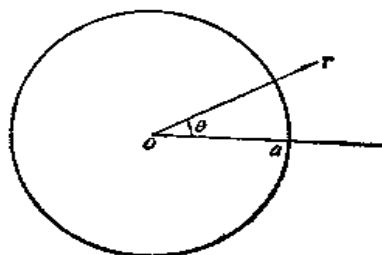


图 4.1

其中  $A_m, B_m$  由圆板的外边界  $r=a$  (图4.1)

的两个边界条件确定。根据式 (2.33), (2.28), (2.30), 对于简单边界整圆板这两个振型边界条件为

$$\text{简支边: } W(a, \theta) = \frac{\partial^2 W}{\partial r^2}(a, \theta) + \frac{\nu}{a} \frac{\partial W}{\partial r}(a, \theta) = 0 \quad (4.7a)$$

$$\text{固定边: } W(a, \theta) = \frac{\partial W}{\partial r}(a, \theta) = 0 \quad (4.7b)$$

$$\text{自由边: } \frac{\partial^2 W}{\partial r^2}(a, \theta) + \frac{\nu}{a} \frac{\partial W}{\partial r}(a, \theta) + \frac{\nu}{a^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2}(a, \theta) = 0$$

$$\frac{\partial^3 W}{\partial r^3}(a, \theta) + \frac{1}{a} \frac{\partial^2 W}{\partial r^2}(a, \theta) - \frac{1}{a^2} \frac{\partial W}{\partial r}(a, \theta) - \frac{(3-\nu)}{a^3} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2}(a, \theta) + \frac{(2-\nu)}{a^2} \frac{\partial^3 W}{\partial r \partial \theta^2}(a, \theta) = 0 \quad (4.7c)$$

### 三、简支边界整圆板

将解 (4.6) 代入边界条件 (4.7a) 有

$$\left. \begin{aligned} A_m J_m(\alpha a) + B_m I_m(\alpha a) &= 0 \\ A_m \left[ \frac{d^2 J_m}{dr^2}(\alpha a) + \frac{\nu}{a} \frac{dJ_m}{dr}(\alpha a) \right] + B_m \left[ \frac{d^2 I_m}{dr^2}(\alpha a) + \frac{\nu}{a} \frac{dI_m}{dr}(\alpha a) \right] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

上式的非零解相应于系数行列式为零, 并考虑到贝塞尔函数的递推公式<sup>[361]</sup> 可得频率方程

$$\frac{J_{m+1}(\alpha a)}{J_m(\alpha a)} + \frac{I_{m+1}(\alpha a)}{I_m(\alpha a)} - \frac{2\alpha a}{1-\nu} = 0 \quad (4.8)$$

从而可以求得频率系数  $\alpha_{mn} a = \lambda_{mn}$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ )。则第  $(m, n)$  阶固有圆频率按式 (4.3b) 为

$$\omega_{mn} = \frac{(\alpha_{mn} a)^2}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} = \frac{\lambda_{mn}^2}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad (m, n=0, 1, 2, \dots) \quad (4.9)$$

将所解得的  $\lambda_{mn}$  代回式 (g) 求出振型系数, 再代回式 (4.6), 有相应第  $(m, n)$  阶振型

$$W_{mn}(r, \theta) = \left[ I_m(\alpha_{mn} r) - \frac{I_m(\alpha_{mn} a)}{J_m(\alpha_{mn} a)} J_m(\alpha_{mn} r) \right] \cos m\theta \quad (4.10a)$$

从式 (4.10) 可知,  $m$  代表振型沿周向有  $m$  个波, 也就是振型有  $m$  个节 (直) 径, 沿  $\theta$  方向是均布的。而节圆半径满足式 (4.10a) 中径向函数为零, 即有节圆半径  $r_n$  的方程

$$I_m(\alpha_{mn} r_n) - \frac{I_m(\alpha_{mn} a)}{J_m(\alpha_{mn} a)} J_m(\alpha_{mn} r_n) = 0 \quad (4.10b)$$

此方程除  $r_n = a$  (外边界) 外, 有  $n$  个  $r_n$  解, 也就是振型有  $n$  个节圆, 沿  $r$  方向不是均布的。

按式 (4.8), (4.10b) 求得的简支边界整圆板频率系数  $\lambda_{mn}$  及节圆半径  $r_n$  值<sup>[201]</sup> 分别列于表 4.1, 表 4.2。应该指出, 简支圆板的频率方程 (4.8) 是与泊松比有关的, 但实际材料可能的不同  $\nu$  值引起频率系数变化是很小的。例如其基频系数随泊松比变化情况可见表 4.3。

简支整圆板频率系数  $\lambda_{mn}$  ( $\nu=0.3$ ) 表 4.1

$m \backslash n$	0	1	2
0	2.231	3.734	5.065
1	5.455	6.965	8.375
2	8.613	10.15	11.60

简支整圆板节圆半径  $r_n$  ( $\nu=0.3$ ) 表 4.2

$m \backslash n$	0	1	2
1	0.441a	0.550a	0.613a
2	0.279a	0.378a	0.443a
	0.644a	0.692a	0.726a

不同泊松比的简支整圆板基频系数  $\lambda_{00}$

表 4.3

$\nu$	0	0.25	0.30	0.50
$\lambda_{00}$	2.116	2.214	2.231	2.293

## 四、固定边界整圆板

将解 (4.6) 代入式 (4.7b) 有

$$\left. \begin{aligned} A_m J_m(\alpha a) + B_m I_m(\alpha a) &= 0 \\ A_m \frac{dJ_m}{dr}(\alpha a) + B_m \frac{dI_m}{dr}(\alpha a) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (h)$$

同样, 可得频率方程

$$J_m(\alpha a) I_{m+1}(\alpha a) + I_m(\alpha a) J_{m+1}(\alpha a) = 0 \quad (4.11a)$$

及求得频率系数  $\alpha_{mn}$  与频率  $\omega_{mn}$  以及相应振型

$$W_{mn}(r, \theta) = \left[ J_m(\alpha_{mn} r) - \frac{I_m(\alpha_{mn} a)}{J_m(\alpha_{mn} a)} J_m(\alpha_{mn} r) \right] \cos m\theta \quad (4.11b)$$

及节圆半径  $r_n$  方程

$$I_m(\alpha_{mn} r_n) - \frac{I_m(\alpha_{mn} a)}{J_m(\alpha_{mn} a)} J_m(\alpha_{mn} r_n) = 0 \quad (4.11c)$$

应该看到, 固定圆板的振型及节圆方程 (4.11b), (4.11c) 在形式上与简支圆板的式 (4.10a), (4.10b) 完全一样, 但由于  $\alpha_{mn}$  是不同频率方程 (式 (4.11a) 与式 (4.8)) 的根, 所以实际上两者的振型形状与节圆位置是不同的。

按式 (4.11a) 及式 (4.11c) 求得的固定边界整圆板频率系数  $\lambda_{mn}$  及节圆半径  $r_n$  分别列于表 4.4, 表 4.5, 表中  $m$  为节径数,  $n$  为节圆数。应该指出, 固定圆板的频率方程 (4.11a) 是与泊松比无关的, 因此表 4.4, 表 4.5 中给出数值是适合于任意  $\nu$  值的固定圆板。

固定整圆板频率系数  $\lambda_{mn}$  表 4.4

$m \backslash n$	0	1	2
0	3.196	4.612	5.905
1	6.206	7.799	9.199
2	9.438	10.96	12.41

固定整圆板节圆半径  $r_n$  表 4.5

$m \backslash n$	0	1	2
1	0.379a	0.490a	0.559a
2	0.255a	0.350a	0.414a
	0.583a	0.640a	0.679a

## 五、自由边界整圆板

和上面做法一样, 将解 (4.6) 代入式 (4.7c), 由非零解条件, 并利用递推公式, 可得频率方程

$$\begin{aligned} & \left\{ (\alpha a)^3 \frac{dI_m}{dr}(\alpha a) - (1-\nu)m^2 \left[ (\alpha a) \frac{dI_m}{dr}(\alpha a) - \alpha I_m(\alpha a) \right] \right\} \left\{ (\alpha a)^2 \alpha J_m(\alpha a) \right. \\ & + (1-\nu) \left[ (\alpha a) \frac{dJ_m}{dr}(\alpha a) - m^2 \alpha J_m(\alpha a) \right] \left. \right\} - \left\{ (\alpha a)^3 \frac{dJ_m}{dr}(\alpha a) \right. \\ & + (1-\nu)m^2 \left[ (\alpha a) \frac{dJ_m}{dr}(\alpha a) - \alpha J_m(\alpha a) \right] \left. \right\} \left\{ (\alpha a)^2 \alpha I_m(\alpha a) \right. \\ & - (1-\nu) \left[ (\alpha a) \frac{dI_m}{dr}(\alpha a) - m^2 \alpha I_m(\alpha a) \right] \left. \right\} = 0 \end{aligned} \quad (4.12a)$$

求取频率系数  $\alpha_{mn}$  及频率  $\omega_{mn}$  以及相应振型

$$W_{mn}(r, \theta) = \left\{ J_m(\alpha_{mn} r) \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(\alpha_{mn}a)^2 J_m(\alpha_{mn}a) + (1-\nu) \left[ a \frac{dJ_m}{dr}(\alpha_{mn}a) - m^2 J_m(\alpha_{mn}a) \right]}{(\alpha_{mn}a)^2 I_m(\alpha_{mn}a) - (1-\nu) \left[ a \frac{dI_m}{dr}(\alpha_{mn}a) - m^2 I_m(\alpha_{mn}a) \right]} \\
& \times I_m(\alpha_{mn}r) \} \cos m\theta \quad (4.12b)
\end{aligned}$$

及节圆半径 $r_n$ 方程

$$\frac{J_m(\alpha_{mn}r_n)}{I_m(\alpha_{mn}r_n)} + \frac{(\alpha_{mn}a)^2 J_m(\alpha_{mn}a) + (1-\nu) \left[ a \frac{dJ_m}{dr}(\alpha_{mn}a) - m^2 J_m(\alpha_{mn}a) \right]}{(\alpha_{mn}a)^2 I_m(\alpha_{mn}a) - (1-\nu) \left[ a \frac{dI_m}{dr}(\alpha_{mn}a) - m^2 I_m(\alpha_{mn}a) \right]} = 0 \quad (4.12c)$$

按式(4.12a), (4.12c)求得的自由边界整圆板频率系数 $\lambda_{mn}$ 及节圆半径 $r_n$ 分别列于表4.6, 表4.7, 表中 $m$ 为节径数,  $n$ 为节圆数。相应(0,0), (1,0)阶振型为刚体平移及转动, 故无弹性体振动固有频率。由频率方程(4.12a)可知, 自由边界整圆板固有频率也是与泊松比 $\nu$ 有关。

自由整圆板频率系数 $\lambda_{mn}$  ( $\nu=0.33$ ) 表4.6

$m \backslash n$	0	1	2	3
0	—	—	2.292	3.497
1	3.014	4.530	5.937	7.274
2	6.209	7.737	9.160	10.55

自由整圆板节圆半径 $r_n$  ( $\nu=0.33$ ) 表4.7

$m \backslash n$	0	1	2	3
1	0.680a	0.781a	0.822a	0.847a
2	0.891a	0.497a	0.562a	0.605a
	0.841a	0.871a	0.890a	0.925a

## § 4.2 简单边界圆环板

外边界为 $r=a$ , 内边界为 $r=b$ 的圆环板(图4.2)的振型一般解仍为式(4.5)。若讨论以 $\theta=0$ 轴为对称的振型, 则圆环板有振型解

$$W_m(r, \theta) = [A_m J_m(ar) + B_m I_m(ar) + C_m Y_m(ar) + D_m K_m(ar)] \cos m\theta \quad (4.13)$$

式中四组待定常数取决于内外两边界的四个边界条件。边界条件方程类似式(4.7)。

例如内外均固定的圆环板, 四个边界条件为

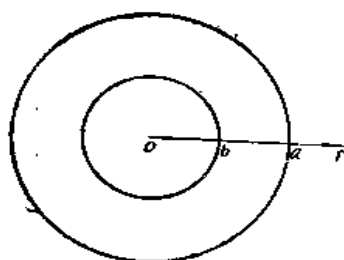


图 4.2

$$W(a, \theta) = \frac{\partial W}{\partial r}(a, \theta) = W(b, \theta) = \frac{\partial W}{\partial r}(b, \theta) = 0 \quad (4.14a)$$

将解(4.13)代入式(4.14a), 得四阶齐次代数方程组, 由系数行列式为零, 可得频率方程

$$\begin{vmatrix} J_m(aa) & I_m(aa) & Y_m(aa) & K_m(aa) \\ \frac{dJ_m}{dr}(aa) & \frac{dI_m}{dr}(aa) & \frac{dY_m}{dr}(aa) & \frac{dK_m}{dr}(aa) \\ J_m(ab) & I_m(ab) & Y_m(ab) & K_m(ab) \\ \frac{dJ_m}{dr}(ab) & \frac{dI_m}{dr}(ab) & \frac{dY_m}{dr}(ab) & \frac{dK_m}{dr}(ab) \end{vmatrix} = 0 \quad (m=0, 1, 2, \dots) \quad (4.14b)$$

从而可以求得频率系数 $\alpha_{mn}, a = \lambda_{mn}$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ )，再按式(4.9)计算圆频率 $\omega_{mn}$ ，代回齐次线代方程组，求出振型系数及相应振型 $W_{mn}(r, \theta)$ 。和整圆板一样，其中 $m$ 为节径数， $n$ 为节圆数（不包括内外支承边数）。利用贝塞尔函数的递推关系，频率方程中各元素均可用贝塞尔函数本身来表示（见式(4.16)）。

内边界或外边界为简支、固定、自由之一的简单边界的圆环板共有九种。每一种均可按上述类似方法由振型一般解(4.13)及边界条件(4.7)求得<sup>[257][201]</sup>。其关于系数 $A_m, B_m, C_m, D_m$ 的四阶齐次线代方程组分别为：

1. 外边简支、内边简支圆环板

$$\mathcal{L}_1(aa) = \mathcal{L}_3(aa) = \mathcal{L}_1(ab) = \mathcal{L}_3(ab) = 0 \quad (4.15a)$$

2. 外边固定、内边固定圆环板

$$\mathcal{L}_1(aa) = \mathcal{L}_2(aa) = \mathcal{L}_1(ab) = \mathcal{L}_2(ab) = 0 \quad (4.15b)$$

3. 外边自由、内边自由圆环板

$$\mathcal{L}_3(aa) = \mathcal{L}_4(aa) = \mathcal{L}_3(ab) = \mathcal{L}_4(ab) = 0 \quad (4.15c)$$

4. 外边简支、内边固定圆环板

$$\mathcal{L}_1(aa) = \mathcal{L}_3(aa) = \mathcal{L}_1(ab) = \mathcal{L}_2(ab) = 0 \quad (4.15d)$$

5. 外边固定、内边简支圆环板

$$\mathcal{L}_1(aa) = \mathcal{L}_2(aa) = \mathcal{L}_1(ab) = \mathcal{L}_3(ab) = 0 \quad (4.15e)$$

6. 外边简支、内边自由圆环板

$$\mathcal{L}_1(aa) = \mathcal{L}_3(aa) = \mathcal{L}_3(ab) = \mathcal{L}_4(ab) = 0 \quad (4.15f)$$

7. 外边自由、内边简支圆环板

$$\mathcal{L}_3(aa) = \mathcal{L}_4(aa) = \mathcal{L}_1(ab) = \mathcal{L}_3(ab) = 0 \quad (4.15g)$$

8. 外边固定、内边自由圆环板

$$\mathcal{L}_1(aa) = \mathcal{L}_2(aa) = \mathcal{L}_3(ab) = \mathcal{L}_4(ab) = 0 \quad (4.15h)$$

9. 外边自由、内边固定圆环板

$$\mathcal{L}_3(aa) = \mathcal{L}_4(aa) = \mathcal{L}_1(ab) = \mathcal{L}_2(ab) = 0 \quad (4.15i)$$

以上各式中

$$\mathcal{L}_1(x) = A_m J_m(x) + B_m I_m(x) + C_m Y_m(x) + D_m K_m(x) \quad (4.16a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2(x) = & A_m \left[ \frac{m}{x} J_m(x) - J_{m+1}(x) \right] + B_m \left[ \frac{m}{x} I_m(x) + I_{m+1}(x) \right] \\ & + C_m \left[ \frac{m}{x} Y_m(x) - Y_{m+1}(x) \right] + D_m \left[ \frac{m}{x} K_m(x) - K_{m+1}(x) \right] \end{aligned} \quad (4.16b)$$

$$\mathcal{L}_3(x) = A_m \left\{ J_m(x) - (1-\nu) \left[ \frac{m(m-1)}{x^2} J_m(x) + \frac{1}{x} J_{m+1}(x) \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
& - B_m \left\{ I_m(x) + (1-\nu) \left[ \frac{m(m-1)}{x^2} I_m(x) - \frac{1}{x} I_{m+1}(x) \right] \right\} \\
& + C_m \left\{ Y_m(x) - (1-\nu) \left[ \frac{m(m-1)}{x^2} Y_m(x) + \frac{1}{x} Y_{m+1}(x) \right] \right\} \\
& - D_m \left\{ K_m(x) + (1-\nu) \left[ \frac{m(m-1)}{x^2} K_m(x) + \frac{1}{x} K_{m+1}(x) \right] \right\}
\end{aligned} \quad (4.16c)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_4(x) = & A \left\{ mJ_m(x) - xJ_{m+1}(x) + \frac{m^2(1-\nu)}{x^2} \left[ (m-1)J_m(x) \right. \right. \\
& \left. \left. - xJ_{m+1}(x) \right] \right\} - B_m \left\{ mI_m(x) + xI_{m+1}(x) - \frac{m^2(1-\nu)}{x^2} \left[ (m-1)I_m(x) \right. \right. \\
& \left. \left. + xI_{m+1}(x) \right] \right\} + C_m \left\{ mY_m(x) - xY_{m+1}(x) \right. \\
& \left. + \frac{m^2(1-\nu)}{x^2} \left[ (m-1)Y_m(x) - xY_{m+1}(x) \right] \right\} - D_m \left\{ mK_m(x) \right. \\
& \left. - xK_{m+1}(x) - \frac{m^2(1-\nu)}{x^2} \left[ (m-1)K_m(x) - xK_{m+1}(x) \right] \right\}
\end{aligned} \quad (4.16d)$$

从而可求取相应频率方程、频率系数及振型。现将这九种简单边界圆环板前几阶频率系数  $\lambda_{mn} = \sqrt{\omega_{mn} a^2 \left( \frac{\rho h}{D} \right)^{\frac{1}{2}}}$  随不同内外径比  $\frac{b}{a}$  变化情况列于表4.8。除了内外边固定圆环板外，一般频率系数均与泊松比有关。

从表4.8可知，圆环板的频率系数一般随内孔增大而增大，随节径、节圆数增加而增加。在  $\frac{b}{a}$  趋于零的情况下，内周边固定圆环板频率系数将给出中心点固定支承的圆板的结果。

### § 4.3 特殊边界整圆板与圆环板

本节讨论除上述简单边界以外的一些特殊边界圆板的解法。有关方法将同样适用于同类边界圆环板的求解。

#### 一、弹性边界圆板

设半径为  $a$  的圆板，周边为均匀分布的线弹簧与螺旋弹簧所支承（图4.3），即边界同时具有弹性支承与弹性嵌固作用。其线弹簧常数  $k_w$  与螺旋弹簧常数  $k_\theta$  沿周边  $r = a$  是一常量。

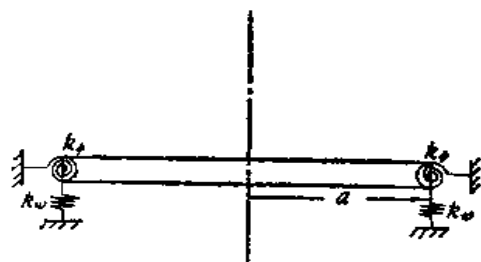


图 4.3

弹性边界圆板的振型解仍为式 (4.6)，其振型边界条件按式 (2.11) 有

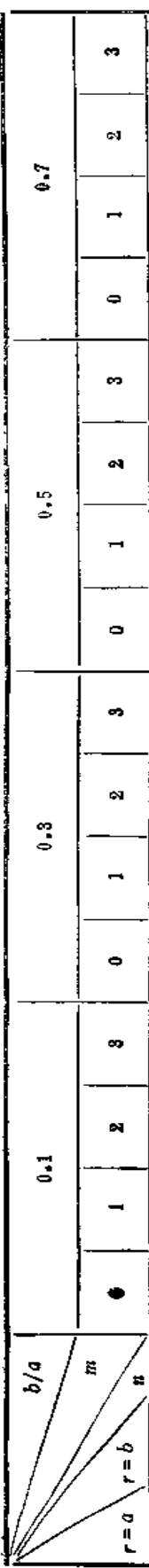
$$M_r^*(a, \theta) = k_\theta \frac{\partial W}{\partial r}(a, \theta) \quad (4.17a)$$

$$Q_r^*(a, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial M_r^*}{\partial \theta}(a, \theta) = -k_w W(a, \theta) \quad (4.17b)$$

将解 (4.6) 代入式 (4.17)，并注意到极坐标系内力表达式 (2.28)，(2.30)，可以得

表4.8

简单边界条件圆板频率系数  $\lambda_{mn}$  ( $\nu = \frac{1}{8}$ )

		0.1				0.3				0.5				0.7			
		1		2		3		0		1		2		3		0	
		$\bullet$															
筒	0	3.808	4.087	5.089	6.332	4.593	4.827	5.495	6.481	6.325	6.455	6.883	7.483	10.49	10.53	10.77	11.04
支	1	7.190	7.517	8.468	9.732	9.044	9.198	9.659	10.39	12.61	12.69	12.92	13.30	20.95	21.01	21.07	21.28
筒	0	4.219	4.359	5.177	6.335	5.468	5.604	6.017	6.738	7.733	7.810	8.037	8.426	12.96	13.04	13.11	13.30
支	1	7.752	7.925	8.643	9.762	10.01	10.10	10.44	10.95	14.07	14.14	14.31	14.53	23.49	23.52	23.60	23.72
筒	0	2.205	3.728	5.039	6.326	2.159	3.578	4.909	6.229	2.252	3.406	4.722	5.975	2.632	3.647	4.930	6.999
支	1	5.422	6.928	8.319	9.634	6.083	6.768	8.068	9.384	8.112	8.361	9.066	10.16	13.23	13.34	13.60	13.98
筒	0	4.754	5.010	5.949	7.141	5.805	5.983	6.542	7.396	7.994	8.097	8.367	8.837	13.23	13.24	13.34	13.60
支	1	8.099	8.396	9.311	10.54	10.20	10.34	10.77	11.40	14.21	14.25	14.49	14.76	23.62	23.66	23.72	23.87
筒	0	5.225	6.329	6.058	7.155	6.723	6.826	7.141	7.746	9.445	9.497	9.859	9.949	15.75	15.78	15.84	16.01
支	1	8.678	8.868	9.513	10.58	11.18	11.27	11.58	12.04	15.68	15.74	15.91	16.09	26.19	26.20	26.24	26.34
筒	0	3.194	4.593	5.874	7.141	3.376	4.416	5.701	7.007	4.207	4.696	5.657	6.768	6.565	6.731	7.176	7.829
支	1	6.285	7.745	9.132	10.42	7.190	7.733	8.889	10.16	9.685	9.864	10.39	11.21	15.91	15.94	16.09	16.36
筒	0	1.857	1.517	2.328	3.521	1.849	1.822	2.466	3.549	2.027	2.205	2.825	3.742	2.486	2.888	3.651	4.528
支	1	4.567	4.909	5.983	7.280	5.621	5.874	6.557	7.530	7.810	7.956	8.349	8.961	13.04	13.11	13.30	13.60
筒	0	2.057	1.772	2.371	3.521	2.581	2.516	2.821	3.643	3.606	3.647	3.834	4.301	6.083	6.124	6.269	6.527
支	1	5.030	5.225	6.063	7.294	6.527	6.678	7.134	7.880	9.235	9.311	9.576	10.61	15.46	15.52	15.68	15.91
筒	0	—	—	2.302	3.521	—	—	2.216	3.501	—	—	2.069	3.376	—	—	1.889	3.140
支	1	2.961	4.528	5.908	7.280	2.891	4.278	5.745	7.141	3.053	4.147	5.577	6.885	3.633	4.690	6.148	7.463



到关于  $A_m$ ,  $B_m$  的两阶齐次线代方程组, 从而由系数行列式为零, 并利用贝塞尔函数递推公式, 给出频率方程

$$\begin{vmatrix} E & E_1 \\ F & F_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (4.18a)$$

其中

$$E = [J_{m-2}(\alpha a) + J_{m+2}(\alpha a)] + \frac{2}{(\alpha a)}(\nu + K_s)[J_{m-1}(\alpha a) - J_{m+1}(\alpha a)] - \frac{4}{(\alpha a)^2} \left[ \nu m^2 + \frac{(\alpha a)^2}{2} \right] J_m(\alpha a) \quad (4.18b)$$

$$E_1 = [I_{m-2}(\alpha a) + I_{m+2}(\alpha a)] + \frac{2}{(\alpha a)}(\nu + K_s)[I_{m-1}(\alpha a) + I_{m+1}(\alpha a)] - \frac{4}{(\alpha a)^2} \left[ \nu m^2 - \frac{(\alpha a)^2}{2} \right] I_m(\alpha a) \quad (4.18c)$$

$$F = [J_{m-3}(\alpha a) - J_{m+3}(\alpha a)] + \frac{2}{(\alpha a)}[J_{m-2}(\alpha a) + J_{m+2}(\alpha a)] - \frac{4}{(\alpha a)^2} \left[ 1 + (2 - \nu)m^2 + \frac{3}{4}(\alpha a)^2 \right] [J_{m-1}(\alpha a) - J_{m+1}(\alpha a)] + \frac{8}{(\alpha a)^3} \left[ (3 - \nu)m^2 - \frac{(\alpha a)^2}{2} - K_w \right] J_m(\alpha a) \quad (4.18d)$$

$$F_1 = [I_{m-3}(\alpha a) + I_{m+3}(\alpha a)] + \frac{2}{(\alpha a)}[I_{m-2}(\alpha a) + I_{m+2}(\alpha a)] - \frac{4}{(\alpha a)^2} \left[ 1 + (2 - \nu)m^2 - \frac{3}{4}(\alpha a)^2 \right] [I_{m-1}(\alpha a) + I_{m+1}(\alpha a)] + \frac{8}{(\alpha a)^3} \left[ (3 - \nu)m^2 + \frac{(\alpha a)^2}{2} - K_w \right] I_m(\alpha a) \quad (4.18e)$$

式中无量纲弹性常数

$$K_s = \frac{k_s a}{D}, \quad K_w = \frac{k_w a^3}{D} \quad (4.19)$$

式 (4.18) 是弹性边界圆板频率方程的一种一般性表达式, 在特殊情况下可以求取简支 ( $K_s = 0$ ,  $K_w = \infty$ )、固定 ( $K_s = K_w = \infty$ )、自由 ( $K_s = K_w = 0$ )、弹性嵌固 ( $K_w = \infty$ ) 弹性支承 ( $K_s = 0$ ) 等各种边界的圆板的频率方程与频率系数  $\lambda_{mn}$  [131] [167]。表 4.9 列出弹性嵌固边界整圆板的频率系数  $\lambda_{m0}$  值与弹性常数  $K_s$  关系。显然, 当  $K_s$  为零或  $\infty$  时, 其值分别趋向于简支及固定边界 (具有相同泊松比  $\nu$ ) 的整圆板相应阶次频率系数。

弹性嵌固整圆板频率系数  $\lambda_{m0}$  ( $n=0$ ,  $\nu=0.3$ )

表 4.9

$m \backslash k_s$	0	0.001	0.01	0.1	1	$\infty$
0	2.231	2.460	2.960	3.162	3.194	3.196
1	3.734	3.873	4.313	4.572	4.604	4.611
2	5.065	5.167	5.550	5.848	5.899	5.906

表 4.10 列出弹性支承边界整圆板的频率系数  $\lambda_{0n}$  值与弹性常数  $K_w$  关系。显然, 当  $K_w$  为零或  $\infty$  时, 其值分别趋向于自由及简支边界 (同  $\nu$ ) 整圆板相应阶次频率系数。

弹性支承整圆板频率系数 $\lambda_{mn}$  ( $m=0, \nu=0.25$ )

表4.10

$n \backslash K_m$	0	0.5	1.0	2.0	$\infty$
0	—	0.9925	1.172	1.373	2.205
1	2.982	3.003	3.024	3.066	5.446
2	6.192	6.194	6.196	6.200	8.608

## 二、混合边界圆板

设圆板固定边界张角为 $\alpha_0$ ，其余边界为简支。现取极坐标轴通过固定边界的中心处，则全板边界条件将以坐标轴对称（图4.4）。全部边界条件可写为

$$W(a, \theta) = 0, \quad 0 \leq |\theta| \leq \pi \quad (4.19a)$$

$$\frac{\partial W}{\partial r}(a, \theta) = 0, \quad |\theta| < \frac{\alpha_0}{2} \quad (4.19b)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}(a, \theta) + \frac{\nu}{a} \frac{\partial W}{\partial r}(a, \theta) = 0,$$

$$\frac{\alpha_0}{2} < |\theta| \leq \pi \quad (4.19c)$$

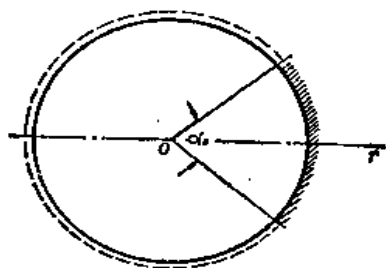


图 4.4

对于圆板，振型解的一般形式仍为式（4.5），考虑到边界条件以坐标轴对称以及整圆板圆心处振型有限，有

$$W(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} [A_m J_m(ar) + B_m I_m(ar)] \cos m\theta \quad (4.20a)$$

由满足边界条件（4.19a）得

$$B_m = -\frac{J_m(\alpha a)}{I_m(\alpha a)} A_m \quad (a)$$

则代入有

$$W(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left[ J_m(ar) - \frac{J_m(\alpha a)}{I_m(\alpha a)} I_m(ar) \right] \cos m\theta \quad (4.20b)$$

为满足另一边界条件必须有：

由式（4.19b）得出的

$$\frac{\partial W}{\partial r}(a, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left[ \frac{dJ_m}{dr}(\alpha a) - \frac{J_m(\alpha a)}{I_m(\alpha a)} \frac{dI_m}{dr}(\alpha a) \right] \cos m\theta = 0.$$

$$|\theta| < \frac{\alpha_0}{2} \quad (4.21a)$$

由式（4.19c）得出的

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_m \left[ \frac{d^2 J_m}{dr^2}(\alpha a) + \frac{\nu}{a} \frac{dJ_m}{dr}(\alpha a) - \frac{J_m(\alpha a)}{I_m(\alpha a)} \frac{d^2 I_m}{dr^2}(\alpha a) - \frac{\nu}{a} \frac{J_m(\alpha a)}{I_m(\alpha a)} \frac{dI_m}{dr}(\alpha a) \right] \cos m\theta = 0$$

$$\frac{\alpha_0}{2} < |\theta| \leq \pi \quad (4.21b)$$

在  $\frac{\alpha_0}{2} < |\theta| \leq \pi$  简支段转角不为零, 而是  $\theta$  的函数, 即

$$\frac{\partial W}{\partial r}(a, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left[ \frac{dJ_m}{dr}(aa) - \frac{J_m(aa)}{I_m(aa)} \frac{dI_m}{dr}(aa) \right] \cos m\theta = g(\theta),$$

$$\frac{\alpha_0}{2} < |\theta| \leq \pi \quad (4.21c)$$

由于  $A_m$  未定, 所以  $g(\theta)$  是与  $A_m$  有关的未知函数。转角  $\frac{\partial W}{\partial r}$  在  $|\theta| < \frac{\alpha_0}{2}$  域为零, 在  $\frac{\alpha_0}{2} < |\theta| \leq \pi$  域为  $g(\theta)$ , 即式 (4.21a), (4.21c)。将这种分段表示的  $\frac{\partial W}{\partial r}$  函数在全域展开成付里叶级数,

$$\frac{\partial W}{\partial r}(a, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos m\theta \quad (4.22a)$$

$$a_m = \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\alpha_0}{2}}^{\pi} g(\theta) \cos m\theta d\theta \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.22b)$$

根据付里叶级数收敛性, 式 (4.22) 表示的  $\frac{\partial W}{\partial r}$  在  $|\theta| < \frac{\alpha_0}{2}$  域为原有零值, 即满足边界条件 (4.21a), 在  $\frac{\alpha_0}{2} < |\theta| \leq \pi$  域应为式 (4.21c), 则比较系数可得

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\alpha_0}{2}}^{\pi} g(\theta) d\theta / \left[ \frac{dJ_0}{dr}(aa) - \frac{J_0(aa)}{I_0(aa)} \frac{dI_0}{dr}(aa) \right] \quad (4.23a)$$

$$A_m = \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\alpha_0}{2}}^{\pi} g(\theta) \cos m\theta d\theta / \left[ \frac{dJ_m}{dr}(aa) - \frac{J_m(aa)}{I_m(aa)} \frac{dI_m}{dr}(aa) \right] \quad (4.23b)$$

式 (4.23) 表示未知的  $A_0, A_m$  用未知的  $g(\theta)$  来表达。现将式 (4.23) 代入到尚未满足的边界条件 (4.21b) 左端, 并乘  $g(\theta)$  沿  $\frac{\alpha_0}{2}$  到  $\pi$  积分得

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\delta_m}{\pi} L_m(a) \left[ \int_{\frac{\alpha_0}{2}}^{\pi} g(\theta) \cos m\theta d\theta \right]^2 = 0 \quad (4.24a)$$

式中

$$L_m(a) = \left[ \frac{d^2 J_m}{dr^2}(aa) + \frac{\nu}{a} \frac{dJ_m}{dr}(aa) - \frac{J_m(aa)}{I_m(aa)} \frac{d^2 I_m}{dr^2}(aa) \right. \\ \left. - \frac{1}{a} \frac{J_m(aa)}{I_m(aa)} \frac{dI_m}{dr}(aa) \right] / \left[ \frac{dJ_m}{dr}(aa) - \frac{J_m(aa)}{I_m(aa)} \frac{dI_m}{dr}(aa) \right] \\ (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.24b)$$

$$\delta_m = \begin{cases} 1 & m = 0 \\ 2 & m \geq 1 \end{cases} \quad (4.24c)$$

式 (4.24a) 为以积分方程形式出现的特征值方程, 可求取特征值  $\alpha, \lambda$  及特征函数 (包

括 $g(\theta)$ ) (17)。作为基频近似计算, 可取满足连续条件的函数为

$$g(\theta) = \sqrt{(2\pi - \alpha_0)^2 - 4(\pi - \theta)^2} \quad (b)$$

从而求得基频系数 $\lambda_1$ 列于表4.11。

部分固定部分简支整圆板的基频系数 $\lambda_1$

表4.11

$\alpha_0$	$0^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$135^\circ$	$180^\circ$	$225^\circ$	$270^\circ$	$300^\circ$	$360^\circ$
$\lambda_1$	2.231	2.453	2.519	2.622	2.738	2.863	2.999	3.044	3.196

### 三、中心点支承圆板

圆心固定、外边界为简单边界条件的整圆板, 当 $m \geq 2$ , 即有两根或两根以上节径时的频率与振型和同外边界、同阶无中心支承普通整圆板的频率与振型 (§ 4.1) 是完全一样的, 因为以上各阶普通整圆板的振型保证了中心点支承条件。

而对于 $m = 0$ 或1的圆心固定整圆板可取用 § 4.2 中内边界为固定、外边界为相应边界的圆环板, 当 $b$ 趋于零时之极限解。对于中心固定、外边界为各简单边界条件的整圆板所求得头二阶轴对称 ( $m = 0$ ) 频率系数列于表4.12。

中心固定整圆板频率系数

$\lambda_{m0} (m=0, \nu=0.3)$

表4.12

$n$ \ 外边界	简 支	固 定	自 由
0	3.843	4.762	1.932
1	7.021	7.861	4.570

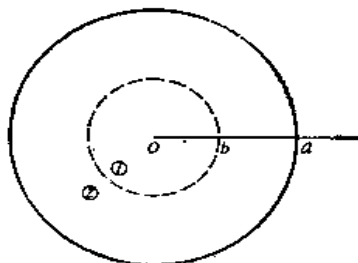


图 4.5

### 四、内圆支承圆板

对于在内圆 ( $r = b$ ) 处简支、外边界 ( $r = a$ ) 为简单边界的整圆板 (图4.5), 可以将振型解表达为两部分:

在内圆  $0 \leq r \leq b$  区, 按整圆板解 (4.6) 有

$$W_m^{(1)} = [A_m^{(1)} J_m(ar) + B_m^{(1)} I_m(ar)] \cos m\theta \quad (4.25a)$$

在外圆环  $b \leq r \leq a$  区, 按圆环板解 (4.14) 有

$$W_m^{(2)} = [A_m^{(2)} J_m(ar) + B_m^{(2)} I_m(ar) + C_m^{(2)} Y_m(ar) + D_m^{(2)} K_m(ar)] \cos m\theta \quad (4.25b)$$

上述两式中六个待定系数 $A_m^{(1)}$ ,  $B_m^{(1)}$ ,  $A_m^{(2)}$ ,  $B_m^{(2)}$ ,  $C_m^{(2)}$ ,  $D_m^{(2)}$ 取决于外边界 ( $r = a$ ) 处两个边界条件及下列内圆 ( $r = b$ ) 简支支承的四个连续条件:

$$W_m^{(1)}(b, \theta) = 0 \quad (4.26a)$$

$$W_m^{(2)}(b, \theta) = 0 \quad (4.26b)$$

$$\frac{\partial W_m^{(1)}}{\partial r}(b, \theta) = \frac{\partial W_m^{(2)}}{\partial r}(b, \theta) \quad (4.26c)$$

$$M_r^{(1)}(b, \theta) = M_r^{(2)}(b, \theta), \text{ 即 } \frac{\partial^2 W_m^{(1)}}{\partial r^2}(b, \theta) = \frac{\partial^2 W_m^{(2)}}{\partial r^2}(b, \theta) \quad (4.26d)$$

从而建立六阶齐次线代方程组, 由系数行列式为零, 求取频率系数及振型。例如, 外边界自由、内圆筒支圆板的基频系数〔25〕见表4.13。随支承圆半径扩大, 频率开始是上升, 后来又下降, 当 $b/a$ 趋于1时, 即为周边筒支整圆板基频系数结果。

内圆筒支周边自由圆板基频系数 $\lambda_1 \left( \nu = \frac{1}{3} \right)$

表4.13

$b/a$	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
$\lambda_1$	2.025	2.302	2.855	2.980	2.486

### 五、附加点质量的圆板

对于板内 $(\xi, \eta)$ 处具有集中质量 $M$ 的各种边界条件整圆板(图4.6)可以用§3.8第六小节所叙述的等效外荷法求解。振型的基本方程为

$$\nabla^2 \nabla^2 W - \alpha^4 W = \frac{M}{D} \omega^2 W(\xi, \eta) \delta(r - \xi) \delta(\theta - \eta) \quad (4.27)$$

式中算子 $\nabla^2 \nabla^2$ 见式(4.1),  $\alpha^4$ 见式(3.4b)。其解为

$$W(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} [W_m(r) + \Phi_m(r)] \cos m\theta \quad (4.28a)$$

其中一般解部分 $W_m(r)$ , 对整圆板, 按式(4.6)为

$$W_m(r) = A_m J_m(\alpha r) + B_m I_m(\alpha r) \quad (4.28b)$$

而 $\Phi_m(r)$ 为特解部分, 可根据 $\delta(\theta - \eta)$ 的付里叶展开式(附录IV), 建立其应满足的常微分方程, 再用拉普拉斯变换方法求取。联合 $W_m(r)$ ,  $\Phi_m(r)$ 的解, 代入式(4.28a), 根据外边界( $r = a$ )相应的两个边界条件确定关于 $A_m$ ,  $B_m$ 的两阶齐次线代方程组, 从而求得频率方程、频率系数与相应振型。下而介绍二个有数字解的具体例子〔229〕。

**中心带集中质量的固定整圆板** 这时外边界条件为式(4.7b), 其轴对称( $m = 0$ )频率方程为

$$\begin{aligned} & J_0(\alpha a) I_1(\alpha a) + J_1(\alpha a) I_0(\alpha a) \\ &= \frac{(\alpha a)^2}{4} \xi \left\{ J_1(\alpha a) K_0(\alpha a) - J_0(\alpha a) K_1(\alpha a) + \frac{\pi}{2} I_1(\alpha a) Y_0(\alpha a) \right. \\ & \quad \left. + \frac{\pi}{2} I_0(\alpha a) Y_1(\alpha a) + \frac{2}{\alpha a} \right\} \end{aligned} \quad (4.29a)$$

式中相对质量

$$\xi = \frac{M}{M_0} = \frac{M}{\pi a^2 \rho h} \quad (4.30)$$

由式(4.29a)计算所得前三阶频率系数随相对质量 $\frac{M}{M_0}$ 变化情况见表4.14。显然, 随着附加集中质量增加, 频率是降低的。还可看到, 附加质量不大时频率随附加质量增加而剧烈

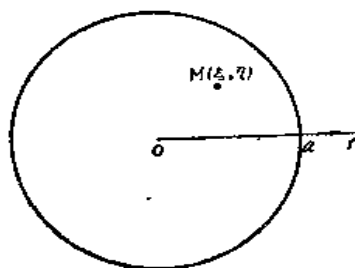


图 4.6

降低；当附加质量和板的整体质量可以比拟（ $\xi \approx 1$ ）时，频率随附加质量增加而降低的变化就不怎么明显。

中心带集中质量的周边固定圆板的频率系数 $\lambda_{mn}$ （ $m=0$ ）

表4.14

$n \backslash M/M_0$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
0	3.196	2.613	2.304	2.163	2.046	1.934
1	6.306	5.182	4.982	4.916	4.894	4.882
2	9.439	8.037	7.975	7.937	7.919	7.911

中心带集中质量的自由整圆板 这时外边界条件为式（4.7c），其轴对称（ $m=0$ ）频率方程为

$$\begin{aligned}
 & J_0(\alpha a)I_1(\alpha a) + J_1(\alpha a)I_0(\alpha a) - \frac{2(1-\nu)}{\alpha a}J_1(\alpha a)I_1(\alpha a) \\
 & = \frac{(\alpha a)^2}{4}\xi \left\{ J_1(\alpha a)K_0(\alpha a) - J_0(\alpha a)K_1(\alpha a) + \frac{\pi}{2}I_1(\alpha a)Y_0(\alpha a) \right. \\
 & \quad + \frac{\pi}{2}I_0(\alpha a)Y_1(\alpha a) + \frac{2(1-\nu)}{\alpha a} \left[ J_1(\alpha a)I_1(\alpha a) - \frac{\pi}{2}Y_1(\alpha a)I_1(\alpha a) \right] \\
 & \quad \left. - \frac{2}{\alpha a} \right\} \quad (4.29b)
 \end{aligned}$$

由式（4.29b）计算所得的前三阶频率系数随相对质量 $\frac{M}{M_0}$ 变化情况见表4.15。频率变化规律同上。

中心带集中质量的周边自由圆板的频率系数 $\lambda_{mn}$ （ $m=0, D=0.3$ ）

表4.15

$n \backslash M/M_0$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
1	3.014	2.601	2.433	2.341	2.278	2.216
2	6.209	5.059	4.858	4.754	4.712	4.690
3	9.370	7.974	7.886	7.842	7.829	7.823

## 六、带有内部刚性质量块的圆板

一圆板（图4.7）的内部 $r \leq b$ 域为一刚性质量块（质量 $M = \pi \rho_0 h_0 b^2$ ），外边界可为各种边界条件。则其振型解仍为式（4.14）， $r=a$ 处两个外边界条件为式（4.7）或（4.17），而内边界条件，对于轴对称振动应为

$$\frac{\partial W}{\partial r}(b, \theta) = 0 \quad (4.30a)$$

$$2\pi b \left[ Q_r(b, \theta) + \frac{\partial M_{r\theta}}{b \partial \theta}(b, \theta) \right] = -M\omega^2 W(b, \theta) \quad (4.30b)$$

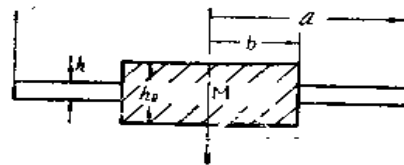


图 4.7

这样类似可建立关于解（4.14）中系数 $A_m, B_m, C_m, D_m$ 的齐次线代方程组及频率方程、频率系数、振型。例如，外边界固定情况下的频率方程为

$$[Y_0(\alpha a)I_1(\alpha a) + I_0(\alpha a)Y_1(\alpha a)] \left\{ 4\alpha a J_1(\alpha a)K_1(\alpha a) \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \alpha^2 ab \frac{\rho_0 h_0}{\rho h} [J_1(ab)K_0(ab) - J_0(ab)K_1(ab)] \Big\} \\
& + [Y_0(aa)K_1(aa) - K_0(aa)Y_1(aa)] \Big\{ -4\alpha a J_1(ab)I_1(ab) \\
& + \alpha^2 ab \frac{\rho_0 h_0}{\rho h} [J_1(ab)I_0(ab) + J_0(ab)I_1(ab)] \Big\} \\
& + [J_0(aa)I_1(aa) + J_1(aa)I_0(aa)] \Big\{ 4\alpha a Y_1(ab) \\
& + \alpha^2 ab \frac{\rho_0 h_0}{\rho h} [Y_1(ab)K_0(ab) - Y_0(ab)K_1(ab)] \Big\} \\
& + [J_0(aa)K_1(aa) - J_1(aa)K_0(aa)] \Big\{ 4\alpha a I_1(ab)Y_1(ab) \\
& - \alpha^2 ab \frac{\rho_0 h_0}{\rho h} [I_1(ab)Y_0(ab) + I_0(ab)Y_1(ab)] \Big\} \\
& = \frac{4\rho_0 h_0}{\pi \rho h} \quad (4.30c)
\end{aligned}$$

式中  $\rho_0 h_0$  为刚性质量块单位面积质量,  $\rho h$  为圆板单位面积质量。方程 (4.30c) 的基频系数某些数值解 [99] 见表 4.16。系统频率将随刚性块质量密度增加而降低, 随刚性块半径增加而增加。

带有内部刚性质量块的外边界固定圆环板基频系数  $\lambda_1$ 

表 4.16

$\frac{\rho_0 h_0}{\rho h}$ \ $b/a$	0.1	0.3	0.5	0.7
0	3.349	3.830	5.130	8.188
0.5	3.280	3.710	4.670	6.681
1.0	3.229	3.580	4.280	5.840
2.0	3.210	3.339	3.840	5.210

## § 4.4 扇形、环扇形、半圆形板

### 一、径边简支的扇形板与环扇形板

若扇形板或环扇形板 (图 4.8) 之径边  $\theta = \pm \frac{\beta}{2}$  为简支边界, 弧边为一般简单或弹性边界。则其振型解仍可取为 § 4.1 及 § 4.2 中整圆板或圆环板的一般解形式, 只是解中周向函数及径向函数中贝塞尔函数的指标不同。

对于扇形板对称振型, 取

$$\begin{aligned}
W_m^{(1)} = & [A_m^{(1)} J_{m'}(\alpha r) \\
& + B_m^{(1)} I_{m'}(\alpha r)] \cos m' \theta \quad (4.31a)
\end{aligned}$$

式中

$$m' = \frac{m\pi}{\beta} \quad (m = 1, 3, 5, \dots) \quad (4.32a)$$

对于扇形板反对称振型, 取

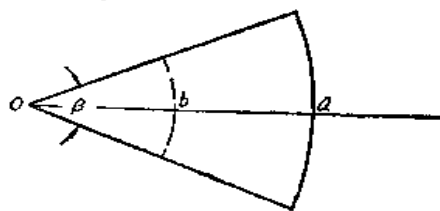


图 4.8

$$W_m^{(2)} = [A_m^{(2)} J_{m'}(ar) + B_m^{(2)} I_{m'}(ar)] \sin m' \theta \quad (4.31b)$$

式中

$$m' = \frac{m\pi}{\beta} \quad (m = 2, 4, 6, \dots) \quad (4.32b)$$

显然, 上述解是满足扇形板基本方程及径边简支边界条件的。则由弧边  $r = a$  的两个边界条件可确立  $A_m$ 、 $B_m$  的两阶齐次线代方程组及相应频率与振型。

对于环扇形板对称振型, 取

$$W_m^{(1)} = [A_m^{(1)} J_{m'}(ar) + B_m^{(1)} I_{m'}(ar) + C_m^{(1)} Y_{m'}(ar) + D_m^{(1)} K_{m'}(ar)] \cos m' \theta \quad (4.31c)$$

对于环扇形板反对称振型, 取

$$W_m^{(2)} = [A_m^{(2)} J_{m'}(ar) + B_m^{(2)} I_{m'}(ar) + C_m^{(2)} Y_{m'}(ar) + D_m^{(2)} K_{m'}(ar)] \sin m' \theta \quad (4.31d)$$

显然, 上述解是满足环扇形板基本方程及径边简支边界条件的。则由弧边  $r = a$ ,  $r = b$  的四个边界条件可确立  $A_m$ 、 $B_m$ 、 $C_m$ 、 $D_m$  的四阶齐次线代方程组及相应频率与振型。例如径边简支、弧边固定的扇形板的基频系数见表4.17。

径边简支、弧边固定扇形板基频系数  $\lambda_1$

表4.17

$\beta$	15°	30°	45°	60°	90°	180°
$\lambda_1$	17.44	10.69	8.347	7.144	5.906	4.611

比较表4.17和表4.4, 可以看出, 具有张角  $\beta$  的径边简支、弧边固定的扇形板的基频系数等于  $m = \frac{360^\circ}{2\beta}$ ,  $n = 0$  的固定整圆板的频率系数。这是因为有  $m$  个节径的圆板振型恰好形成  $2m$  个相等的扇形区, 其张角为  $\beta = \frac{360^\circ}{2m}$ , 径边满足简支条件。因此一般来说, 张角为  $\beta$  的径边简支的扇形板或环扇形板具有  $\overline{m}$  个节径、 $\overline{n}$  个节弧的频率与振型是和同弧边边界的整圆板或环圆板的  $m = \frac{360^\circ}{2\beta} (\overline{m} + 1)$ ,  $n = \overline{n}$  的频率与振型相同。因此各类弧边边界条件的径边简支的扇形板或环扇形板的频率与振型具体数值可参见 § 4.1 或 § 4.2 结果, 并按上述方法确立。但当  $\beta = \frac{360^\circ}{2m}$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ) 时, 则须用式 (4.31), (4.32) 进行具体计算才能给出相应频率与振型。

## 二、弧边固定的扇形板

对于弧边固定、径边为简支或固定的扇形板 (图4.8), 可采用 § 3.5 中康特洛维奇法求解。设无节圆的振型解

$$W(r, \theta) = \left(\frac{r}{a}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right]^s F(\theta) \quad (4.33a)$$

式中

$$s = \pi/\beta \quad (4.33b)$$

则已满足  $r = a$  及  $r = 0$  处边界条件。指数  $s$  反映张角  $\beta$  对振型影响。将式 (4.33) 代入扇形板振型变分方程



$$\delta \int_{\frac{\beta}{2}}^{\frac{\beta}{2}} \int_0^a \left[ \left( \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{\partial W}{r \partial r} + \frac{\partial^2 W}{r^2 \partial \theta^2} \right)^2 - \alpha^4 W^2 \right] r dr d\theta = 0 \quad (4.34)$$

进行变分运算及分部积分, 可得未知函数  $F(\theta)$  所应满足的常微分方程

$$\frac{d^4 F}{d\theta^4} - 2b_0 \frac{d^2 F}{d\theta^2} - (a_0 - b_0^2) F = 0 \quad (4.35)$$

及  $\theta = \pm \frac{\beta}{2}$  处边界条件:

$$\text{固定边:} \quad F = \frac{dF}{d\theta} = 0 \quad (4.36a)$$

$$\text{简支边:} \quad F = \frac{d^2 F}{d\theta^2} = 0 \quad (4.36b)$$

式中

$$a_0 = \frac{4}{9}(s-1)^2 - \frac{2}{3}(s+2)(2s^2+3s+2) + \frac{(\alpha a)^4}{9} \frac{(s+1)(2s+1)(3s+2)}{(s+3)(s+6)(2s+3)} \quad (4.37a)$$

$$b_0 = \frac{2}{3}(s-1) \quad (4.37b)$$

方程 (4.35) 解为

$$F(\theta) = A \operatorname{ch} \alpha_1 \theta + B \operatorname{sh} \alpha_1 \theta + C \cos \alpha_2 \theta + D \sin \alpha_2 \theta \quad (4.37c)$$

而

$$\alpha_2^4 = \sqrt{\sqrt{a_0} \pm b_0} \quad (4.37d)$$

解  $F(\theta)$  中四个常数取决于两个径边  $\theta = \pm \frac{\beta}{2}$  的四个边界条件 (4.36), 从而可解之。例如, 周边全部固定的扇形板按式 (4.37) 可给出频率方程 (4)

$$\operatorname{ch} \alpha_1 \beta \cdot \cos \alpha_2 \beta - \frac{b_0}{\alpha_1 \alpha_2} \operatorname{sh} \alpha_1 \beta \sin \alpha_2 \beta = 1 \quad (4.38)$$

由方程 (4.38) 求得基频系数值随张角变化情况见表 4.18。

周边固定扇形板基频系数  $\lambda_1$

表 4.18

$\beta$	45°	60°	75°	90°	120°	150°
$\lambda_1$	11.27	9.143	8.130	7.266	6.156	5.462

### 三、半圆形板

半圆板的基频系数  $\lambda_1$  表 4.19

各种扇形板的解中取  $\beta = \pi$ , 即可得到相应边界条件的半圆形板解。表 4.19 列出一些常用边界条件半圆板的基频系数。

径边	简支	简支	固定	固定
弧边	简支	固定	固定	自由
$\lambda_1$	3.734	4.611	5.215	2.372

## § 4.5 椭圆形板

### 一、椭圆坐标系薄板方程的一般解

椭圆坐标系薄板振动方程 (2.42) 相应的振型方程也具有其它坐标系类似表达式

$$\nabla^2 \nabla^2 W - \alpha^4 W = 0 \quad (4.39a)$$

$$\alpha^4 = \omega^2 \frac{\rho h}{D} \quad (4.39b)$$

只是其中算子

$$\nabla^2 = \frac{2}{c^2 (\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta)} \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \quad (4.39c)$$

式中  $c$  为半焦距 (图2.6)。方程 (4.39a) 也可改写为

$$\nabla^2 W \pm \alpha^2 W = \frac{2}{c^2 (\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta)} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \right) \pm \alpha^2 W = 0 \quad (4.39d)$$

设振型

$$W(\xi, \eta) = \Xi(\xi)H(\eta) \quad (a)$$

代入式 (4.39d), 为

$$\left[ H \frac{d^2 \Xi}{d\xi^2} + \Xi \frac{d^2 H}{d\eta^2} \right] + 2q_r (\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta) \Xi H = 0 \quad (b)$$

式中

$$q_r = \frac{c^2 \alpha^2}{4} \quad (4.40)$$

也即

$$\frac{\frac{d^2 \Xi}{d\xi^2} \pm 2q_r \operatorname{ch} 2\xi \Xi}{-\Xi} = \frac{\frac{d^2 H}{d\eta^2} \mp 2q_r \cos 2\eta \cdot H}{H} = -a_r \quad (c)$$

式中  $a_r$  为分离常数。则有两个独立的方程

$$\frac{d^2 H}{d\eta^2} + [a_r - (\pm 2q_r) \cos 2\eta] H(\eta) = 0 \quad (4.41a)$$

$$(4.41b)$$

$$\frac{d^2 \Xi}{d\xi^2} - [a_r - (\pm 2q_r) \operatorname{ch} 2\xi] \Xi(\xi) = 0 \quad (4.41c)$$

$$(4.41d)$$

方程 (4.41a), (4.41b) 为马奇叶 (Mathieu) 方程, 而方程 (4.41c), (4.41d) 为变型马奇叶方程。

这四个方程解 [173] 的组合给出了椭圆坐标系薄板振型方程 (4.39) 的一般解

$$\begin{aligned} W(\xi, \eta) = & \sum_{m=0}^{\infty} [A_m C_{em}(\xi, q_r) + C_m F_{em}(\xi, q_r)] c_{em}(\eta, q_r) \\ & + \sum_{m=0}^{\infty} [A'_m C_{em}(\xi, -q_r) + C'_m F_{em}(\xi, -q_r)] c_{em}(\eta, -q_r) \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} [B_m S_{em}(\xi, q_r) + D_m G_{em}(\xi, q_r)] s_{em}(\eta - q_r) \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} [B'_m S_{em}(\xi, -q_r) + D'_m G_{em}(\xi, -q_r)] s_{em}(\eta, q_r) \end{aligned} \quad (4.42)$$

为满足解的周期性, 分离常数  $a_r$  不是任意的, 必须取马奇叶函数本征值。式中

$c_{em}, s_{em}$  为与本征值相应的马奇叶函数。

$C_{em}, S_{em}, F_{em}, F'_{em}, G_{em}, G'_{em}$  分别为与本征值相应的变型马奇叶函数。

$A_m, B_m, C_m, D_m, A'_m, B'_m, C'_m, D'_m$ 等均为待定系数。

## 二、整椭圆板的一般解

取整椭圆板的长、短轴与椭圆坐标系长、短轴重合，长、短轴长各为 $2a$ 与 $2b$ （图4.9）。考虑到整椭圆板焦点轴的连续条件，解(4.42)

中应有 $C_m = D_m = C'_m = D'_m = 0$ ，即整椭圆板的振型解为

$$W(\xi, \eta) = \sum_{m=0}^{\infty} [A_m C_{,m}(\xi, q_T) c_{,m}(\eta, q_T) + A'_m C_{,m}(\xi, -q_T) c_{,m}(\eta, -q_T)] \\ + \sum_{m=1}^{\infty} [B_m S_{,m}(\xi, q_T) s_{,m}(\eta, q_T) + B'_m S_{,m}(\xi, -q_T) s_{,m}(\eta, -q_T)] \quad (4.43)$$

具体求解时，可分为四种振型，它们分别相应为〔174〕：

(1) 对长、短轴均对称振型

$$W = \sum_{m=0,2,4}^{\infty} [A_m C_{,m}(\xi, q_T) c_{,m}(\eta, q_T) + A'_m C_{,m}(\xi, -q_T) c_{,m}(\eta, -q_T)] \quad (4.44a)$$

(2) 对长、短轴均反对称振型

$$W = \sum_{m=2,4,6}^{\infty} [B_m S_{,m}(\xi, q_T) s_{,m}(\eta, q_T) + B'_m S_{,m}(\xi, -q_T) s_{,m}(\eta, -q_T)] \quad (4.44b)$$

(3) 对长轴对称，对短轴反对称

$$W = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} [A_m C_{,m}(\xi, q_T) c_{,m}(\eta, q_T) + A'_m C_{,m}(\xi, -q_T) c_{,m}(\eta, -q_T)] \quad (4.44c)$$

(4) 对长轴反对称、对短轴对称

$$W = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} [B_m S_{,m}(\xi, q_T) s_{,m}(\eta, q_T) + B'_m S_{,m}(\xi, -q_T) s_{,m}(\eta, -q_T)] \quad (4.44d)$$

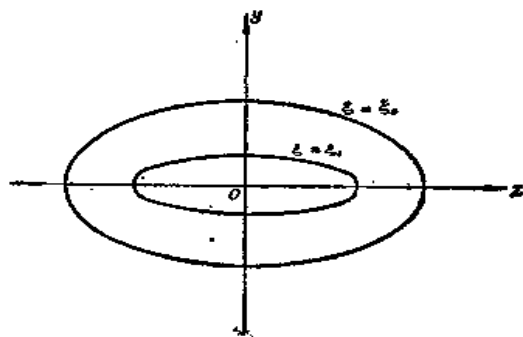


图 4.10

式中两个系数取决于整椭圆板边界 $\xi = \xi_0$ 的两个边界条件。

## 三、椭圆环板的一般解

椭圆环板的内外椭圆边界为 $\xi = \xi_0$ 及 $\xi = \xi_1$ （图4.10），其振型一般解为式(4.42)。具体求解时，也可分为四种振型，它们分别相应为：

(1) 对长、短轴均对称振型

$$W = \sum_{m=0,2,4}^{\infty} [A_m C_{em}(\xi, q_T) c_{em}(\eta, q_T) + C_m F_{em}(\xi, q_T) c_{em}(\eta, q_T) + A'_m C_{em}(\xi, -q_T) c_{em}(\eta, -q_T) + C'_m F_{em}(\xi, -q_T) c_{em}(\eta, -q_T)] \quad (4.45a)$$

(2) 对长、短轴均反对称振型

$$W = \sum_{m=2,4,6}^{\infty} [B_m S_{em}(\xi, q_T) s_{em}(\eta, q_T) + D_m G_{em}(\xi, q_T) s_{em}(\eta, q_T) + B'_m S_{em}(\xi, -q_T) s_{em}(\eta, -q_T) + D'_m G_{em}(\xi, -q_T) s_{em}(\eta, -q_T)] \quad (4.45b)$$

(3) 对长轴对称、对短轴反对称

$$W = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} [A_m C_{em}(\xi, q_T) c_{em}(\eta, q_T) + C_m F_{em}(\xi, q_T) c_{em}(\eta, q_T) + A'_m C_{em}(\xi, -q_T) c_{em}(\eta, -q_T) + C'_m F_{em}(\xi, -q_T) c_{em}(\eta, -q_T)] \quad (4.45c)$$

(4) 对长轴反对称、对短轴对称

$$W = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} [B_m S_{em}(\xi, q_T) s_{em}(\eta, q_T) + D_m G_{em}(\xi, q_T) s_{em}(\eta, q_T) + B'_m S_{em}(\xi, -q_T) s_{em}(\eta, -q_T) + D'_m G_{em}(\xi, -q_T) s_{em}(\eta, -q_T)] \quad (4.45d)$$

式中四个系数取决于椭圆环板两个边界的四个边界条件。

#### 四、简单边界条件的椭圆板

对于椭圆边界  $\xi = \xi_0$  或  $\xi = \xi_1$  为简支、固定、自由等简单边界的整椭圆板或椭圆环板 [174] [177] [198] 可用下列边界条件确定解 (4.44) 或解 (4.45) 中的系数:

$$(1) \text{ 简支 } W = M_{\xi} = 0 \quad (4.46a)$$

$$(2) \text{ 固定 } W = \frac{\partial W}{\partial \xi} = 0 \quad (4.46b)$$

$$(3) \text{ 自由 } M_{\xi} = Q_{\xi} + \frac{\sqrt{2}}{c(\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta)^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial M_{\xi\eta}}{\partial \eta} = 0 \quad (4.46c)$$

例如, 对于周边固定的整椭圆板的基本振型, 按解 (4.44a) 及条件 (4.46b) 可确定其频率方程为

$$\left[ C_{em}(\xi_0, q_T) \frac{dC_{em}}{d\xi}(\xi_0, -q_T) - C_{em}(\xi_0, -q_T) \frac{dC_{em}}{d\xi}(\xi_0, q_T) \right] = 0 \quad (m=0) \quad (4.47)$$

由此方程确定的固定边界整椭圆板基频系数随板的长短轴比值变化情况见表4.20。表中也给出简支 ( $\nu=0.25$ )，自由 ( $\nu=0.3$ ) 边界整椭圆板基频系数值。而基频可按

$$\omega_1 = \frac{\lambda_1^2}{b^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}}$$

计算。

简单边界整椭圆板基频系数 $\lambda_1$ 

表4.20

$a/b$	1.0	1.2	1.4	1.7	2.0	2.5	3.0	5.0
简 支	2.231	2.039	1.942	1.861	1.814	1.769	1.740	1.687
固 定	3.196	2.954	2.821	2.701	2.634	2.582	2.553	2.521
自 由	2.292	2.056	1.806	1.510	1.291	1.038	0.8865	0.5207

## 第五章 非矩形直线边界板的振动

在上两章讨论了矩形与曲线形边界板的固有振动问题。非矩形直线边界板将要在本章内加以讨论。这样,各种形状薄板的固有振动就比较全面了。非矩形直线边界板在工程上常见的主要包括有平行四边形板,菱形板,梯形板,三角形板及其它多边形板〔51〕〔98〕〔100〕〔236〕。对于这些直线边界板,即使对于较为简单的四边简支平行四边形板,也都难于象矩形板、圆板那样,用分离变量法求得问题的一般解。因而对于这些板件,只能针对不同形状、不同边界,采取不同的特殊方法。下面将结合各种形状、边界板件的求解来介绍这些方法。应该指出,这些方法不只适用于各节所列出的板件,有的也可用于本章及其它章节的板件分析;同时,在其它各章节所介绍的方法有的也可以用来求解非矩形直线边界板件。

### § 5.1 用摄动法解周边简支平行四边形板

摄动法是一种有效的数理方程的渐近解法,适用于求解对已有解的简单问题略有改变的复杂问题,并以简单问题的基本解作为首次近似,逐次叠加修正项而成。具体的做法是将该略有改变的小参数作为摄动参数,将方程中各函数均展开为摄动参数的幂级数,并代入基本方程,根据方程两边摄动参数同次幂函数前系数相等的条件,建立各修正项所应满足的方程。其首次近似解即满足相应简单问题的基本方程,并可由首次近似解求取问题第二项修正值,并逐次类推,不断修正,从而使解精确化。

对于平行四边形、菱形、梯形等非矩形四边形板均可以第三章相应边界的矩形板的基本解作为首次近似,以和直角的偏离角为摄动参数进行分析〔253〕。

下面仅以四边简支的平行四边形板为例来说明这一方法在非矩形直线边界板固有振动分析中应用。

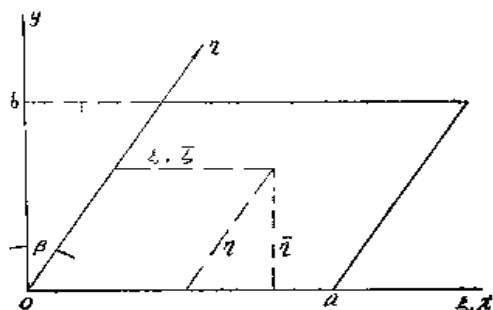


图 5.1

四边简支平行四边形板(图5.1)之两邻边长分别为 $a$ 和 $b$ ,其锐角偏离直角为 $\beta$ 。§ 2.7已经给出,在斜坐标系 $(\xi, \eta)$ 中的基本方程为式(2.60)。为了将基本方程能表达为小参数 $\lg \beta$ 的幂函数,特取如下坐标变换:

$$\bar{\xi} = x - y \lg \beta, \quad \bar{\eta} = y \quad (5.1)$$

则其相应振型方程具有如下形式

$$\begin{aligned} & \left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial \bar{\xi}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{\eta}^2} \right)^2 W - a^4 W \right] - 4 \left( \frac{\partial^4 W}{\partial \bar{\xi}^3 \partial \bar{\eta}} + \frac{\partial^4 W}{\partial \bar{\xi} \partial \bar{\eta}^3} \right) \lg \beta \\ & + 2 \left( 3 \frac{\partial^4 W}{\partial \bar{\xi}^2 \partial \bar{\eta}^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial \bar{\xi}^4} \right) \lg^2 \beta - 4 \left( \frac{\partial^4 W}{\partial \bar{\xi}^3 \partial \bar{\eta}} \right) \lg^3 \beta + \left( \frac{\partial^4 W}{\partial \bar{\xi}^4} \right) \lg^4 \beta = 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

式中 $\alpha^4$ 见式(3.4b)。简支边界条件有

$$\bar{\xi} = 0, \quad a: \quad W = \frac{\partial^2 W}{\partial \bar{\xi}^2} = 0 \quad (5.3a)$$

$$\bar{\eta} = 0, \quad b: \quad W = \frac{\partial^2 W}{\partial \bar{\eta}^2} = 0 \quad (5.3b)$$

显然, 当 $\beta = \text{tg } \beta = 0$ 时, 即变为矩形板的方程与边界条件。因此以 $\text{tg } \beta$ 作为摄动参数, 将方程中振型 $W$ 及频率参数 $\alpha^4$ 均展开为摄动参数的幂级数:

$$\left. \begin{aligned} W &= W_0 + W_1 \text{tg } \beta + W_2 \text{tg}^2 \beta + \dots \\ \alpha^4 &= \alpha_0^4 + \alpha_1^4 \text{tg } \beta + \alpha_2^4 \text{tg}^2 \beta + \dots \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

将上式代入基本方程(5.2)及边界条件(5.3), 展开之, 并由 $\text{tg}^n \beta$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ )之系数为零可得一系列方程组:

$$\left( -\frac{\partial^2}{\partial \bar{\xi}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{\eta}^2} \right)^2 W_0 - \alpha_0^4 W_0 = 0 \quad (5.5a)$$

$$\left( -\frac{\partial^2}{\partial \bar{\xi}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{\eta}^2} \right)^2 W_1 - \alpha_1^4 W_1 = 4 \left( \frac{\partial^4 W_0}{\partial \bar{\xi}^3 \partial \bar{\eta}} + \frac{\partial^4 W_0}{\partial \bar{\xi} \partial \bar{\eta}^3} \right) + \alpha_1^4 W_0 \quad (5.5b)$$

$$\begin{aligned} \left( -\frac{\partial^2}{\partial \bar{\xi}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{\eta}^2} \right)^2 W_2 - \alpha_2^4 W_2 &= 4 \left( \frac{\partial^4 W_1}{\partial \bar{\xi}^3 \partial \bar{\eta}} + \frac{\partial^4 W_1}{\partial \bar{\xi} \partial \bar{\eta}^3} \right) \\ &\quad - 2 \left( 3 \frac{\partial^4 W_0}{\partial \bar{\xi}^2 \partial \bar{\eta}^2} + \frac{\partial^4 W_0}{\partial \bar{\xi}^4} \right) + \alpha_1^4 W_1 + \alpha_2^4 W_0 \end{aligned} \quad (5.5c)$$

及边界条件:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\xi} = 0, \quad a: \quad W_0 &= \frac{\partial^2 W_0}{\partial \bar{\xi}^2} = 0 \\ \bar{\eta} = 0, \quad b: \quad W_0 &= \frac{\partial^2 W_0}{\partial \bar{\eta}^2} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.6a)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\xi} = 0, \quad a: \quad W_1 &= \frac{\partial^2 W_1}{\partial \bar{\xi}^2} = 0 \\ \bar{\eta} = 0, \quad b: \quad W_1 &= \frac{\partial^2 W_1}{\partial \bar{\eta}^2} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.6b)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\xi} = 0, \quad a: \quad W_2 &= \frac{\partial^2 W_2}{\partial \bar{\xi}^2} = 0 \\ \bar{\eta} = 0, \quad b: \quad W_2 &= \frac{\partial^2 W_2}{\partial \bar{\eta}^2} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.6c)$$

方程(5.5a)及边界条件(5.6a)与四边简支矩形板的固有振动方程及边界条件完全一致。根据§3.2分析, 有解

$$W_0(mn) = \sin \frac{m\pi}{a} \bar{\xi} \sin \frac{n\pi}{b} \bar{\eta} \quad (5.7a)$$

$$\alpha_0^4(mn) = \pi^4 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \quad (m, n = 1, 2, 3) \quad (5.7b)$$

对于  $W$  方程 (5.5b) 及边界条件 (5.6b), 可设解

$$W_1(mn) = \sum_{p=1}^r \sum_{q=1}^s A_{pq} \sin \frac{p\pi}{a} \bar{\xi} \sin \frac{q\pi}{b} \bar{\eta} \quad (5.8)$$

将解 (5.7), (5.8) 代入方程 (5.5b), 并在两边乘  $\sin \frac{p\pi}{a} \bar{\xi} \sin \frac{q\pi}{b} \bar{\eta}$  ( $\bar{p} = 1, 2, 3, \dots, r$ ) ( $\bar{q} = 1, 2, 3, \dots, s$ ), 沿板面积分, 给出  $r \times s$  个方程, 可求解 ( $r \times s - 1$ ) 个未知  $A_{pq}$  及未知参数  $\alpha_1^4$ , 从而解出  $W_1(mn)$  及  $\alpha_1^4(mn)$ 。进一步则可用类似方法求解方程 (5.5c) 及边界条件 (5.6c), 给出  $W_2(mn)$  及  $\alpha_2^4(mn)$ , 以此类推。从而可按式 (5.4) 求得第  $(m, n)$  阶频率系数  $\alpha^4(mn)$  及相应振型  $W_{mn}$ 。这种方法当平行四边形偏离矩形即  $\tan \beta$  较小时, 有较快收敛性, 而且容易达到所需要的精度。

按此法计算所得周边简支平行四边形板的基频系数  $\lambda_1$  列于表 5.1, 当  $a = b$  时, 所求得周边简支菱形板的基频系数列于表 5.2, 面板件基本固有频率  $\omega_1 = \frac{\lambda_1^2}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}}$ 。

周边简支平行四边形板的基频系数  $\lambda_1$  表 5.1

$\beta$	$\frac{b \sec \beta}{a}$	1.5	2.0	3.0
20°		3.977	3.709	3.509
30°		4.260	3.986	3.788
45°		5.069	4.782	4.589

周边简支菱形板的基频系数  $\lambda_1$  表 5.2

$\beta$	20°	30°	45°
$\lambda_1$	4.671	4.991	5.898

## § 5.2 用双重三角级数法解周边简支的梯形与三角形板

现在研究周边简支, 具有一般性形状的梯形板 (图 5.2), 当上底长为零时则即为一般性三角形板 [52] [138] [202]。对于这类问题, 可以通过坐标变换 [39], 使在原直角坐标系中的梯形域变换成新坐标系中矩形域, 从而利用满足矩形域周边条件的双重正弦级数进行求解。

设梯形的上底、下底长及高各为  $a$ 、 $b$  及  $H$ 。原直角坐标系原点  $O$  取在两底中点连线与两腰中点连线的交点上, 则  $y$  轴与两底中点连线的夹角  $\alpha$  和  $a$ 、 $b$ 、 $H$  一起就能确定梯形的几何形状。

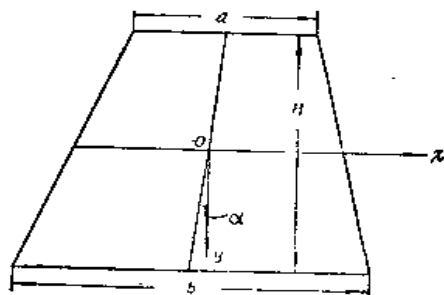


图 5.2

梯形板在直角坐标系的振型方程仍为式 (3.23) 即

$$\nabla^2 \nabla^2 W - \alpha^4 W = 0 \quad (5.9a)$$



而在直角坐标系中边界条件, 根据边界方程, 有

$$y = \pm \frac{H}{2}, \quad x = \pm \frac{1}{4} \left[ (a+b) - 2 \left( \frac{a-b}{H} \pm 2 \operatorname{tg} \alpha \right) y \right],$$

$$W = 0, \quad M_z = 0 \quad (5.9b)$$

为了简化计算, 现引入熟知的薄板-薄膜比拟结果 (详见 § 5.4): 简支多边形的振型和同形状固定薄膜振型相同, 板的特征值等于膜的特征值的平方。那末, 梯形板的方程 (5.9a) 及边界条件 (5.9b) 可简化为同形状梯形膜的下列方程及边界条件:

$$\nabla^2 W + \alpha_m^2 W = 0 \quad (5.10a)$$

及

$$y = \pm \frac{H}{2}, \quad x = \pm \frac{1}{4} \left[ (a+b) - 2 \left( \frac{a-b}{H} \pm 2 \operatorname{tg} \alpha \right) y \right],$$

$$W = 0 \quad (5.10b)$$

而有关系式

$$\alpha^4 = (\alpha_m^2)^2 \quad (5.10c)$$

现引入坐标变换

$$\xi = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{x + y \operatorname{tg} \alpha}{\frac{a+b}{4} - \frac{a-b}{2H} y} \right] \quad (5.11a)$$

$$\eta = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{2y}{H} \right] \quad (5.11b)$$

很容易看出, 原式 (5.10b) 中边界方程在非正交坐标系  $(\xi, \eta)$  中变为简单的  $\xi, \eta = 0, 1$ , 即在  $(x, y)$  坐标系中梯形域变换为  $(\xi, \eta)$  坐标系中矩形域, 从而使问题得以进一步简化。

将式 (5.11) 代入式 (5.10), 给出方程及边界条件为

$$L(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \left[ 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \left( \frac{a-b}{H} \right) \operatorname{tg} \alpha (2\xi - 1) + \left( \frac{a-b}{H} \right)^2 (2\xi - 1)^2 \right] \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \\ + \left[ \frac{a+b}{4H} - \frac{a-b}{4H} (2\eta - 1) \right]^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} + \left[ \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2} \right. \\ \left. + \frac{a-b}{2H} (2\xi - 1) \right] \left[ \frac{a+b}{4H} - \frac{a-b}{2H} (2\eta - 1) \right] \times \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} \\ + \left[ \left( \frac{a-b}{2H} \right) \operatorname{tg} \alpha + \left( \frac{a-b}{2H} \right)^2 (2\xi - 1) \right] \frac{\partial W}{\partial \xi} + \alpha_m^2 \left[ \frac{a+b}{4} \right. \\ \left. - \frac{a-b}{4} (2\eta - 1) \right]^2 W = 0 \quad (5.12a)$$

及

$$\xi = 0, 1, \quad \eta = 0, 1, \quad W = 0 \quad (5.12b)$$

式 (5.12a) 是一变系数偏微分方程, 其求解采取下列近似方法: 设满足边界条件 (5.12b) 的双三角级数解

$$W(\xi, \eta) = \sum_{m=1}^p \sum_{n=1}^q A_{mn} \sin m\pi \xi \sin n\pi \eta \quad (5.13a)$$

代入

$$\int_0^1 \int_0^1 L(\xi, \eta) W(\xi, \eta) d\xi d\eta = 0 \quad (5.13b)$$

从而求得关于待定系数  $A_{mn}$  的  $p \times q$  阶齐次线代方程组, 由系数行列式为零求得关于  $\alpha_m^2$  的频率方程及相应振型系数  $A_{mn}$ , 进一步代入式 (5.10c) 及式 (5.13a) 可求取梯形板的固有频率与振型。

表5.3及表5.4分别给出了按上述方法, 取  $p = q = 6$  时的周边简支梯形板及三角形板的基频系数  $\lambda_1$  的结果 ( $\omega_1 = \frac{\lambda_1^2}{b^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}}$ )。表中给出了不同  $\frac{H}{b}$ ,  $\frac{a}{b}$ ,  $\alpha$  值的板件结果。这些数据表明, 若板件材料常数及底边不变, 随  $\frac{H}{b}$  增加, 频率减少; 随  $\frac{a}{b}$  减小, 频率增加; 随  $\alpha$  增加, 频率增加; 其它参数相同情况下, 三角形板 ( $\frac{a}{b} = 0$ ) 比梯形板频率高; 等腰梯形或三角形板 ( $\alpha = 0$ ) 比非等腰梯形或三角形板 ( $\alpha \neq 0$ ) 频率低。

周边简支梯形板的基频系数  $\lambda_1$ 

表5.3

$\frac{H}{b} \backslash \frac{a}{b} \backslash \alpha$		$0^\circ$	$10^\circ$	$15^\circ$	$20^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$
0.5	0.8	7.200	7.211	7.224	7.244	7.310	7.546
	0.4	7.949	7.964	7.984	8.016	8.125	8.533
1.0	0.8	4.704	4.730	4.764	4.815	4.986	5.565
	0.4	5.549	5.585	5.631	5.701	5.928	6.638
1.5	0.8	4.072	4.108	4.155	4.226	4.455	5.178
	0.4	4.862	4.904	4.959	5.039	5.293	6.049

周边简支三角形板的基频系数  $\lambda_1$ 

表5.4

$\frac{H}{b} \backslash \alpha$	$0^\circ$	$10^\circ$	$15^\circ$	$20^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$
0.5	9.939	9.956	9.978	10.01	10.13	10.54
1.0	6.771	6.803	6.845	6.907	7.111	7.760
1.5	5.722	5.760	5.809	5.882	6.118	6.835

### § 5.3 用双对称法解周边简支正多边形板

具有任意边数的正多边形都具有两组共同的对称轴: 任一边的中垂线 (如图5.3中  $y$  轴) 以及图形中心与任一角点连线 (如图5.3中  $y_1$  轴)。文献[124]指出, 可利用这种图形的双对称性质来求解周边简支的正多边形板的自振特性。

图5.3所示一正  $n$  边形, 边长为  $a$ 。首先将直角坐标系  $xoy$  的原点  $o$  放置于一边中点, 沿该边为  $x$  轴, 沿该边垂线为  $y$  轴。图中  $y$  及  $y_1$  轴均为图形的对称轴, 它们之间夹角为  $\beta = \frac{\pi}{n}$ 。若在  $\triangle AO_1B$  域内求得以  $y$  及  $y_1$  轴对称, 并满足  $\bar{O}\bar{O}_1$  边边界条件的解, 则即为此正多边形的解。

设满足以  $y$  轴对称的振型解为

$$W(x, y) = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} Y(y) \cos \frac{m\pi}{a} x \quad (5.14a)$$

代入振型基本方程

$$\nabla^2 \nabla^2 W - \alpha^4 W = 0 \quad (a)$$

类似 § 3.3, 有解

$$Y(y) = A_m \operatorname{sh} \gamma_{1m} y + B_m \operatorname{sh} \gamma_{2m} y + C_m \operatorname{ch} \gamma_{1m} y + D_m \operatorname{ch} \gamma_{2m} y \quad (5.14b)$$

式中

$$\gamma_{2m}^2 = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \pm \alpha^2} \quad (5.14c)$$

为正实数。根据  $y=0$  边的简支边界条件, 可得  $C_m = D_m = 0$ , 因此有解

$$W(x, y) = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} [A_m \operatorname{sh} \gamma_{1m} y + B_m \operatorname{sh} \gamma_{2m} y] \cos \frac{m\pi}{a} x \quad (5.15)$$

建立新直角坐标系  $x_1 O_1 y_1$ , 其原点  $O_1$  位于角点, 沿图形中心  $A$  及  $O_1$  的连线为  $y_1$  轴, 沿  $O_1 A$  的垂线为  $x_1$  轴。现应用两坐标系的转换公式

$$x = x_1 \cos \beta + y_1 \sin \beta - \frac{a}{2} \quad (5.16a)$$

$$y = y_1 \cos \beta - x_1 \sin \beta \quad (5.16b)$$

将解 (5.15) 转换成解  $W(x_1, y_1)$ 。再进一步根据  $y_1$  轴对称条件 ( $y_1$  轴处转角及剪力为零)

$$x_1 = 0: \frac{\partial W}{\partial x_1} = \frac{\partial^3 W}{\partial x_1^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W}{\partial x_1^2 \partial y_1} = 0 \quad (5.17)$$

给出关于  $A_m, B_m$  的二阶齐次线代方程组, 从而建立频率方程, 求解固有频率及振型。

对于常用的正五边形、正六边形、正八边形板, 按上述方法所解得的基频系数  $\lambda_1$  列于表 5.5, 而基本圆频率  $\omega_1 = \frac{\lambda_1^2}{\alpha^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}}$ 。

周边简支正多边形板基频系数  $\lambda_1$

表 5.5

形 状	正 五 边 形	正 六 边 形	正 八 边 形
$\lambda_1$	3.296	2.639	1.904

若对正多边形作一外接圆, 则其半径  $R = \overline{O_1 A}$ ,  $a = 2R \sin \beta = 2R \sin \frac{\pi}{n}$ , 所以  $\omega_1 = \frac{\lambda_1^2}{R^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}}$ , 而  $\bar{\lambda}_1 = \frac{\lambda_1}{2 \sin \frac{\pi}{n}}$ 。根据表 5.5 所列数据, 可以算出:  $\bar{\lambda}_1|_{n=5} = 2.804$ ,  $\bar{\lambda}_1|_{n=6} =$

2.639,  $\bar{\lambda}_1|_{n=8} = 2.487$ 。而由表 4.1 知, 简支圆板的基频系数  $\lambda_1 = 2.231$ 。显然, 当  $n$  增加时, 解  $\bar{\lambda}_1$  将趋近于  $\lambda_1$ , 即周边简支正多边形板解趋向于简支整圆板解。因此有理由认为, 对各种边界条件正多边形板的各阶频率与振型, 当边数相当多时, 可以取其半径为其外接及内切圆半径平均值的同种边界条件、同阶圆板频率与振型作为其近似解。

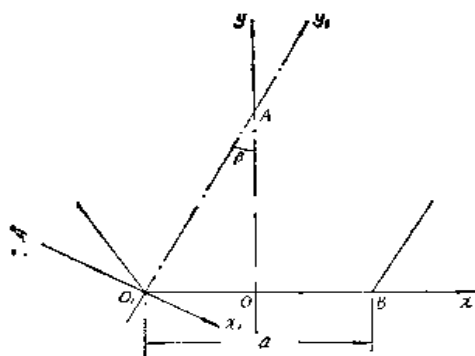


图 5.3

### § 5.4 用薄膜比拟法解周边简支多边形板

薄膜是一种没有抗弯刚度的板件。根据薄膜小挠度理论<sup>[73]</sup>，承受平面内均匀拉力  $T$  的薄膜振动方程为

$$\frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_m}{\partial y^2} = \frac{\rho h}{T} \frac{\partial^2 w_m}{\partial t^2} \quad (5.18a)$$

其振型方程为

$$\nabla^2 W_m + \left( \frac{\rho h \omega^2}{T} \right) W_m = \nabla^2 W_m + \alpha_m^2 W_m = 0 \quad (5.18b)$$

两边进行拉普拉斯算子运算

$$\nabla^2 \nabla^2 W_m + \lambda_m^2 \nabla^2 W_m = \nabla^2 \nabla^2 W_m - \alpha_m^4 W_m = 0 \quad (5.19a)$$

故薄膜振型方程 (5.19a) 和薄板振型方程

$$\nabla^2 \nabla^2 W - \alpha^4 W = 0 \quad (5.19b)$$

完全类似，只是方程中系数含义不一样。若  $W_m$  是任意固定多边形薄膜解，则在边界上满足  $W_m = 0$  条件。按式 (5.18b)，在边界上也有  $\nabla^2 W_m = 0$ ，考虑到边界上处处有  $W_m = 0$ ，所以也有  $\frac{\partial^2 W_m}{\partial n^2} = 0$ 。这就是说， $W_m$  也满足相应板的简支边界条件。因此，只要求出与简支多边形板形状相同的固定薄膜的特征值  $\alpha_m$  及振型  $W_m$ ，就可用来作为简支多边形板的特征值  $\alpha$  及振型  $W$ 。

薄膜方程 (5.18b) 是两阶偏微分方程，它的求解比板的四阶偏微分方程 (5.19b) 容易得多。很早，瑞雷 (Rayleigh) 在他的名著“声的理论”<sup>[214]</sup> 一书中已给出各种形状固定薄膜的基频系数  $\bar{\lambda}_m = \alpha_m \sqrt{F}$  ( $F$  为薄膜面积)，现列于表 5.6 中第一行；再换算为标准基频系数  $\lambda_m = \alpha_m a$  ( $a$  为薄膜特征长度，如圆、扇形的半径，方形、矩形的长边长等)，列于表中第二行；而将上述各章节按薄板振动理论给出的基频系数  $\alpha a$  列于表中第三行，进行比较。可以看出，两者是十分接近的，其差别只是由于原薄膜计算所取项数有限引起的。

各种形状薄膜-薄板的基频系数

表 5.6

形 状		圆 形	半 圆 形	90°圆扇形	方 形	矩形 $\left(\frac{b}{a} = \frac{2}{3}\right)$	正三角形
薄膜	$\alpha_m \sqrt{F}^{[214]}$	$2.404\sqrt{\pi}$	$3.832\sqrt{\pi/2}$	$5.135\sqrt{\pi/4}$	$\sqrt{2}\pi$	$\pi\sqrt{13/6}$	$2\pi\sqrt{\lg 30^\circ}$
理论	$\alpha_m a$	2.404	3.832	5.135	4.443	5.664	7.255
薄板	$\alpha a$	2.231	3.734	5.065	4.443	5.664	7.257
理论	来 源	表4.1	表4.19	表4.1	表3.4	表3.4	表5.4

### § 5.5 用配点法解简单边界的平行四边形、菱形、梯形、三角形板

配点法是求解薄板自振特性的一种常用的近似方法。其基本原理是选择一含有特定系数的解析函数组合作为板的振型，它仅满足部份方程及边界条件，而对于余下未曾满足的方程或边界条件，只取板上若干点来加以满足，以此来确立所设振型中待定系数的线代方程组，从而求取频率与振型。

对于不同形状、不同边界的板件，所选用的函数、配点位置及处理方法差异较大，下面将分别加以叙述。这里也列出了文献[48]，[52]，[53]，[54]，[137]，[275]等所给出的应用这一方法的一些具体结果。

### 一、周边简支菱形板

边长为  $a$  的周边简支菱形板上建立如图 5.4 所示的直角坐标系  $(x, y)$  及极坐标系  $(r, \theta)$ ，则其振型方程为

$$\nabla^2 \nabla^2 W - \alpha^4 W = 0 \quad (a)$$

现只考虑其以  $x = c$  轴对称的振型，则其边界条件可用两种坐标系混合表示为

$$\theta = \pm \frac{\beta_0}{2}; W = M_\theta^* = 0 \quad (5.20a)$$

$$x = c; \frac{\partial W}{\partial x} = V_x^* = 0 \quad (5.20b)$$

而且只需考虑  $\triangle AOB$  域。方程 (a) 及边界条件 (5.20a) 是和 § 4.4 中径边简支扇形板

图 5.4

(图 4.8) 一样，因此我们仍然可以取用其解 (4.31)，(4.32) 的形式。例如以  $y = 0$  轴对称的振型解为

$$W = \sum_{m=1,3,5} [A_m J_{m'}(ar) + B_m I_{m'}(ar)] \cos \frac{m\pi}{\beta_0} \theta \quad (5.21a)$$

$$m' = \frac{m\pi}{\beta_0} (m = 1, 3, 5, \dots) \quad (5.21b)$$

所不同的是，现在另一需要满足的边界不是弧边  $r = a$ ，而是直线边界  $x = c$ ，因此解 (5.21a) 采用了多项和的形式。如果我们取的是  $p$  项，则解中有  $2p$  个待定常数，那末我们在  $x = c$  上  $0 \leq y < a \sin \frac{\beta_0}{2}$  内取  $p$  个点满足边界条件 (5.20b)，从而建立关于  $A_m, B_m$  的  $2p$  阶齐次线代方程组，求取各阶频率与振型。当然，当点数  $p$  为无穷多时，则可完全满足边界条件 (5.20b)，而解 (5.21a) 为无穷多项级数和，而趋于精确解，相应板件也有无穷多个固有频率与相应振型解。

对于具有不同顶角  $\beta_0$  的周边简支菱形板，取  $p = 3$ ，计算所得基频系数  $\lambda_1$  ( $\omega_1 = \frac{\lambda_1^2}{c^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}}$ ) 列于表 5.7。

周边简支菱形板的基频系数  $\lambda_1$

表 5.7

$\beta_0$	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\lambda_1$	7.619	5.989	4.995	4.319	3.824	3.445	3.142

### 二、周边简支平行四边形板

对于周边简支的平行四边形板，将  $x$  轴置于一边界上，并想象在  $x$  轴另一侧将板对称扩大一倍，在扩大域内振型与原板域振型反对称。现在取用张角为  $2\beta_0$  的扇形板的反对称振

型, 式 (4.31b) 及式 (4.32b)。有

$$W = \sum_{m=1}^p [A_m J_{m'}(ar) + B_m I_{m'}(ar)] \sin \frac{m\pi}{\beta_0} \theta \quad (5.22a)$$

$$m' = \frac{m\pi}{\beta_0} \quad (5.22b)$$

则将满足基本方程 (a) 及  $\theta = 0, \theta = \beta_0$  的简支边界。解 (5.22a) 中  $2p$  个待定常数  $A_m B_m$  将由板的对称或反对称条件确定。例如对于包含基本振型的极对称振型可在板内选择  $p$  组 (以对角线交点为极点的) 极对称点, 建立  $2p$  个极对称方程:

$$\begin{aligned} W(A_1) &= W(A'_1), \quad \frac{\partial W}{r \partial \theta}(A_1) = \frac{\partial W}{r \partial \theta}(A'_1) \\ W(A_2) &= W(A'_2), \quad \frac{\partial W}{r \partial \theta}(A_2) = \frac{\partial W}{r \partial \theta}(A'_2) \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (5.23)$$

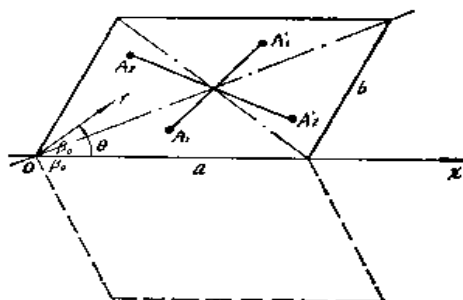


图 5.5

这样可以给出  $2p$  阶齐次线代方程组, 求取各阶频率与振型。

对于具有不同顶角  $\beta_0$  和邻边比  $\frac{a}{b}$  的周边简支平行四边形板, 取  $p = 2$ , 并将  $A_1, A_2$  落在对角线上时计算所得基频系数  $\lambda_1$  ( $\omega_1 = \frac{\lambda_1^2}{b^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}}$ ) 列于表 5.8。当  $\beta_0 = 90^\circ, 60^\circ, 45^\circ$  时分别和较为精确的表 3.4, 表 5.1, 表 5.2 结果相比, 是有一定误差的, 一般均偏低。

周边简支平行四边形板的基频系数  $\lambda_1$  表 5.8

$a/b \backslash \beta_0$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
1.0	5.648	4.868	4.517	4.449
1.5	4.604	4.012	3.782	3.768
2.0	4.074	3.647	3.464	3.460

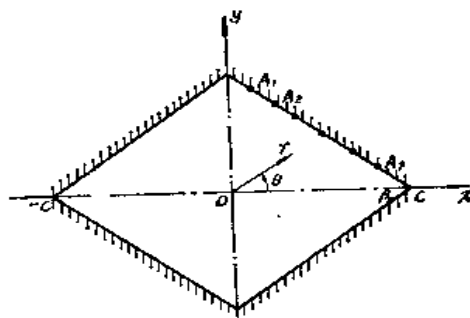


图 5.6

### 三、周边固定菱形板

对于周边固定的菱形板, 将直角坐标系及极坐标系原点置于板的中心, 如图 5.6 所示。取振型为满足方程 (a) 的整圆板解 (4.6) 的形式, 即

$$W = \sum_m [A_m J_m(ar) + B_m I_m(ar)] \cos m\theta \quad (5.24a)$$

由于现在的边界不是整圆板那样  $r = a$  的弧边, 而是直线边界, 因此解 (5.24a) 采用了有限项和的形式。在 § 4.1 中已经讨论过, 解 (5.24a) 已保证了在  $r = 0$  处有限, 对  $x$  轴对称。若进一步再取

$$m = 0, 4, 8, \dots, 4(p-1) \quad (5.24b)$$

则又保证了解对  $y$  轴的对称, 因此只需再满足第一象限的固定边界条件:

$$y = (c - x) \operatorname{tg} \frac{\beta_0}{2}; \quad W = \frac{\partial W}{\partial n} = 0 \quad (5.25 a)$$

为此在边界上选择  $p$  个点:  $A_1, A_2, \dots, A_p$ , 满足条件

$$W(A_1) = \frac{\partial W}{\partial n}(A_1) = W(A_2) = \frac{\partial W}{\partial n}(A_2) = \dots = W(A_p) = \frac{\partial W}{\partial n}(A_p) = 0 \quad (5.25 b)$$

从而建立解 (5.24 a) 中  $2p$  个待定常数  $A_m, B_m$  的齐次线代方程组, 求取相应频率与振型。

对于具有不同顶角  $\beta_0$  的周边固定菱形板, 取  $p = 4$  时, 计算所得基频系数  $\lambda_1$  ( $\omega_1 = \frac{\lambda_1^2}{c_z} \sqrt{\frac{D}{\rho h}}$ ) 列于表 5.9。

周边固定菱形板的基频系数  $\lambda_1$ 

表 5.9

$\beta_0$	$30^\circ$	$40^\circ$	$50^\circ$	$60^\circ$	$70^\circ$	$80^\circ$	$90^\circ$
$\lambda_1$	10.36	8.241	6.859	5.887	5.187	4.658	4.243

#### 四、周边简支等腰梯形及三角形板

对于周边简支的等腰梯形板, 以下底边中点为原点建立直角坐标系 (图 5.7)。若梯形的高为  $H$ , 上底为  $a$ , 下底为  $b$ , 两腰夹角为  $2\beta$ , 两腰交点到上底边距为  $c$ , 则可取振型解为

$$W(x, y) = \cos \left[ \frac{\pi \operatorname{ctg} \beta}{2(H + c - y)} x \right] \times \sum_{m=1,2,3}^p A_m \sin m\pi \left( 1 - \frac{y}{H} \right) \quad (5.26)$$

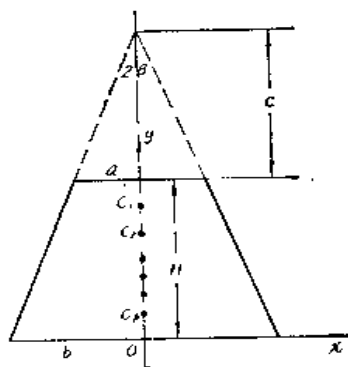


图 5.7

将满足四周边  $W = 0$  及大部份周边  $\frac{\partial^2 W}{\partial n^2} = 0$  的条件, 并以  $y$  轴对称。现在进一步在  $y$  轴上取  $p$  个点:  $c_1, c_2, \dots, c_p$ , 在上使其满足基本方程

$$\nabla^2 \nabla^2 W(c_s) - a^4 W(c_s) = 0 \quad (s = 1, 2, 3, \dots, p) \quad (5.27)$$

将解 (5.26) 代入方程 (5.27), 可建立关于  $p$  个待定常数  $A_m$  的线代方程组, 从而求取频率与振型。

⑧

周边简支等腰梯形板的基频系数  $\lambda_1$ 

表 5.10

$\beta \backslash a/H$	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$15^\circ$	3.126	3.568	4.072	4.553	5.046
$25^\circ$	3.555	4.048	4.520	4.977	5.513
$35^\circ$	4.179	4.585	5.026	5.540	6.035
$45^\circ$	5.007	5.133	5.611	6.212	6.904

对于具有不同形状参数 ( $\beta, \frac{a}{H}$ ) 的周边简支等腰梯形板, 取  $p = 3$ , 计算所得基频系数

$\lambda_1 \left( \omega_1 = \frac{\lambda_1^2}{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \right)$  列于表 5.10; 当  $\alpha = 0$  时, 等腰三角形的相应结果列于表 5.11。

周边简支等腰三角形板的基频系数  $\lambda_1$ 

表 5.11

$2\beta$	$30^\circ$	$40^\circ$	$50^\circ$	$60^\circ$	$70^\circ$	$80^\circ$	$90^\circ$
$\lambda_1$	2.609	2.775	3.078	3.481	3.878	4.334	4.957

### 五、周边固定三角形板

对于周边固定的任意形状三角形板, 可取如图 5.8 所示的斜坐标系  $(\xi, \eta)$ , 其中坐标原点落于三角形的顶点,  $\xi$  坐标轴通过原点及底边中点,  $\eta$  坐标轴平行底边。设三角形高为  $H$ , 底边为  $b$ , 中线长  $c$ , 高与中线的夹角为  $\beta$ 。

由式 (2.60) 知, 在斜坐标系的振型基本方程为

$$\frac{1}{\cos^4 \beta} \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2 \sin \beta \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right)^2 W - \alpha^4 W = 0 \quad (b)$$

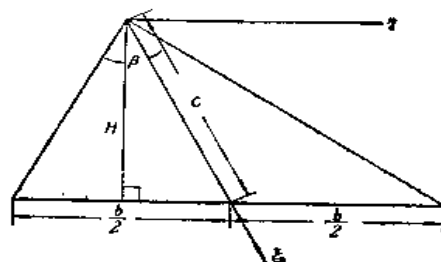


图 5.8

边界条件为

$$\xi = c, \eta = \pm \frac{b}{2c} \xi; \quad W = \frac{\partial W}{\partial \eta} = 0 \quad (5.28)$$

现取满足边界条件 (5.28) 的解为

$$W(\xi, \eta) = \sum_{m=1,3,5} \sum_{n=1,2,3} A_{mn} \left( \xi^2 - \frac{4c^2}{b^2} \eta^2 \right) \sin \frac{\pi}{c} \xi \sin \frac{n\pi}{c} \xi \cos \frac{m\pi c}{b} \frac{\eta}{\xi} \quad (5.29)$$

其中  $A_{mn}$  为  $p$  个待定系数。则在  $\xi$  轴取  $p$  个点, 在上使其满足方程 (b), 建立  $p$  阶齐次线代方程组, 求取频率与振型。

对于不同形状的周边固定三角形板, 取  $m = 1, n = 1, 2$ , 计算所得基频系数  $\lambda_1 \left( \omega_1 = \frac{\lambda_1^2}{b^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \right)$  列于表 5.12。

周边固定三角形板的基频系数  $\lambda_1$ 

表 5.12

$\beta$ \ $H/b$	0.5	1.0	1.5	2.0
$0^\circ$	13.27	9.325	8.486	8.002
$25^\circ$	13.71	10.15	9.522	8.559

### 六、各种边界条件的等腰三角形板

表 5.12 中所列  $\beta = 0^\circ$  的结果即为周边固定等腰三角形板的基频系数, 在表 5.4 中也已给



出了周边简支等腰三角形板的基频系数, 而对于其它边界条件的等腰三角形板也类似可采取上述配点法求得问题的近似解。这时, 只要在图5.8中取 $\beta = 0$ , 斜坐标系变为直角坐标系,  $c = H$ , 基本方程(6)成立, 对不同边界条件给出满足 $\xi = H$ 及 $\eta = \pm \frac{b}{2H}\xi$ 处相应条件的不同振型表达式[53][54][275], 通过板内数点满足基本方程, 建立待定系数的联立方程, 求取频率与振型。表5.13列出了四种边界条件等腰三角形板的基频系数 $\lambda_1$ 的计算结果 ( $\omega_1 = \frac{\lambda_1^2}{H^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}}$ )。

各种边界条件等腰三角形板的基频系数 $\lambda_1$ 

表5.13

$H/b$	0.5	1.0	1.5	2.0
腰固定底简支	5.630	8.366	11.27	14.39
腰简支底固定	5.873	7.416	9.329	11.05
腰固定底自由 ( $\nu = 0.3$ )	3.873	6.674	9.640	12.77
腰简支底自由 ( $\nu = 0.3$ )	2.564	4.281	6.246	8.336

## § 5.6 用梁函数组合法解各种形状后掠板及各种边界条件平行四边形板

在第三章中我们曾用梁函数组合法有效地求解了各种边界条件组合的矩形板的固有振动问题。这一方法也将同样能适用于求解各种形状(包括平行四边形、菱形、梯形、三角形等)一边固定、其余边界自由的后掠板[5][18][189]以及四边为各种简单边界组合的平行四边形板[196], 只是需应用相应的非正交坐标系。

### 一、平行四边形、菱形后掠板

对于一边固定、三边自由的平行四边形板(图5.1), 采用斜坐标系 $(\xi, \eta)$ , 两坐标轴 $\xi, \eta$ 分别平行于平行四边形两组对边, 则其振型边界条件分别为

$$\xi = 0: \quad W = \frac{\partial W}{\partial \eta} = 0 \quad (5.30a)$$

$$\xi = a: \quad M_\xi = V_\xi = 0 \quad (5.30b)$$

$$\eta = 0, b: \quad M_\eta = V_\eta = 0 \quad (5.30c)$$

设满足位移边界条件之振型解

$$W(\xi, \eta) = \sum_{m=1}^p \sum_{n=1}^q A_{mn} \bar{\Phi}_m(\xi) \bar{\Psi}_n(\eta) \quad (5.31)$$

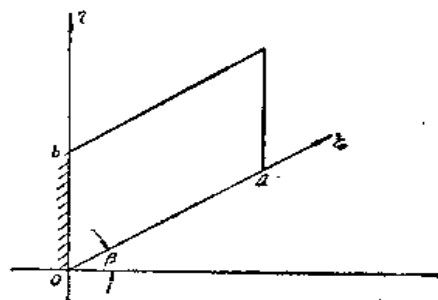


图 5.9

式中,  $\Phi_m(\xi)$ 为第 $m$ 阶悬臂梁振型函数;  $\bar{\Psi}_n(\eta)$ 为第 $n$ 阶自由-自由梁振型函数, 均详见式(3.18)。将解代入斜坐标系振型变分方程, 按式(2.63), (2.64)为

$$\delta \iint \left\{ \frac{1}{\cos^4 \beta} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} - 2 \sin \beta \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \right)^2 - \frac{2(1-\nu)}{\cos^2 \beta} \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} - \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} \right)^2 \right] - \alpha^4 W^2 \right\} \times \cos \beta d\xi d\eta = 0 \quad (5.32)$$

经变分运算, 和 § 3.6 类似, 可建立关于待定系数  $A_{mn}$  所应满足的线代方程组

$$\sum_{m=1}^p \sum_{n=1}^q [C_{mn}^{ij} - (\alpha b)^4 \delta_{mn}^{ij}] A_{mn} = 0 \quad \left( \begin{matrix} i = 1, 2, 3, \dots, p \\ j = 1, 2, 3, \dots, q \end{matrix} \right) \quad (5.33)$$

式中,  $C_{mn}^{ij}$  为梁函数或其导数乘积的积分值 (详见附录 I) 的函数和后掠角  $\beta$  有关,  $\delta_{mn}^{ij}$  见式 (3.49b)。由齐次方程 (5.33) 可求取特征值与特征向量, 则可算得后掠板的频率与振型。

按式 (5.33), 取十八项, 计算所得后掠菱形板的频率系数  $\lambda_n$  列于表 5.14, 而  $\omega_n = \frac{\lambda_n^2}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}}$ 。可以看出, 对于同样边长的后掠菱形板, 当后掠角增加时, 频率可能提高或降低, 这与相应振型节线方向有关。头两阶的振型系数列于表 5.15。可以看出, 对于平行四边形或菱形板, 取用梁函数组合形式的振型解 (5.31), 其收敛性也是相当好的。

菱形后掠板的频率系数  $\lambda_n$  ( $\nu = 0.3$ )

表 5.14

$\beta \backslash n$	1	2	3	4	5	6
5°	1.867	2.923	1.633	5.197	5.607	7.349
10°	1.878	2.936	4.664	5.178	5.708	7.294
15°	1.898	2.957	4.722	5.145	5.847	7.232
20°	1.918	2.993	4.807	5.115	6.029	7.186
25°	1.949	3.042	4.910	5.104	6.251	7.159
30°	1.987	3.107	5.046	5.112	6.516	7.183

菱形后掠板的振型系数

表 5.15

$\beta$	$\lambda_n$	$A_{11}$	$A_{12}$	$A_{21}$	$A_{22}$	$A_{31}$	$A_{32}$	$A_{41}$	$A_{42}$	$A_{51}$
15°	$\lambda_1$	1.000	-0.113	-0.010	-0.022	-0.004	-0.0001	-0.002	-0.001	-0.0006
	$\lambda_2$	0.116	1.000	0.089	0.104	-0.072	-0.004	-0.038	-0.008	-0.007
30°	$\lambda_1$	1.000	-0.229	-0.034	-0.039	0.009	-0.0006	0.007	0.001	0.002
	$\lambda_2$	0.239	1.000	0.179	0.049	-0.145	-0.014	-0.071	-0.025	-0.008

## 二、梯形后掠板

对于下底边固定、三边自由的梯形板, 首先建立一组如图 5.10 所示的非正交坐标系  $(u, v)$ , 原点位于梯形两侧腰交点  $O_1$ ;  $u = \text{const.}$  是一组平行梯形上、下底边的平行线,  $u = 1$  与梯形下底边相重;  $v = \text{const.}$  是一组从原点  $O_1$  出发的射线,  $v = 0$  与梯形上、下底边的垂线相重,  $v = 1$  与顶角较大的一侧腰相重。

非正交坐标系  $(u, v)$  与直角坐标系  $(x, y)$  间的转换关系为

$$u = 1 - \frac{y}{H+C}, \quad v = \frac{x \operatorname{ctg} \beta_2}{H+C-y} \quad (5.34)$$

式中,  $c$  为原点  $O_1$  到上底边垂距,  $H$  为梯形的高。两侧腰顶角分别为  $\beta_1, \beta_2$ , 上、下底边长

分别为  $a$  和  $b$ 。

梯形后掠板在  $uO_1v$  坐标系中的振型边界条件为

$$u=1: W=\frac{\partial W}{\partial n}=0 \quad (5.35a)$$

$$u=u_0=\frac{C}{H+C}: M_u=V_u=0 \quad (5.35b)$$

$$v=1, v=v_0=-\operatorname{tg}\beta_1\operatorname{ctg}\beta_2: M_v=V_v=0 \quad (5.35c)$$

在直角坐标系的振型变分方程中代入变换式 (5.34)，可得非正交坐标系  $uO_1v$  中的振型变分方程。例如，当  $\beta_1=0$  时有

$$\begin{aligned} \delta \int_0^1 \int_{u_0}^1 \left\{ u \left( \frac{\partial^2 W}{\partial u^2} \right)^2 + \frac{(v^2 + \operatorname{ctg}^2 \beta_2)^2}{u^3} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial v^2} \right)^2 + 2 \left( \frac{v^2}{u} + \frac{v}{u} \operatorname{ctg}^2 \beta_2 \right) \frac{\partial^2 W}{\partial u^2} \frac{\partial^2 W}{\partial v^2} \right. \\ - 4v \frac{\partial^2 W}{\partial u^2} \frac{\partial^2 W}{\partial u \partial v} - 4 \left( \frac{v^3}{u^2} + \frac{v}{u^2} \operatorname{ctg}^2 \beta_2 \right) \frac{\partial^2 W}{\partial v^2} \frac{\partial^2 W}{\partial u \partial v} + \frac{4v^2 + 2(1-v)\operatorname{ctg}^2 \beta_2}{u} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial u \partial v} \right)^2 \\ + 4 \frac{v}{u} \frac{\partial^2 W}{\partial u^2} \frac{\partial W}{\partial v} + 4 \left( \frac{v^3}{u^2} + \frac{v}{u^2} \operatorname{ctg}^2 \beta_2 \right) \frac{\partial^2 W}{\partial v^2} \frac{\partial W}{\partial v} - \frac{8v^2 + 4(1-v)\operatorname{ctg}^2 \beta_2}{u^2} \frac{\partial^2 W}{\partial u \partial v} \frac{\partial W}{\partial v} \\ \left. + \frac{4v^2 - 2(1-v)\operatorname{ctg}^2 \beta_2}{u^3} \left( \frac{\partial W}{\partial v} \right)^2 - \alpha^4 (C+H)^4 u W^2 \right\} du dv = 0 \end{aligned} \quad (5.36)$$

设满足位移边界条件之振型解为

$$W(u, v) = \sum_{m=1}^p \sum_{n=1}^q A_{mn} U_m(u) V_n(v) \quad (5.37)$$

式中， $U_m(u)$  为第  $m$  阶  $u=1$  处固定， $u=u_0$  处自由的梁振型函数， $V_n(v)$  为  $v=v_0$  处及  $v=1$  处均为自由的第  $n$  阶梁振型函数，可根据式 (3.18) 确定。将此解代入方程 (5.36)，经变分运算，可建立和式 (5.33) 类似的齐次线代方程组及相应的频率与振型解。

按上法计算所得的直角梯形后掠板频率系数  $\lambda_n$  列于表 5.16，而  $\omega_n = \frac{\lambda_n^2}{b^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}}$ 。

### 三、三角形后掠板

直角梯形后掠板频率系数

$$\left( \operatorname{tg} \beta_2 = \frac{1}{2}, v = 0.3 \right) \quad \text{表 5.16}$$

$c/b$	0	0.4	0.8	1.2
$\lambda_1$	1.337	1.455	1.811	2.145
$\lambda_2$	2.303	2.449	2.580	2.782

当图 5.10 中  $C$  取为零，梯形后掠板即化为三角形后掠板时，上述方法可用来求解三角形后掠板的自振特性。对于等腰三角形后掠板，其边界为： $v=\pm 1$  及  $u=1$ ；对于直角三角形后掠板其边界为： $v=0, 1$  及  $u=1$ 。对于这两种情况下不同高底比的头两阶频率系数

$\lambda_n$  结果分别见表 5.17 及表 5.18，而  $\omega_n = \frac{\lambda_n^2}{b^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}}$

### 四、各种边界条件的平行四边形板

对于四边边界为简支、固定之一的各种边界条件平行四边形板同样可采用梁函数组合解 (5.31) 及斜坐标系  $(\xi, \eta)$  (图 5.9) 求解，只是  $\bar{\Phi}_m(\xi)$ ， $\bar{\Psi}_n(\eta)$  分别为  $\xi, \eta$  方向两端边

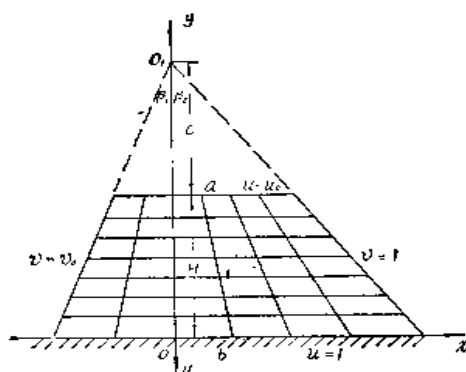


图 5.10

界条件相应的  $m$  及  $n$  阶梁振型函数。同时, 根据具有固定、简支边界板变形能的简化表达式 (2.14d), 有振型变分方程:

等腰三角形后掠板频率系数 ( $\nu = 0.3$ ) 表5.17

$H/b$	1	2	4	7
$\lambda_1$	2.674	1.334	0.6652	0.3797
$\lambda_2$	5.549	2.771	1.384	0.7907

直角三角形后掠板频率系数 ( $\nu = 0.3$ ) 表5.18

$H/b$	4	7
$\lambda_1$	0.6431	0.3752
$\lambda_2$	1.342	0.7861

$$\delta \iint_A \left\{ \frac{1}{\cos^4 \beta} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} - 2 \sin \beta \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \right)^2 - \alpha^4 W^2 \right\} \cos \beta d\xi d\eta = 0 \quad (5.38)$$

将振型解 (5.31) 代入方程 (5.38), 进行变分运算, 可得齐次线代方程组

$$\sum_{m=1}^p \sum_{n=1}^q [C_{mn}^{kl} - (\alpha a)^4 \delta_{mn}^{kl}] A_{mn} = 0 \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, 3, \dots, p \\ j = 1, 2, 3, \dots, q \end{pmatrix} \quad (5.39a)$$

式中

$$\begin{aligned} C_{mn}^{kl} = & \frac{1}{\cos^4 \beta} \left\{ E_{im}^{22} F_{jn}^{00} + \left( \frac{a}{b} \right)^4 E_{im}^{00} F_{jn}^{22} \right. \\ & - 2 \left( \frac{a}{b} \right) \sin \beta [E_{im}^{21} F_{jn}^{01} + E_{im}^{12} F_{jn}^{10} + \left( \frac{a}{b} \right)^2 (E_{im}^{10} F_{jn}^{12} + E_{im}^{01} F_{jn}^{21})] \\ & \left. + 2 \left( \frac{a}{b} \right)^2 (1 + 2 \sin^2 \beta) E_{im}^{11} F_{jn}^{11} \right\} \end{aligned} \quad (5.39b)$$

而

$$\begin{aligned} E_{im}^{kl} &= \int_0^a \overline{\Phi}_{im}^{(k)}(\xi) \overline{\Phi}_{im}^{(l)}(\xi) d\xi \\ F_{jn}^{kl} &= \int_0^b \overline{\Psi}_{jn}^{(k)}(\eta) \overline{\Psi}_{jn}^{(l)}(\eta) d\eta \end{aligned} \quad (k, l = 0, 1, 2) \quad (5.39c)$$

式中上角标 ( $k$ ), ( $l$ ) 分别代表对函数取  $k$  及  $l$  阶导数。式 (5.39c) 中有关积分值可参见附录 I。

对于各种边界条件的菱形板按上述诸式所算得的基频系数  $\lambda_1$  ( $\omega_1 = \frac{\lambda_1^2}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}}$ ) 列于表 5.19。从表中可以看出, 各种边界条件板件随倾角  $\beta$  增加, 基频都是增加的。

各种边界条件菱形板的基频系数  $\lambda_1$ 

表5.19

边界条件 \ $\beta$	0°	5°	10°	15°	20°	25°	35°	45°
一边固定三边简支	4.863	4.279	4.930	5.017	5.145	5.319	5.846	6.722
邻边固定邻边简支(1)	5.201	5.216	5.267	5.354	5.484	5.661	6.194	7.077
邻边固定邻边简支(2)	5.201	5.221	5.276	5.370	5.507	5.692	6.251	7.172
对边固定对边简支	5.380	5.399	5.454	5.550	5.686	5.875	6.441	7.374
三边固定一边简支	5.642	5.660	5.717	5.814	5.956	6.148	6.726	7.678
四边固定	5.999	6.018	6.078	6.180	6.329	6.529	7.131	8.119

注: (1) 相同边界两边的夹角为锐角 (2) 相同边界两边的夹角为钝角。

## § 5.7 用等面积法估算任意形状板的固有频率

在以上第三、四、五章各节中我们讨论了具有各种形状、各种边界的薄板的固有振动问题，但这些板件还都属于几何形状比较规整的，而且因板的几何形状不同需采用不同求解方法。对于具有任意（折线或曲线）形状的薄板<sup>[205][207]</sup>，当然很难求得一般性的精确解，但可以给出一种根据任意形状板的面积估算板的各阶频率的统一方法。这样就可为薄板的固有振动问题提供一组较为全面的计算方法。

文献[208]，[142]，[207]分别证明了下列三条固有频率的下限定理：

1. 周边简支的任意形状薄板基频的下限是同面积简支圆板的基频；
2. 周边固定的任意形状薄板基频的下限是同面积固定圆板的基频；
3. 部分固定、部分简支的任意形状薄板第  $n$  阶固有频率的下限是面积为其  $\frac{1}{n^2}$  的简支圆板的基频。

根据上述定理很容易给出任意形状薄板的固有频率估算公式。设任意形状薄板的面积为  $F$ ，则

1. 周边简支的任意形状薄板的基频

$$\omega_{s1} \geq \frac{(2.231)^2}{F/\pi} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} = \frac{15.64}{F} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad (5.40a)$$

2. 周边固定的任意形状薄板的基频

$$\omega_{s1} \geq \frac{(3.196)^2}{F/\pi} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} = \frac{32.09}{F} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad (5.40b)$$

3. 部份固定、部份简支的任意形状薄板的第  $n$  阶固有频率

$$\omega_n \geq \frac{(2.231)^2}{F/(n\pi)} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} = 15.64 \frac{n}{F} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad (5.40c)$$

下面我们将上面各章中已经讨论过的各种形状、各种边界板件的各阶固有频率结果化为式 (5.40) 中无量纲形式  $\bar{\lambda}_n^2 = \omega_n \frac{F}{n} \sqrt{\frac{\rho h}{D}}$  与式 (5.40) 的下限进行比较列于表 5.20，表 5.21，表 5.22。很明显，所列的全部结果均满足式 (5.40) 所给出的关系式的。而且几何形状越接近圆形，则值越接近下限。

各种形状周边简支板件的基频系数  $\bar{\lambda}_1^2$

表 5.20

正方形板	矩形板 $\left(\frac{b}{a}=\frac{2}{3}\right)$	平行四边形板 $\left(\frac{\beta=30^{\circ}}{\frac{b}{a}=1.5}\right)$	等腰梯形板 $\left\{\begin{array}{l}\frac{H}{b}=1 \\ \frac{a}{b}=0.8\end{array}\right.$	三角形板 $\left(\frac{\alpha=0}{\frac{H}{b}=1}\right)$	
19.74	21.39	23.57	19.91	22.92	
正五边形板	正六边形板	正八边形板	半圆形板	椭圆形板 $\left(\frac{a}{b}=2\right)$	式(5.40a)的下限
18.69	18.09	17.50	21.90	20.68	15.64

值得指出，式 (5.40) 给出的是板件固有频率的下限，而在第七章中将要介绍的基于变分原理的各种近似解法又大多给出板件固有频率的上限。这样，将可为工程结构计算提供可供实用的固有频率范围的估值。

各种形状周边固定板件的基频系数  $\bar{\lambda}_1$ 

表5.21

正方形板	矩形板 ( $\frac{b}{a} = \frac{2}{3}$ )	平行四边形板 ( $\beta = 30^\circ$ $\frac{b}{a} = 1.5$ )		菱形板 ( $\beta_0 = 60^\circ$ )
35.99	40.52	45.48		46.86
三角形板 ( $\frac{H}{b} = 1$ )	扇形板 ( $\beta = 60^\circ$ )	半圆形板	椭圆形板 ( $\frac{a}{b} = 2$ )	式(5.40b)的下限
43.48	45.71	42.72	43.59	32.09

各种形状简支或固定板件的基频与高频系数

表5.22

形 状	正 方 形 板							矩形板 ( $\frac{b}{a} = \frac{2}{3}$ )					
边 界	四 边 简 支			对边简支 对边固定	三边简支 一边固定	四边 固定	一边中部固 定其余简支	四 边 简 支				对边简支 对边固定	三边简支 一边固定
n	2	3	4	1	1	1	1	2	3	4	5	1	1
$\bar{\lambda}_1$	24.68	16.45	19.74	28.94	23.64	35.99	23.34	20.56	21.93	18.51	17.08	26.05	23.37
形 状	菱形板 ( $\beta_0 = 60^\circ$ )				等腰三角形板 ( $\frac{H}{b} = 1$ )			扇形板 ( $60^\circ$ )	半圆形板	式(5.40c) 的 下 限			
边 界	对边固定对边简支				腰固定底 边 简 支	腰简支底 边 固 定		径边简支 弧边固定	径边简支 弧边固定				
n	2	3	4	5	1	1		1	1				
$\bar{\lambda}_1$	28.19	27.18	22.01	24.11	34.99	27.50		26.72	33.40	15.64			

## 第六章 平板的自由振动与强迫振动

在前面几章中介绍了平板振动的基本方程以及各种情况下板的固有振动分析方法。在第一章中早已指出,基本方程的确定与固有振动的求解是平板振动分析的关键。有了这两个基础,各种情况下的板的自由振动与强迫振动分析都是统一的。这将集中在这一章中加以讨论,给出解的一般形式。

### § 6.1 平板振型的正交性

由前几章分析知道,平板的两阶不同振型 $W_{mn}$ 及 $W_{kl}$ 和相应频率 $\omega_{mn}$ 及 $\omega_{kl}$ 将分别满足振型方程

$$D\nabla^2\nabla^2 W_{mn} = \rho h \omega_{mn}^2 W_{mn} \quad (a)$$

$$D\nabla^2\nabla^2 W_{kl} = \rho h \omega_{kl}^2 W_{kl} \quad (b)$$

对不同形状板件,只是式中拉普拉斯算子 $\nabla^2$ 的具体算式不同而已。

式(a)乘 $W_{kl}$ 沿全板域积分,再根据格林公式,有

$$\begin{aligned} \iint_D D\nabla^2\nabla^2 W_{mn} W_{kl} ds &= \int_L (Q_N^*)_{mn} W_{kl} dL - \int_L (M_N^*)_{mn} \frac{\partial W_{kl}}{\partial N} dL \\ &+ \iint_D D\nabla^2 W_{mn} \nabla^2 W_{kl} ds = \omega_{mn}^2 \iint_D \rho h W_{mn} W_{kl} ds \end{aligned} \quad (c)$$

式(b)乘 $W_{mn}$ 沿全板域积分,同样有

$$\begin{aligned} \iint_D D\nabla^2\nabla^2 W_{kl} W_{mn} ds &= \int_L (Q_N^*)_{kl} W_{mn} dL - \int_L (M_N^*)_{kl} \frac{\partial W_{mn}}{\partial N} dL \\ &+ \iint_D D\nabla^2 W_{kl} \nabla^2 W_{mn} ds = \omega_{kl}^2 \iint_D \rho h W_{kl} W_{mn} ds \end{aligned} \quad (d)$$

考虑到振型 $W_{mn}$ 及 $W_{kl}$ 已经满足相应边界条件,所以式(c), (d)中边界积分项消失,而两式相减有

$$(\omega_{mn}^2 - \omega_{kl}^2) \iint_D \rho h W_{mn} W_{kl} ds = 0 \quad (e)$$

如果 $m \neq n$ 或 $k \neq l$ ,则 $\omega_{mn}$ 与 $\omega_{kl}$ 值不等,必有

$$\iint_D \rho h W_{mn} W_{kl} ds = 0 \quad (m \neq n \text{ 或 } k \neq l) \quad (6.1)$$

这就是平板振型的正交性。板振型正交性的物理意义是,任意形状、任意边界的平板的两个不同阶次的振型的积,以质量密度为权的沿全板域积分为零。振型正交性是任意线性振动体系(包括多自由度体系和连续弹性体系)的共同特性。

具有附加质量、刚度的板的振型正交性具有略有不同的形式:

在板上 $(\xi, \eta)$ 点具有附加集中质量 $M$ ,则其振型满足

$$D\nabla^2\nabla^2W=\omega^2[\rho h+M\delta(x-\xi)\delta(y-\eta)]W \quad (6.2a)$$

同样可得其振型正交性为

$$\iint_S \rho h W_{mn} W_{kl} ds + M W_{mn}(\xi, \eta) W_{kl}(\xi, \eta) = 0 \quad (m \neq n \text{ 或 } k \neq l) \quad (6.3a)$$

在板上  $(\xi, \eta)$  点具有附加集中刚度  $K$ , 则其振型满足

$$D\nabla^2\nabla^2W=[\omega^2\rho h-K\delta(x-\xi)\delta(y-\eta)]W \quad (6.2b)$$

同样可得其振型正交性为

$$\iint_S \rho h W_{mn} W_{kl} ds = 0 \quad (m \neq n \text{ 或 } k \neq l) \quad (6.3b)$$

在板域  $s_m$  有分布质量  $m(x, y)$  及在板域  $s_k$  有分布刚度  $k(x, y)$  情况下的振型正交性为

$$\iint_S \rho h W_{mn} W_{kl} ds + \iint_{s_m} m(x, y) W_{mn} W_{kl} ds = 0 \quad (6.3c)$$

从上述各式可以看出, 附加刚度 (包括固定支承) 不影响振型正交性形式, 而附加质量则要改变振型正交性的表达式。如果定义  $\overline{\rho h}(x, y)$  为包括集中质量、分布质量在内的板的广义质量密度, 则平板振型的正交性可统一表达为

$$\iint_S \overline{\rho h}(x, y) W_{mn}(x, y) W_{kl}(x, y) ds = 0 \quad (m \neq n \text{ 或 } k \neq l) \quad (6.4)$$

平板振型正交性是板的自由振动与强迫振动解的基础之一。

## § 6.2 具有初始条件平板的自由振动

具有初始条件的自由振动是指板具有初始变形和速度, 在无外载情况下, 求解过后的振动过程。自由振动解取决于板的固有频率、振型和给定的初始条件。

板的自由振动方程为无外载  $q$  的板的基本方程 (2.10), 即

$$\nabla^2\nabla^2w + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (6.5)$$

设方程 (6.5) 的自由振动解为

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}(x, y) [a_{mn} \cos \omega_{mn} t + b_{mn} \sin \omega_{mn} t] \quad (6.6a)$$

式中  $W_{mn}$ ,  $\omega_{mn}$  为板的各阶固有振型与频率, 而系数  $a_{mn}$ ,  $b_{mn}$  由初始位移及初始速度

$$w(x, y, 0) = w_0(x, y) \quad (6.7a)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x, y, 0) = \dot{w}_0(x, y) \quad (6.7b)$$

确定。具体做法为将解 (6.6a) 代入式 (6.7), 有

$$w_0(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} W_{mn}(x, y) \quad (6.8a)$$

$$\dot{w}_0(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{mn} b_{mn} W_{mn}(x, y) \quad (6.8b)$$

上述方程中的每个方程包含有无穷多个未知系数, 但若进一步将式 (6.8a) 乘  $\rho h W_{kl}$ , 沿



板面积分, 并利用平板振型正交性, 则可独立解出

$$a_{mn} = \frac{\iint_S \rho h \dot{w}_0 W_{mn} ds}{\iint_S \rho h W_{mn}^2 ds} \quad (6.6b)$$

同样, 将式 (6.6b) 乘  $\rho h W_{mn}$ , 沿板面积分, 并利用平板振型正交性, 可得

$$b_{mn} = \frac{\iint_S \rho h \dot{w}_0 W_{mn} ds}{\omega_{mn} \iint_S \rho h W_{mn}^2 ds} \quad (6.6c)$$

式 (6.6) 即为具有任意初始位移  $w_0(x, y)$  及初始速度  $\dot{w}_0(x, y)$  的任意形状、任意边界条件板的自由振动一般解。

【例 1】以匀速  $v$  前进的列车上有一过道车门, 此门可看作支承在刚性门框上的四边简支矩形薄板 (长为  $2a$ , 宽为  $a$ )。求当列车突然刹车停下后, 门上各点的振动过程。

这是一个已知初位移  $w_0(x, y) = 0$ , 初速度  $\dot{w}_0(x, y) = v$  的自由振动问题。根据第三章中已给出的四边简支板的各阶频率与振型公式, 有

$$\omega_{mn} = \frac{\pi^2}{a^2} \left( m^2 + \frac{n^2}{4} \right) \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad (a)$$

$$W_{mn} = \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{2a} y \quad (b)$$

按式 (6.6b), (6.6c) 有

$$a_{mn} = 0 \quad (c)$$

$$b_{mn} = \frac{\rho h v \int_0^a \int_0^{2a} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{2a} y dx dy}{\omega_{mn} \rho h \int_0^a \int_0^{2a} \sin^2 \frac{m\pi}{a} x \sin^2 \frac{n\pi}{2a} y dx dy} = \begin{cases} \frac{16v}{\omega_{mn} mn\pi^2}, & m, n=1, 3, 5, \dots \\ 0 & m=2, 4, 6, \dots \\ & \text{或 } n=2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (d)$$

代入式 (6.6a) 有问题的解

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1, 3, 5}^{\infty} \sum_{n=1, 3, 5}^{\infty} \frac{16va^2}{mn\pi^4 \left( m^2 + \frac{n^2}{4} \right)} \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{2a} y \sin \omega_{mn} t \quad (e)$$

很容易检查出此解满足基本方程 (6.5) 及初始位移  $w(x, y, 0) = 0$ , 初始速度  $\frac{\partial w}{\partial t}(x, y, 0) = v$ , 只要注意到 1 的双重付里叶级数展开式。

【例 2】一块平板作用有一定静载, 其静力挠曲面为  $w_s(x, y)$ 。求静载突然卸去后, 板上各点振动过程。

这是一个已知初位移  $w_0 = w_s(x, y)$ , 初速度  $\dot{w}_0(x, y) = 0$  的自由振动问题。按式 (6.6) 有解

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}(x, y) \cos \omega_{mn} t \frac{\iint_S w_s(x, y) W_{mn} ds}{\iint_S W_{mn}^2 ds} \quad (f)$$

作为进一步讨论, 静载  $q(x, y)$  作用下的解取用 § 6.4 稳态解 (6.16) 之  $p$  趋于零的幅值, 即

$$w_s(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\iint_S q(x, y) W_{kl} ds}{\omega_{kl}^2 \iint_S \rho h W_{kl}^2 ds} W_{kl}(x, y) \quad (g)$$

代入解 (f), 并利用平板振型正交性, 可得此自由振动解的一般形式

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\iint_S q(x, y) W_{mn} ds}{\omega_{mn}^2 \iint_S \rho h W_{mn}^2 ds} W_{mn}(x, y) \cos \omega_{mn} t \quad (h)$$

可以检查出, 解 (h) 是满足基本方程 (6.5) 及初始速度  $\frac{\partial w}{\partial t}(x, y, 0) = 0$ , 初始位移  $w(x, y, 0) = w_s(x, y)$ , 只要注意到表达式 (g)。

### § 6.3 在外载作用下平板强迫振动的一般解

在动载荷  $q(x, y, t)$  作用下平板的强迫振动解满足基本方程

$$D \nabla^2 \nabla^2 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, y, t) \quad (6.9)$$

可设其解为

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{mn}(t) W_{mn}(x, y) \quad (6.10a)$$

其中  $W_{mn}$  为该板的各阶振型,  $T_{mn}$  为各振型分量, 将式 (6.10a) 代入基本方程 (6.9), 有

$$D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{mn} \nabla^2 \nabla^2 W_{mn} + \rho h \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{T}_{mn} W_{mn} = q(x, y, t) \quad (a)$$

考虑到振型  $W_{mn}$  已满足振型方程

$$D \nabla^2 \nabla^2 W_{mn} = \rho h \omega_{mn}^2 W_{mn} \quad (b)$$

则代入式 (a), 有

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [\ddot{T}_{mn} + \omega_{mn}^2 T_{mn}] \rho h W_{mn} = q(x, y, t) \quad (c)$$

此方程中含有无穷多个未知  $T_{mn}(t)$ , 但若将上式乘  $W_{kl}$ , 沿板面积分, 并利用平板振型正交性, 可得  $T_{mn}(t)$  的独立方程

$$\frac{d^2 T_{mn}(t)}{dt^2} + \omega_{mn}^2 T_{mn}(t) = \frac{P_{mn}(t)}{M_{mn}} \quad (6.11)$$

式中 第  $(m, n)$  阶广义力

$$P_{mn}(t) = \iint_S q(x, y, t) W_{mn}(x, y) ds \quad (6.12a)$$

第  $(m, n)$  阶广义质量

$$M_{mn} = \iint_S \rho h W_{mn}^2(x, y) ds \quad (6.12b)$$

方程 (6.11) 和具有质量  $M_{mn}$ 、固有频率  $\omega_{mn}$ 、受有外载  $P_{mn}(t)$  的单自由度体系运动方

程相同。按单自由度体系振动理论, 有方程 (6.11) 的解

$$T_{mn}(t) = a_{mn} \cos \omega_{mn} t + b_{mn} \sin \omega_{mn} t + \frac{P_0}{M_{mn} \omega_{mn}^2} \mathcal{D}_{mn}(t) \quad (6.10b)$$

而杜哈美 (Duhamel) 积分

$$\mathcal{D}_{mn}(t) = \frac{\omega_{mn}}{P_0} \int_0^t P_{mn}(\tau) \sin \omega_{mn}(t-\tau) d\tau \quad (6.10c)$$

解 (6.10b) 中  $a_{mn}$ ,  $b_{mn}$  由初始条件定, 方法类同 § 6.2。若

$$q(x, y, t) = q_0(x, y) P(t) \quad (6.12c)$$

则  $P_0$  为  $P(t)$  的特征值 (参见表 6.1)。杜哈美积分值可根据式 (6.10c) 解析求解或数值求解 (§ 7.14)。文献 [330] 对于常用动载荷  $P(t)$  之杜哈美积分  $\mathcal{D}(t)$  表达式作了推导, 列于表 6.1。

常用载荷的杜哈美积分

表 6.1

$P(t)$	$\mathcal{D}(t) = \frac{\omega}{P_0} \int_0^t P(\tau) \sin \omega(t-\tau) d\tau$
$P_0$	$1 - \cos \omega t$
$at$	$\frac{a}{P_0} \left( t - \frac{\cos \omega t}{\omega} \right)$
$bt^2$	$\frac{b}{P_0} \left[ t^2 + \frac{2}{\omega^2} (\cos \omega t - 1) \right]$
$\begin{cases} P_0 \frac{t}{t_0}, & t \leq t_0 \\ P_0, & t > t_0 \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{t}{t_0} - \frac{\sin \omega t}{\omega t_0}, & t \leq t_0 \\ \frac{t}{t_0} + \frac{1}{\omega t_0} [\sin \omega(t-t_0) - \sin \omega t], & t > t_0 \end{cases}$
$P_0 e^{-\beta t}$	$\frac{\omega^2}{\omega^2 + \beta^2} \left( e^{-\beta t} - \cos \omega t + \beta \frac{\sin \omega t}{\omega} \right)$
$P_0 \sin \frac{2\pi}{T} t$	$\frac{\omega T}{(\omega T)^2 - (2\pi)^2} \left( \omega T \sin \frac{2\pi}{T} t - 2\pi \sin \omega t \right)$
$\begin{cases} P_0, & t < T \\ 0, & t > T \end{cases}$	$\begin{cases} 1 - \cos \omega t, & t \leq T \\ \cos \omega(t-T) - \cos \omega t, & t > T \end{cases}$
$\begin{cases} P_0 \frac{t}{T}, & t < T \\ 0, & t > T \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{t}{T} - \frac{\sin \omega t}{\omega T}, & t \leq T \\ \cos \omega(t-T) + \frac{1}{\omega T} [\sin \omega(t-T) - \sin \omega t], & t > T \end{cases}$
$\begin{cases} P_0 \left( 1 - \frac{t}{T} \right), & t \leq T \\ 0, & t > T \end{cases}$	$\begin{cases} 1 - \cos \omega t - \frac{t}{T} + \frac{\sin \omega t}{\omega T}, & t \leq T \\ \frac{\sin \omega t}{\omega T} - \cos \omega t - \frac{\sin \omega(t-T)}{\omega T}, & t > T \end{cases}$
$\begin{cases} P_0 \frac{2t}{T}, & t \leq \frac{T}{2} \\ P_0 \left( 2 - \frac{2t}{T} \right), & \frac{T}{2} < t \leq T \\ 0, & t > T \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{2}{T} \left( t - \frac{\sin \omega t}{\omega} \right), & t \leq \frac{T}{2} \\ \frac{2}{T} \left[ T - t + \frac{2 \sin \omega \left( t - \frac{T}{2} \right)}{\omega} - \frac{\sin \omega t}{\omega} \right], & \frac{T}{2} < t \leq T \\ \frac{2}{\omega T} \left[ 2 \sin \omega \left( t - \frac{T}{2} \right) - \sin \omega(t-T) - \sin \omega t \right], & t > T \end{cases}$
$\begin{cases} P_0, & t < \frac{T}{2} \\ -P_0, & \frac{T}{2} < t < T \\ 0, & t > T \end{cases}$	$\begin{cases} 1 - \cos \omega t, & t < \frac{T}{2} \\ 2 \cos \omega \left( t - \frac{T}{2} \right) - \cos \omega t - 1, & \frac{T}{2} < t < T \\ 2 \cos \omega \left( t - \frac{T}{2} \right) - \cos \omega(t-T) - \cos \omega t, & t > T \end{cases}$

若  $P(t)$  为多项式或可用多项式逼近的话, 则可利用不断分部积分, 给出杜哈美积分的一般性结果

$$\begin{aligned}
 \varphi(t) &= \frac{\omega}{P_0} \int_0^t P(\tau) \sin \omega(t-\tau) d\tau \\
 &= -\frac{1}{P_0} \left\{ [P(\tau) \cos \omega(t-\tau)]_0^t - \int_0^t \frac{dP}{d\tau}(\tau) \cos \omega(t-\tau) d\tau \right\} \\
 &= \frac{1}{P_0} \left\{ P(t) - P(0) \cos \omega t - \int_0^t \frac{dP}{d\tau}(\tau) \cos \omega(t-\tau) d\tau \right\} \\
 &= \frac{1}{P_0} \left\{ P(t) - P(0) \cos \omega t - \frac{dP}{d\tau}(0) \frac{\sin \omega t}{\omega} - \frac{1}{\omega} \int_0^t \frac{d^2 P}{d\tau^2}(\tau) \sin \omega(t-\tau) d\tau \right\} \\
 &= \dots \dots \\
 &= \frac{1}{P_0} \left\{ \sum_{m=0,1,2,\dots}^n \frac{(-1)^m}{\omega^{2m}} \frac{d^{(2m)} P}{d\tau^{(2m)}}(t) + \sum_{k=0,1,\dots}^n \frac{(-1)^{k+1}}{\omega^{2k+1}} \frac{d^{(2k+1)} P}{d\tau^{(2k+1)}}(0) \sin \omega t \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{l=0,1,\dots}^n \frac{(-1)^{l+1}}{\omega^{2l}} \frac{d^{(2l)} P}{d\tau^{(2l)}}(0) \cos \omega t - \frac{1}{\omega^{2n+1}} \int_0^t \frac{d^{(2n+2)} P}{d\tau^{(2n+2)}}(\tau) \sin \omega(t-\tau) d\tau \right\}
 \end{aligned} \tag{6.13}$$

当  $n$  适当大时, 式 (6.13) 的最后一项的被积函数将为零, 则杜哈美积分为上述有限项函数和。

【例】受均布干扰力作用的四边简支矩形板的强迫振动解。

方程 (6.9) 中载荷项为  $q(x, y, t) = P_0 f(t)$ , 则按式 (6.12), 有第  $(m, n)$  阶广义力

$$P_{mn}(t) = \int_0^a \int_0^b P_0 f(t) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y dx dy = \begin{cases} 4P_0 \left( \frac{a}{m\pi} \right) \left( \frac{b}{n\pi} \right) f(t) & (m, n=1, 3, 5, \dots) \\ 0 & (m=2, 4, 6, \dots \text{ 或 } n=2, 4, 6, \dots) \end{cases} \tag{d}$$

第  $(m, n)$  阶广义质量

$$M_{mn} = \int_0^a \int_0^b \rho h \sin^2 \left( \frac{m\pi}{a} x \right) \sin^2 \left( \frac{n\pi}{b} y \right) dx dy = \frac{\rho h a b}{4} \tag{e}$$

方程 (6.11) 的特解则有

$$T_{mn}(t) = \frac{16P_0}{mn\pi^2 \rho h \omega_{mn}^2} \int_0^t f(\tau) \sin \omega_{mn}(t-\tau) d\tau \quad (m, n=1, 3, 5, \dots) \tag{f}$$

若  $f(t)$  为突加常力  $P_0$ , 根据表 6.1, 有

$$T_{mn}(t) = \frac{16P_0}{mn\pi^2 \rho h \omega_{mn}^2} (1 - \cos \omega_{mn} t) \quad (m, n=1, 3, 5, \dots) \tag{g}$$

注意到四边简支矩形板有

$$\omega_{mn}^2 = \frac{\pi^4 D}{\rho h} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \tag{h}$$

则全解为

$$W(x, y, t) = \frac{16P_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y}{mn \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} (1 - \cos \omega_{mn} t) \quad (i)$$

分析解 (i) 可知, 板件受外载的强迫振动解为按各固有振型分布的分量的叠加。其阶次较低、频率较低 ( $m, n$  较小) 的低频分量的幅值较大; 而阶次较高、频率较高 ( $m, n$  较大) 的高频分量的幅值较小。由于相应静力问题, 即均布静载作用下四边简支板的解为<sup>[358]</sup>

$$W_s(x, y) = \frac{16P}{\pi^6 D} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y}{mn \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \quad (j)$$

与动力解 (i) 相比, 每个分量相差一个  $(1 - \cos \omega_{mn} t)$  的比值, 而且每个时刻不同分量的这一比值是不同的。考虑到动力反应解中基频分量是主要的, 因此动、静态解中基本分量的比值的最大值常作为工程中动力系数, 在本例突加载荷情况下则为 2。

## § 6.4 各种实际载荷情况下板的动力响应

### 一、简谐力作用

工程中有许多实际载荷可看成是: 空间分布函数和时间波形函数是分离变量的, 而时间上又可用三角函数来表示, 有

$$q(x, y, t) = q_0(x, y) \sin pt \quad (6.14)$$

即通常称为简谐载荷。将载荷表达式 (6.14) 代入到式 (6.12a), 有广义力

$$P_{mn}(t) = \sin pt \iint q_0(x, y) W_{mn}(x, y) ds \quad (6.15a)$$

根据式 (6.11), 有方程

$$\frac{d^2 T_{mn}}{dt^2} + \omega_{mn}^2 T_{mn} = \left( \frac{\iint q_0(x, y) W_{mn} ds}{M_{mn}} \right) \sin pt \quad (6.15b)$$

解得式 (6.10b)。若去掉与初始条件有关, 随时间衰减的 (详见 § 6.7) 含  $a_{mn}$ ,  $b_{mn}$  的自由振动项, 并代入到解 (6.10a), 可得动力响应的稳态解

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\iint q_0(x, y) W_{mn}(x, y) ds}{M_{mn}(\omega_{mn}^2 - p^2)} W_{mn}(x, y) \sin pt \quad (6.16)$$

解 (6.16) 表明, 简谐力作用下的稳态解是以外频  $p$  为频率的简谐振动, 其幅值沿板面的分布为各振型分量的叠加; 每个分量沿板面按固有振型分布; 每个分量的幅值取决于:

(1) 外频与该阶固有频率的响应, 体现在  $\omega_{mn}^2 \left( 1 - \frac{p^2}{\omega_{mn}^2} \right)$  项;

(2) 外载分布与该阶固有振型的响应, 体现在  $\iint q_0(x, y) W_{mn}(x, y) ds$  项;

(3) 该阶广义质量值, 体现在  $M_{mn} = \iint \rho h W_{mn}^2(x, y) ds$  项。从而可以看出, 当外频等于板的某阶固有频率, 即  $p = \omega_{mn}$ ,  $\left( 1 - \frac{p^2}{\omega_{mn}^2} \right) = 0$  时, 反应即为无穷, 而共振 (在有

阻尼情况下, 反应有限, 详见 § 6.7); 在各振型分量之间, 一般来说, 相应于基频的分量幅值最大, 因为该分量位于分母的  $\omega_{mn}^2$  项最小; 当外载分布接近于某阶固有振型时, 则  $\iint q_0(x, y)W_{mn}(x, y)ds$  值较大, 该阶振型分量就较大; 对称载荷作用下, 反对称振型分量消失或反对称载荷下, 对称振型分量消失, 因为相应  $\iint q_0(x, y)W_{mn}(x, y)ds$  项为零等等。这些都是连续体动力响应的一系列为人熟知的性质, 从板的简谐振动稳态解 (6.16) 中均可体现。

## 二、一般周期力作用

简谐力是周期力的一种。对于一般性周期力, 外载为

$$q(x, y, t) = q_0(x, y)f_T(t) \quad (6.17)$$

$f_T(t)$  为周期函数, 设其周期为  $T$ , 则可展开成如下付里叶级数,

$$f_T(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{2k\pi}{T}t + b_k \sin \frac{2k\pi}{T}t \right) \quad (6.18a)$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f_T(t) dt \quad (6.18b)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f_T(t) \cos \frac{2k\pi}{T}t dt \quad (6.18c)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f_T(t) \sin \frac{2k\pi}{T}t dt \quad (6.18d)$$

式 (6.18a) 中每个分量相当于频率  $p = \frac{2k\pi}{T}$  的简谐力, 因此引用上一小节的解 (6.16), 有一般性周期力作用下动力响应的稳态解

$$\begin{aligned} w(x, y, t) = & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\iint q_0(x, y)W_{mn}ds}{M_{mn}} W_{mn}(x, y) \left\{ \frac{a_0}{\omega_{mn}^2} \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{a_k}{\omega_{mn}^2 - \left(\frac{2k\pi}{T}\right)^2} \cos \frac{2k\pi}{T}t + \frac{b_k}{\omega_{mn}^2 - \left(\frac{2k\pi}{T}\right)^2} \sin \frac{2k\pi}{T}t \right] \right\} \end{aligned} \quad (6.19)$$

上式表明, 当  $\frac{2k\pi}{T} = \omega_{mn}$  时, 即外载周期力的频率为板的某阶固有频率的整数分之一时, 即发生共振, 这是由于以  $\frac{2\pi}{T}$  为频率的一般性周期力中含有频率为  $\frac{2k\pi}{T}$  的简谐力成份。

【例】受均布锯齿形波载荷作用的四边简支矩形板的稳态解。

锯齿形波 (图 6.1) 的频率为  $p$ , 则相当外载为

$$q(x, y, t) = p_0 f_T(t) \quad (a)$$

$$f_T(t) = \frac{t}{2\pi/p} - s, \quad \frac{2s\pi}{p} < t < \frac{2(s+1)\pi}{p}$$

$$(s = 0, 1, 2, \dots) \quad (b)$$

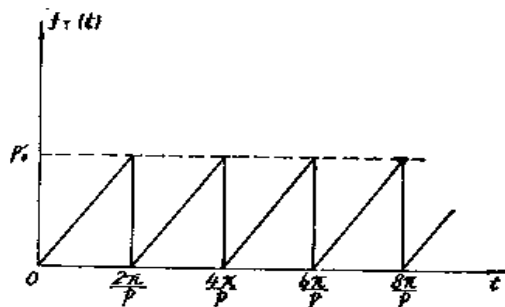


图 6.1

按式 (6.18b) 有

$$a_0 = -\frac{p_0}{2}, \quad a_K = 0, \quad b_K = -\frac{p_0}{k\pi} \quad (c)$$

而

$$\iint q_0(x, y) W_{mn} ds = \int_0^a \int_0^b p_0 \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y dx dy = \begin{cases} 4p_0 \left( \frac{a}{m\pi} \right) \left( \frac{b}{n\pi} \right) & (m, n=1, 3, 5, \dots) \\ 0 & (m=2, 4, 6, \dots \text{ 或 } n=2, 4, 6, \dots) \end{cases} \quad (d)$$

$$M_{mn} = -\frac{\rho h a b}{4} \quad (e)$$

$$\omega_{mn}^2 = \frac{\pi^4 D}{\rho h} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \quad (f)$$

所以其稳态解为

$$w(x, y, t) = \frac{16p_0}{\pi^4 D} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\sin m \frac{\pi}{a} x \sin n \frac{\pi}{b} y}{mn \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \left\{ \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k p t}{k\pi \left[ 1 - \frac{(kp)^2}{\omega_{mn}^2} \right]} \right\} \quad (g)$$

### 三、瞬时冲击作用

如果板件受到作用时间极短, 冲量为  $I$  的冲击作用 (图 6.2), 则外载为

$$q(x, y, t) = q_0(x, y) f_1(t) \quad (6.20a)$$

$$f_1(t) = \begin{cases} f_1(t), & 0 \leq t \leq t_1 \\ 0, & t > t_1 \end{cases} \quad (6.20b)$$

$$\int_0^{t_1} f_1(t) dt = I \quad (6.20c)$$

按式 (6.10) 有动力响应

$$W(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}(x, y) T_{mn}(t) \quad (6.21a)$$

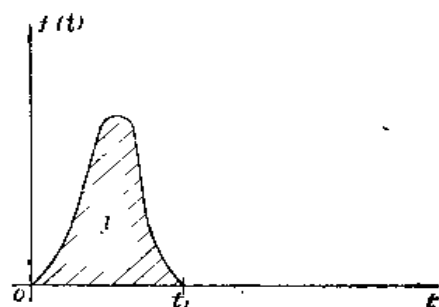


图 6.2

而

$$T_{mn}(t) = a_{mn} \cos \omega_{mn} t + b_{mn} \sin \omega_{mn} t + \frac{\iint q_0(x, y) W_{mn} ds}{\omega_{mn} M_{mn}} \int_0^t f_1(\tau) \sin \omega_{mn}(t - \tau) d\tau \quad (h)$$

计算

$$\begin{aligned} \int_0^t f_1(\tau) \sin \omega_{mn}(t - \tau) d\tau &= \sin \omega_{mn} t \int_0^{t_1} f_1(\tau) \cos \omega_{mn} \tau d\tau \\ &\quad - \cos \omega_{mn} t \int_0^{t_1} f_1(\tau) \sin \omega_{mn} \tau d\tau \end{aligned} \quad (i)$$

根据中值定理

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^{t_1} f_1(\tau) \cos \omega_{mn} \tau d\tau = \int_0^{t_1} f_1(\tau) d\tau = I \quad (j)$$

$$\lim_{t_1 \rightarrow 0} \int_0^{t_1} f_1(\tau) \sin \omega_{mn} \tau d\tau = 0 \quad (k)$$

所以

$$T_{mn}(t) = a_{mn} \cos \omega_{mn} t + b_{mn} \sin \omega_{mn} t + \frac{I \iint q_0(x, y) W_{mn} ds}{\omega_{mn} M_{mn}} \sin \omega_{mn} t \quad (6.21b)$$

可以看出, 冲量对于各阶分量作用是相同的, 但由于低阶分量之  $\omega_{mn}$  较小, 加上一般载荷分布都与低阶振型接近低阶分量之  $\iint q_0(x, y) W_{mn} ds$  值较大, 因此响应中还是低阶分量尤其是基频分量较大。

#### 四、基础运动

若板面上没有外载, 但支承板的基础处在运动中, 并具有一定加速度值, 则板上也受有相应质量惯性力, 而产生动力响应。这也是一类工程上常见的动力问题。下面根据基础运动不同情况分别加以讨论。

##### 1. 平动

若支承板件的基础有一沿垂直板面方向的平动  $\ddot{W}g(t)$ , 则在固结于基础的相对坐标系中, 板件受到惯性力外载为

$$q(x, y, t) = -\rho h \ddot{W}g(t) \quad (6.22)$$

按式 (6.12a) 有广义力

$$P_{mn}(t) = -\rho h \ddot{W}g(t) \iint W_{mn}(x, y) ds \quad (6.23a)$$

因此解 (6.10b) 中特解部分为

$$T_{mn}(t) = -\frac{\rho h \iint W_{mn} ds}{M_{mn} \omega_{mn}} \int_0^t \ddot{W}g(\tau) \sin \omega_{mn}(t - \tau) d\tau \quad (6.23b)$$

其动力响应为挠曲

$$w(x, y, t) = -\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho h \iint W_{mn} ds}{M_{mn} \omega_{mn}} W_{mn}(x, y) \int_0^t \ddot{W}g(\tau) \sin \omega_{mn}(t - \tau) d\tau \quad (6.24)$$

因此基础运动时, 板的动力响应各分量与基础的加速度曲线的杜哈美积分有关。

##### 2. 平动与转动

这时, 基础运动  $\ddot{W}g$  不只是时间函数, 而且是空间的线性函数, 一般可写成

$$\ddot{W}g(x, y, t) = \ddot{g}_1(t) + x \ddot{g}_2(t) + y \ddot{g}_3(t) \quad (6.25a)$$

同理有惯性力外载

$$q(x, y, t) = -\rho h [\ddot{g}_1(t) + x \ddot{g}_2(t) + y \ddot{g}_3(t)] \quad (6.25b)$$

广义力

$$P_{mn}(t) = -\rho h [\ddot{g}_1(t) \iint W_{mn} ds + \ddot{g}_2(t) \iint x W_{mn} ds + \ddot{g}_3(t) \iint y W_{mn} ds] \quad (6.26a)$$

及挠曲响应

$$w(x, y, t) = -\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\rho h \iint W_{mn} ds}{M_{mn} \omega_{mn}} W_{mn}(x, y) \int_0^t \ddot{g}_1(\tau) \sin \omega_{mn}(t - \tau) d\tau \right.$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{\rho h \iint x W_{mn} ds}{M_{mn} \omega_{mn}} W_{mn}(x, y) \int_0^t \ddot{g}_2(\tau) \sin \omega_{mn}(t - \tau) d\tau \\
& + \frac{\rho h \iint y W_{mn} ds}{M_{mn} \omega_{mn}} W_{mn}(x, y) \int_0^t \ddot{g}_3(\tau) \sin \omega_{mn}(t - \tau) d\tau \} \\
& \quad (6.26 b)
\end{aligned}$$

### 五、集中动载荷

如在板上某一点  $(\xi, \eta)$  作用有集中的动态力载荷或力矩载荷, 则外载可用单位脉冲  $\delta$  函数表示为:

对于集中横向力,

$$q(x, y, t) = p_o f(t) \delta(x - \xi) \delta(y - \eta) \quad (6.27 a)$$

对于  $x$  向集中力矩,

$$q(x, y, t) = M_o f(t) \delta'(x - \xi) \delta(y - \eta) \quad (6.27 b)$$

对于  $y$  向集中力矩,

$$q(x, y, t) = M_o f(t) \delta(x - \xi) \delta'(y - \eta) \quad (6.27 c)$$

根据附录 IV,  $\delta$  函数有性质

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x) \delta(x - \xi) dx = F(\xi) \quad (6.28 a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x) \delta'(x - \xi) dx = -F'(\xi) \quad (6.28 b)$$

则按式 (6.12a), 有相应广义力:

对于集中横向力

$$P_{mn}(t) = P_o f(t) W_{mn}(\xi, \eta) \quad (6.29 a)$$

对于  $x$  向集中力矩

$$P_{mn}(t) = -M_o f(t) \frac{\partial W_{mn}}{\partial x}(\xi, \eta) \quad (6.29 b)$$

对于  $y$  向集中力矩

$$P_{mn}(t) = -M_o f(t) \frac{\partial W_{mn}}{\partial y}(\xi, \eta) \quad (6.29 c)$$

再代入解 (6.10), 可得相应动力响应结果。

如果板上一点受有集中简谐力, 则外载为

$$q(x, y, t) = P_o \sin pt \delta(x - \xi) \delta(y - \eta) \quad (6.30 a)$$

有动力响应稳态解

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_o W_{mn}(\xi, \eta)}{M_{mn}(\omega_{mn}^2 - p^2)} W_{mn}(x, y) \sin pt \quad (6.30 b)$$

如果板上一点受有集中冲击载荷, 则外载为

$$q(x, y, t) = f_i(t) \delta(x - \xi) \delta(y - \eta) \quad (6.31 a)$$

有动力响应特解

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I W_{mn}(\xi, \eta)}{\omega_{mn} M_{mn}} W_{mn}(x, y) \sin \omega_{mn} t \quad (6.31 b)$$

## 六、行 动 荷 重

若有一常力  $P$  在板面上移动 (图 6.3), 其作用点  $(\xi, \eta)$  的运动方程可表示为

$$\xi = \xi(t), \quad \eta = \eta(t) \quad (6.32a)$$

按式 (6.29a) 有广义力

$$P_{mn}(t) = P_0 W_{mn}[\xi(t), \eta(t)] \quad (6.32b)$$

则按式 (6.10c) 有杜哈美积分

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{mn}(t) = & \omega_{mn} \int_0^t W_{mn}[\xi(\tau), \\ & \eta(\tau)] \sin \omega_{mn}(t - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (6.32c)$$

进一步根据式 (6.10b), (6.10a) 来求取板的动力响应。

【例】四边简支板上有一集中力, 沿  $y = y_0$ , 从  $x = 0$  运动到  $x = a$ 。

则有

$$\xi = vt, \quad \eta = y_0, \quad 0 \leq vt \leq a \quad (l)$$

按式 (6.32c), 对四边简支板有

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{mn}(t) = & \omega_{mn} \int_0^t W_{mn}(v\tau, y_0) \sin \omega_{mn} \\ & \times (t - \tau) d\tau \end{aligned}$$

$$= \omega_{mn} \int_0^t \sin \frac{m\pi}{a} v\tau \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y_0 \cdot \sin \omega_{mn}(t - \tau) d\tau \quad (m)$$

按式 (6.10), 对于零初始条件, 有动力响应

$$\begin{aligned} w(x, y, t) = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_0 \sin \frac{n\pi}{b} y_0 \cdot \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y}{M_{mn} \left[ \omega_{mn}^2 - \left( \frac{m\pi v}{a} \right)^2 \right]} \\ & \times \left( \sin \frac{m\pi v}{a} t - \frac{\frac{m\pi v}{a}}{\omega_{mn}} \sin \omega_{mn} t \right), \\ & 0 \leq t \leq \frac{a}{v} \end{aligned} \quad (n)$$

这相当在  $y = y_0$  直线上作用频率为  $\frac{m\pi v}{a}$  的简谐载荷的解。而  $t > \frac{a}{v}$  的解相当于在初位移  $w(x,$

$y, \frac{a}{v})$ , 初速度  $\frac{\partial w}{\partial t}(x, y, \frac{a}{v})$  下之自由振动 (见 § 6.2)。

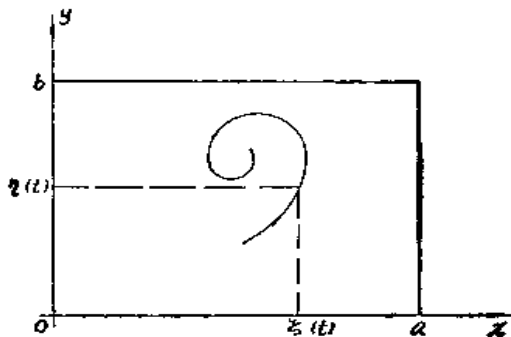


图 6.3

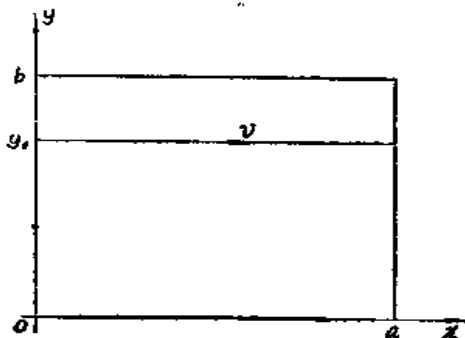


图 6.4

## 七、移动击波

工程上有一些属于气动载荷问题。下面举个具体例子来说明这类问题的性质与解法。

有一激波，其波形为阶梯函数，斜扫过板面<sup>[255]</sup>（图6.5），波阵面与 $x$ 轴夹角为 $\beta$ （ $\operatorname{tg} \beta \geq \frac{b}{a}$ ），即外载为

$$q(x, y, t) = \begin{cases} P_0, & x + \frac{y}{\operatorname{tg} \beta} < d(t) \\ 0, & x + \frac{y}{\operatorname{tg} \beta} > d(t) \end{cases} \quad (6.33)$$

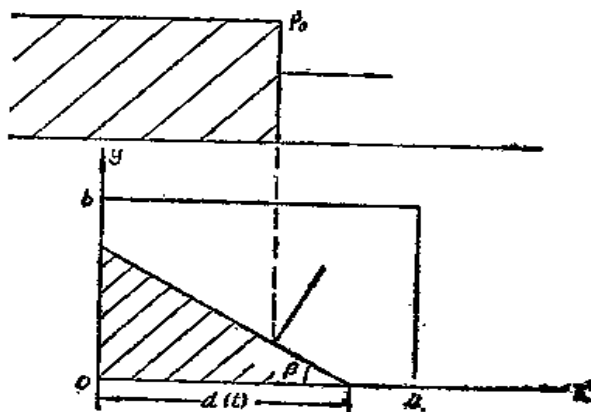


图 6.5

按式 (6.12a)，有广义力 ( $d \leq a$ )

$$P_{mn}(t) = \begin{cases} P_0 \int_0^{d \operatorname{tg} \beta} dy \int_0^{(d - \frac{y}{\operatorname{tg} \beta})} W_{mn}(x, y) dx, & \text{当 } d \operatorname{tg} \beta \leq b \\ P_0 \int_0^b dy \int_{d - \frac{y}{\operatorname{tg} \beta}}^a W_{mn}(x, y) dx, & \text{当 } d \operatorname{tg} \beta > b \end{cases} \quad (6.34)$$

对于四边简支板，可算得

当  $d \operatorname{tg} \beta \leq b$ ,

$$P_{mn}(t) = \frac{abP_0}{mn\pi^2} \begin{cases} 1 + \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} \cos \frac{m\pi d \operatorname{tg} \beta}{b} - \frac{1}{1-\alpha^2} \cos \frac{m\pi d}{a}, & \alpha \neq 1 \\ 1 - \cos \frac{m\pi d}{a} - \frac{m\pi d}{2a} \sin \frac{m\pi d}{a}, & \alpha = 1 \end{cases} \quad (6.35a)$$

当  $d \operatorname{tg} \beta > b$ ,

$$P_{mn}(t) = \frac{abP_0}{mn\pi^2} \begin{cases} 1 + (-1)^{n+1} - \frac{1}{1-\alpha^2} \cos \frac{m\pi d}{a} + \frac{(-1)^n}{1-\alpha^2} \cos \left( d - \frac{b}{\operatorname{tg} \beta} \right) \frac{m\pi}{a}, & \alpha \neq 1 \\ 1 + (-1)^{n+1} - \frac{n\pi}{2} \sin \frac{m\pi d}{a}, & \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\text{而 } \alpha = \frac{mb}{na \operatorname{tg} \beta}.$$

(6.35b)

若激波平行 $y$ 轴，即  $\beta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\operatorname{tg} \beta = \infty$ ,  $\alpha = 0$ ,  $d \operatorname{tg} \beta > b$ , 按式 (6.35b)，有

$$P_{mn}(t) = \frac{2abP_0}{mn\pi^2} \begin{cases} 1 - \cos \frac{m\pi d(t)}{a}, & n=1,3,5,\dots \\ 0, & n=2,4,6,\dots \end{cases} \quad (6.36)$$

在动力响应解 (6.10a) 中, 对于静止初始条件, 匀速前进的击波,  $d(t)=vt$ , 有解

$$T_{mn}(t) = \frac{8P_0}{mn\pi^2 \rho h \omega_{mn}^2} \begin{cases} 1 + \frac{1}{1-N_{mn}^2} [N_{mn}^2 \cos \omega_{mn} t - \cos N_{mn} \omega_{mn} t], & N_{mn} \neq 1 \\ 1 - \cos \omega_{mn} t - \frac{1}{2} \omega_{mn} t \sin \omega_{mn} t, & N_{mn} = 1 \end{cases} \quad (6.37a)$$

式中

$$N_{mn} = v / \frac{a \omega_{mn}}{m\pi} \quad (6.37b)$$

上式解表明, 当移动速度  $v \neq \frac{a \omega_{mn}}{m\pi}$  时,  $T_{mn}(t)$  为周期函数, 振幅有限; 当  $v = \frac{a \omega_{mn}}{m\pi}$  时,  $T_{mn}(t)$  将随时间, 振幅无限增长。

## § 6.5 结构的内摩擦理论

### 一、概 述

以上各节在处理板的自由振动和强迫振动时, 都未曾计入结构阻尼。这种简化假定使得结构振动分析在数学上带来很多方便, 而且在大多数情况下, 能基本上反映结构的动力特性。但实际结构体系中总存在一定阻尼, 使体系机械能不断损耗。这是结构动力问题特有现象。

弹性体振动时除了受有外力、恢复力、惯性力外, 一般还存在阻尼力。这种阻尼力使体系能量不断耗散, 使自由振动振幅逐渐衰减, 导致振动最后终止; 这种阻尼力使强迫振动在共振时振幅也变为有限。阻尼对自由振动的振动频率及非共振区稳态振动的振幅影响较小。阻尼力方向总和结构运动方向相反。

对于弹性体振动, 结构阻尼根据能量耗散方式不同, 可分为两大类:

一是外阻尼。这时体系能量与外部有交换, 诸如体系与支座间摩擦, 体系向周围介质 (土壤、流体、气体) 作能量传递等。这种外阻尼对于离散的多自由度体系也是存在的。

二是内摩擦。这时体系内部机械能转变为其它形式能量 (主要是热能)。这种形式阻尼只存在于连续体模型中。

对于板壳等连续体来说, 内摩擦是主要的阻尼因素, 本章也主要讨论内摩擦阻尼。至于外阻尼影响的分析在一般结构动力学书中均可找到。

造成内摩擦的内在原因包括有塑性变形、晶格内原子重配置、热弹性效应、磁弹性滞后等。对于大多数材料, 主要是由于塑性变形引起的。[152][231]

对于一般“线弹性” ( $\sigma = E\varepsilon$ ) 材料的精确测量表明, 结构振动时材料应力-应变间并不是严格遵守线性关系的, 而是加、卸时分别遵循非线性应力-应变曲线, 并形成一个封闭环 (图6.6)。具体来说, 加载时对应  $\sigma_1$  之  $\varepsilon_1 < \varepsilon_{10} = \frac{\sigma_1}{E}$ ; 卸载时对应  $\sigma_2$  之  $\varepsilon_2 > \varepsilon_{20} = \frac{\sigma_2}{E}$ , 也就是应变总是落后于应力。这种现象称为滞变, 这一封闭曲线为滞变回线。环之而积为能量损耗, 一次损耗的能量  $\Delta W$  与总能量  $W$  之比为  $\psi = \frac{\Delta W}{W}$ , 称之为耗损系数, 用来表示能量的耗

散程度。

测定 $\psi$ 的一般方法为使构件作自由衰减振动测得衰减曲线(图6.7)中各个振幅: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s, \lambda_{s+1}, \dots$ 。由于能量正比于振幅的平方,故

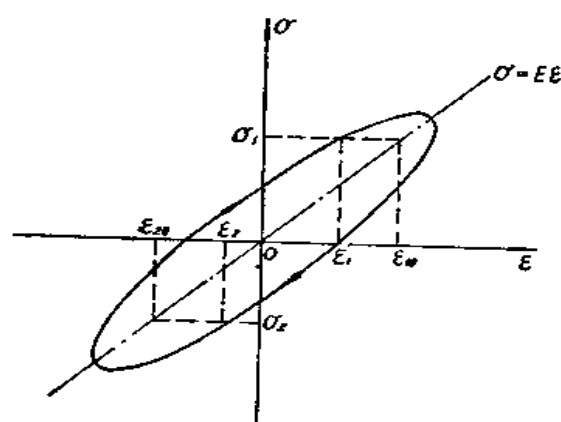


图 6.6

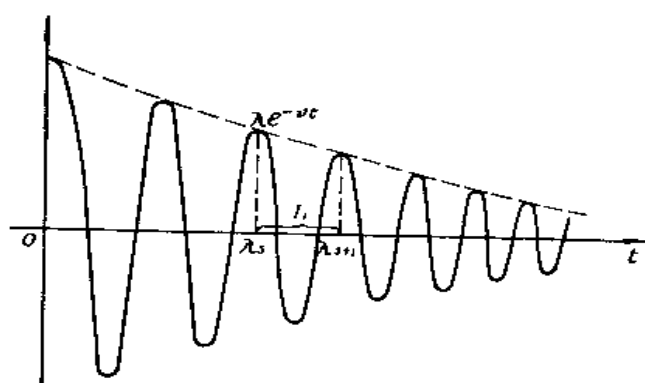


图 6.7

$$\psi = \frac{\Delta W}{W} = \frac{\lambda_s^2 - \lambda_{s+1}^2}{\lambda_s^2} = 1 - \left( \frac{\lambda_{s+1}}{\lambda_s} \right)^2 \quad (6.38a)$$

实际测定时,可求取振幅衰减曲线的包络线 $\lambda e^{-\nu t}$ ,则 $\frac{\lambda_{s+1}}{\lambda_s} = e^{-\nu T_1}$  ( $T_1$ 为自由振动周期),所以

$$\psi = 1 - e^{-2\nu T_1} \approx 2\nu T_1 = 2 \ln \left( \frac{\lambda_s}{\lambda_{s+1}} \right) = 2\delta \quad (6.38b)$$

式中 $\nu$ 为衰减系数, $\delta$ 为对数减幅系数,反映一周期内的能量损耗。一般相对阻尼系数

$$\zeta = \frac{\nu}{\omega} = \frac{\delta}{\omega T_1} \approx \frac{\delta}{2\pi} \approx \frac{\psi}{4\pi} \quad (6.38c)$$

式(6.38b), (6.38c)表达了表示阻尼现象的四个物理参数 $\psi, \nu, \delta, \zeta$ 间换算关系,也是根据实测确定这些参数的计算公式。对于常用的几种材料的 $\psi$ 平均值可参见表6.1。

材料的耗损系数 $\psi$ 

表6.1

材 料	低碳钢	木 材	混凝土	钢筋混凝土	砖 体	铅	玻 璃	橡 胶
$\psi$	0.02	0.10	0.26	0.30	0.23	0.04	0.02	0.80

实验表明,影响 $\psi$ 值有下列因素:在一般常用频率范围(0.01~10 000 Hz)内, $\psi$ 与频率无关; $\psi$ 随振幅增加而增加,但对于低碳钢、混凝土、钢筋混凝土等材料,在一定应变范围( $\epsilon = 10^{-5} \sim 10^{-3}$ )内又基本保持常值;此外, $\psi$ 还与温度成正比,与应力状态(应力分量的比值)有关,与试件尺寸、振动次数无关。

为了使在结构振动分析中计入内摩擦效应,根据滞变回线,必须提出应力应变间关系的简化数学模型,从而形成各种不同的阻尼理论。这些理论应共同遵循的一点是,要符合实验的主要结果,并要在数学上有足够简化。这些不同理论主要可归纳为二类:粘滞阻尼理论与复阻尼理论。

## 二、粘滞阻尼理论

这类理论主要认为内摩擦产生的阻尼类似于在粘滞流体中运动的结构所承受的粘滞阻尼，其阻尼力与速度成正比，因而称为粘滞阻尼理论。最早是由凯尔文 (Kelvin) 提出来的。

**凯尔文理论** 这种理论认为结构内力由两部分组成：由虎克定律确定，与应变成正比的弹性恢复力及与应变速度成正比的阻尼力。对于单向应力状态，有

$$\sigma = E \left[ \varepsilon + \chi \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right] \quad (6.39a)$$

其中常数  $\chi$  为粘滞阻尼系数，这一式子表明：

加载时， $\dot{\varepsilon} > 0$ ， $\sigma > E\varepsilon$ ，实际应力大于线弹性应力；

卸载时， $\dot{\varepsilon} < 0$ ， $\sigma < E\varepsilon$ ，实际应力小于线弹性应力，即形成如图6.6所示的滞变回线，因此能反映实际塑性变形形成的阻尼效应。但下面具体应用中表明，按这种理论计算所得  $\psi = 2\pi\chi\omega$ ，因此  $\psi$  与  $\omega$  有关，这与上述实验结果不相符合，因此以后又提出几种修正理论。

**修正理论** 为了使  $\psi$  与频率无关，则应力-应变关系改取如下形式：

$$\sigma = E \left[ \varepsilon + \frac{\psi}{2\pi\omega} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right] \quad (6.39b)$$

其中  $\psi$  为一常值。显然，作这样修正后，在其实际应用中所得耗散系数即为式 (6.39b) 中  $\psi$ ，因此与频率无关，与实验结果比较符合。

有的理论认为耗损系数不但与频率无关，而且还应反映与应变振幅间关系，这种关系能更确切反映实验现象，如菲利波夫 (Филлипов) 理论。

比较式 (6.39a) 与式 (6.39b) 知，两者之间只差一个系数，因此下面具体应用于平板振动时，只以凯尔文理论公式 (6.39a) 为主。对于修正理论，只要将结果中  $\chi$  代以  $\frac{\psi}{2\pi\omega}$  即可。

## 三、复阻尼理论

这类理论主要认为内摩擦产生的阻尼力是与应变（而不是应变速度）成正比，因此可以用复数弹性模量来表示阻尼力的大小以及阻尼力与应变间的相差。主要是由索洛金 (Сорокин) 提出来的。

**索洛金理论** 这种理论认为结构内力由两部份组成：由虎克定律确定，与应变成正比的弹性恢复力及与应变成正比的阻尼力。对于单向应力状态有

$$\sigma = [1 + i\gamma(\varepsilon_0)]E\varepsilon \quad (6.40a)$$

或写成另一种形式

$$\sigma = E\varepsilon e^{i\alpha}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \gamma(\varepsilon_0) \quad (6.40b)$$

式中， $\varepsilon_0$  为  $\varepsilon$  的幅值， $\gamma(\varepsilon_0)$  为相应材料的实测函数， $\alpha$  为阻尼参数，对于常用钢、混凝土、砖石材料约为 0.03~0.1。如果  $\varepsilon = \varepsilon_0 e^{i\varphi(t)}$ ，则复平面上应变表示为图6.8a；按式 (6.40b)，有应力  $\sigma = E\varepsilon_0 e^{i(\varphi+\alpha)}$ ，则复平面上应力表示为图6.8b。显然  $\varepsilon$  落后于  $\sigma$  为  $\alpha$  相位，这反映了材

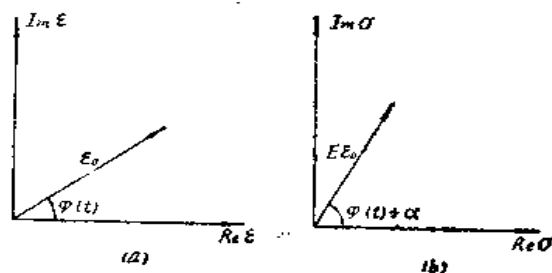


图 6.8

料内阻尼的实验现象。

**精确化理论** 更精确的理论表明, 应力-应变关系应取为

$$\sigma = E\varepsilon[u + iv] \quad (6.40c)$$

$$u = \frac{1 - \frac{\gamma^2}{4}}{1 + \frac{\gamma^2}{4}}, \quad v = \frac{\gamma}{1 + \frac{\gamma^2}{4}} \quad (6.40d)$$

或写成

$$\sigma = E\varepsilon e^{i\alpha'}, \quad \operatorname{tg} \alpha' = \frac{\gamma}{1 - \frac{\gamma^2}{4}} \quad (6.40e)$$

由于  $\gamma \approx \alpha$ , 且数值较小, 所以有  $\operatorname{tg} \alpha' \approx \gamma$ ,  $\alpha' \approx \gamma \approx \alpha$ , 因而两种理论差别不大。

## § 6.6 计入阻尼之平板自由振动

### 一、粘滞阻尼理论的薄板振动方程

按第二章薄板振动基本理论, 几何关系仍不变, 有

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (6.41)$$

而物理关系中, 现计入阻尼力部份, 按粘滞阻尼理论的式 (6.39a) 为

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} [(\varepsilon_x + \chi \dot{\varepsilon}_x) + \nu(\varepsilon_y + \chi \dot{\varepsilon}_y)] \quad (6.42a)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} [(\varepsilon_y + \chi \dot{\varepsilon}_y) + \nu(\varepsilon_x + \chi \dot{\varepsilon}_x)] \quad (6.42b)$$

$$\tau_{xy} = G[\gamma_{xy} + \chi \dot{\gamma}_{xy}] \quad (6.42c)$$

代入式 (6.41), 有应力

$$\sigma_x = -\frac{E}{1-\nu^2} z \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \chi \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} + \nu \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial t} \right) \right] \quad (6.43a)$$

$$\sigma_y = -\frac{E}{1-\nu^2} z \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \chi \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial t} + \nu \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} \right) \right] \quad (6.43b)$$

$$\tau_{xy} = -2Gz \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \chi \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y \partial t} \right] \quad (6.43c)$$

沿厚度积分得内力

$$M_x = -D \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \chi \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} + \nu \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial t} \right) \right] \quad (6.44a)$$

$$M_y = -D \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \chi \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial t} + \nu \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} \right) \right] \quad (6.44b)$$

$$M_{xy} = -D(1-\nu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \chi \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y \partial t} \right] \quad (6.44c)$$

代入动平衡方程

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (6.45a)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0 \quad (6.45b)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0 \quad (6.45c)$$

合并整理之，得粘滞阻尼理论的平板衰减振动基本方程

$$D \left[ \nabla^2 \nabla^2 w + \chi \nabla^2 \nabla^2 \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right) \right] + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q \quad (6.46)$$

边界条件同式 (2.11)，但应注意内力表达式取用式 (6.44) (6.45)。

## 二、粘滞阻尼理论的薄板自由振动解

基本方程 (6.46) 中取  $q=0$ ，用分离变量法设解

$$w(x, y, t) = W(x, y)T(t) \quad (6.47)$$

代入，则有

$$\frac{D}{\rho h} \frac{\nabla^2 \nabla^2 W}{W}(x, y) = - \frac{\ddot{T}}{T + \chi \dot{T}}(t) = \omega^2 \quad (6.48)$$

得

$$\left[ \nabla^2 \nabla^2 W - \alpha^4 W = 0, \quad \alpha^4 = \omega^2 \frac{\rho h}{D} \right] \quad (6.49a)$$

$$\left[ \ddot{T} + \omega^2 \chi \dot{T} + \omega^2 T = 0 \right] \quad (6.49b)$$

方程 (6.49a) 完全同无阻尼薄板振型方程，它的解在以前各章中已详尽讨论过了，对于各种类型平板可得各阶固有频率  $\omega_{mn}$  及相应振型  $W_{mn}(x, y)$ 。对应每个  $\omega_{mn}$  有一个  $T_{mn}(t)$  方程

$$\frac{d^2 T_{mn}(t)}{dt^2} + \omega_{mn}^2 \chi \frac{dT_{mn}(t)}{dt} + \omega_{mn}^2 T_{mn}(t) = 0 \quad (6.50)$$

设其解

$$T_{mn}(t) = C e^{st} \quad (6.51a)$$

得特征方程

$$s^2 + \omega_{mn}^2 \chi s + \omega_{mn}^2 = 0 \quad (6.51b)$$

它的解

$$s = -\frac{\chi}{2} \omega_{mn}^2 \pm \omega_{mn} \sqrt{\frac{\chi^2 \omega_{mn}^2}{4} - 1} \quad (6.51c)$$

对于大阻尼， $\chi > \frac{2}{\omega_{mn}}$ ，则解

$$T_{mn}(t) = A e^{-\frac{\chi}{2} \omega_{mn}^2 t} \operatorname{sh} \left( \omega_{mn} \sqrt{\frac{\chi^2 \omega_{mn}^2}{4} - 1} t + B \right) \quad (6.52a)$$

对于临界阻尼， $\chi = \frac{2}{\omega_{mn}}$ ，则解

$$T_{mn}(t) = e^{-\frac{\chi}{2} \omega_{mn}^2 t} (c_1 t + c_2) \quad (6.52b)$$

但对于一般板件，大都为小阻尼，即有

$$T_{mn}(t) = e^{-\frac{\chi}{2} \omega_{mn}^2 t} [a_{mn} \cos \bar{\omega}_{mn} t + b_{mn} \sin \bar{\omega}_{mn} t] \quad (6.53a)$$

$$\bar{\omega}_{mn} = \omega_{mn} \sqrt{1 - \frac{\chi^2 \omega_{mn}^2}{4}} \quad (6.53b)$$



则方程全解为

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\chi}{2} \omega_{mn}^2 t} [a_{mn} \cos \bar{\omega}_{mn} t + b_{mn} \sin \bar{\omega}_{mn} t] W_{mn}(x, y) \quad (6.53c)$$

式中  $a_{mn}$ ,  $b_{mn}$  由初始条件确定。

对于修正理论, 只要用  $\frac{\psi}{2\pi\omega}$  代替  $\chi$  即可, 可相应得解

$$T_{mn}(t) = e^{-\frac{\psi \omega_{mn}}{4\pi}} [a_{mn} \cos \bar{\omega}_{mn} t + b_{mn} \sin \bar{\omega}_{mn} t] \quad (6.54a)$$

$$\bar{\omega}_{mn} = \omega_{mn} \sqrt{1 - \frac{\psi^2}{16\pi^2}} \approx \omega_{mn} \quad (6.54b)$$

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\psi \omega_{mn}}{4\pi}} [a_{mn} \cos \bar{\omega}_{mn} t + b_{mn} \sin \bar{\omega}_{mn} t] W_{mn}(x, y) \quad (6.55c)$$

### 三、复阻尼理论的薄板振动方程

按薄板振动基本理论, 计入阻尼后, 几何关系及动平衡方程仍分别为式 (6.41) 及式 (6.45)。而物理关系现计入阻尼力部分, 按复阻尼理论的式 (6.40a) 为

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} [\epsilon_x(1+i\gamma) + \nu \epsilon_y(1+i\gamma)] \quad (6.56a)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} [\epsilon_y(1+i\gamma) + \nu \epsilon_x(1+i\gamma)] \quad (6.56b)$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy}(1+i\gamma) \quad (6.56c)$$

代入式 (6.41) 有应力

$$\sigma_x = -\frac{E}{1-\nu^2} z \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) (1+i\gamma) \quad (6.57a)$$

$$\sigma_y = -\frac{E}{1-\nu^2} z \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) (1+i\gamma) \quad (6.57b)$$

$$\tau_{xy} = -2G z \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) (1+i\gamma) \quad (6.57c)$$

沿厚度积分得内力

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) (1+i\gamma) \quad (6.58a)$$

$$M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) (1+i\gamma) \quad (6.58b)$$

$$M_{xy} = -D(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) (1+i\gamma) \quad (6.58c)$$

将式 (6.58) 代入方程 (6.45), 合并整理之, 得复阻尼理论的平板衰减振动基本方程

$$D \nabla^2 \nabla^2 w (1+i\gamma) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q \quad (6.59a)$$

或

$$D \nabla^2 \nabla^2 w e^{i\omega t} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q \quad (6.59b)$$

边界条件同式 (2.11), 但应注意内力表达式取用式 (6.58), (6.45)。

## 四、复阻尼理论的薄板自由振动解

基本方程 (6.59a) 中取  $q=0$ , 用分离变量法设解

$$w(x, y, t) = W(x, y)T(t) \quad (6.60)$$

代入, 则有

$$\frac{D}{\rho h} \frac{\nabla^2 \nabla^2 W}{W}(x, y) = - \frac{\ddot{T}}{(1+i\gamma)T}(t) = \omega^2 \quad (6.61)$$

得

$$\left\{ \begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 W - \alpha^4 W &= 0, \quad \alpha^4 = \omega^2 \frac{\rho h}{D} \end{aligned} \right. \quad (6.62a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \ddot{T} + \omega^2(1+i\gamma)T &= 0 \end{aligned} \right. \quad (6.62b)$$

方程 (6.62a) 为无阻尼薄板振型方程, 前面已经给出了它的解为各阶固有振型  $W_{mn}(x, y)$  及相应频率  $\omega_{mn}$ . 对应每个  $\omega_{mn}$  有一个  $T_{mn}(t)$  方程

$$\frac{d^2 T_{mn}(t)}{dt^2} + \tilde{\omega}_{mn} T_{mn}(t) = 0 \quad (6.63a)$$

式中

$$\tilde{\omega}_{mn} = \omega_{mn} \sqrt{1+i\gamma} \approx \omega_{mn} \left( 1 + \frac{i}{2} \gamma \right) \quad (6.63b)$$

方程 (6.63a) 可解得

$$\begin{aligned} T_{mn}(t) &= A_{mn} e^{i(\tilde{\omega}_{mn} t + \phi_{mn})} \\ &= A_{mn} e^{i(\omega_{mn} t + \frac{i}{2} \gamma \omega_{mn} t + \phi_{mn})} \\ &= A_{mn} e^{(-\frac{\gamma}{2} \omega_{mn} t + i(\omega_{mn} t + \phi_{mn}))} \\ &= A_{mn} e^{-\frac{\gamma}{2} \omega_{mn} t} [\cos(\omega_{mn} t + \phi_{mn}) + i \sin(\omega_{mn} t + \phi_{mn})] \end{aligned} \quad (6.64a)$$

也即为

$$T_{mn}(t) = e^{-\frac{\gamma}{2} \omega_{mn} t} [a_{mn} \cos \omega_{mn} t + b_{mn} \sin \omega_{mn} t] \quad (6.64b)$$

则方程全解为

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\gamma}{2} \omega_{mn} t} [a_{mn} \cos \omega_{mn} t + b_{mn} \sin \omega_{mn} t] W_{mn}(x, y) \quad (6.64c)$$

式中  $a_{mn}$ ,  $b_{mn}$  由初始条件定。

对于精确化理论, 同样可推得

$$T_{mn}(t) = e^{-\frac{\gamma}{2} \bar{\omega}_{mn} t} [a_{mn} \cos \bar{\omega}_{mn} t + b_{mn} \sin \bar{\omega}_{mn} t] \quad (6.65a)$$

$$\bar{\omega}_{mn} = \frac{\omega_{mn}}{\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4}}} \quad (6.65b)$$

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\gamma}{2} \bar{\omega}_{mn} t} [a_{mn} \cos \bar{\omega}_{mn} t + b_{mn} \sin \bar{\omega}_{mn} t] W_{mn}(x, y) \quad (6.65c)$$

### 五、自由振动的阻尼效应

上面对于不同阻尼理论，给出了薄板自由振动解的解析表达式。从这些结果可以看出，计入阻尼效应后，薄板的自由振动有以下几个特点：

(1) 由式 (6.53)，(6.54)，(6.64)，(6.65) 知，与无阻尼等幅振动相比，有阻尼振动的振幅将按指数规律衰减，并且衰减指数中均含有  $\omega_{mn}$  项，说明频率高的成份阻尼大，衰减快。

(2) 由式 (6.49a)，(6.62a) 知，计入阻尼后体系的固有频率及固有振型不发生变化。

(3) 对自由振动的频率，不同理论有：

凯尔文理论：由式 (6.53a)，(6.53b) 知，自由振动频率比固有振动频率小，并随频率阶次增加，这种变化就越加明显。

修正理论：由式 (6.54a)，(6.54b) 知，自由振动频率比固有振动频率小，但这种变化和频率阶次无关。

索洛金理论：由式 (6.64a) 知，自由振动频率和固有振动频率相同。

精确化理论：由式 (6.65a)，(6.65b) 知，自由振动频率比固有振动频率小，但这种变化和频率阶次无关。

(4) 对自由振动特性，不同理论有：

凯尔文理论：由式 (6.52)，(6.53) 知，对于低频， $\frac{2}{\omega_{mn}} > \chi$ ，则为周期衰减运动；对于高频， $\frac{2}{\omega_{mn}} < \chi$ ，则为非周期衰减运动。

修正理论：由式 (6.54b) 知，一般  $1 - \frac{\psi^2}{16\pi^2} > 0$ ，故对于不同频率均为周期衰减运动。

索洛金理论：由式 (6.64b) 知，均为周期衰减运动。

精确化理论：由式 (6.65b) 知，均为周期衰减运动。

(5) 对耗损系数  $\psi = 2\nu T_1$ ，不同理论有：

凯尔文理论：由式 (6.53) 知， $\nu = \frac{\chi}{2} \omega_{mn}^2$ ， $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_{mn}}$ ，所以  $\psi \approx 2\pi\chi\omega_{mn}$ ， $\psi$  与频率有关。

修正理论：由式 (6.54) 知， $\nu = \frac{\psi\omega_{mn}}{4\pi}$ ， $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_{mn}}$ ，所以  $\psi \approx \text{const}$ ， $\psi$  与频率无关。

索洛金理论：由式 (6.64) 知， $\nu = \frac{\gamma}{2} \omega_{mn}$ ， $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_{mn}}$ ，所以  $\psi = 2\pi\gamma(\varepsilon_0)$ ， $\psi$  与频率无关，与振幅  $\varepsilon_0$  有关，并可用  $\psi \sim \varepsilon_0$  实测曲线确定  $\gamma(\varepsilon_0)$  值。

精确化理论：由式 (6.65) 知， $\nu = \frac{\gamma}{2} \bar{\omega}_{mn}$ ， $T_1 = \frac{2\pi}{\bar{\omega}_{mn}}$ ，所以  $\psi = 2\pi\gamma(\varepsilon_0)$ ，结论同上。

## § 6.7 计入阻尼之平板强迫振动

## 一、粘滞阻尼理论的强迫振动解

对于计入阻尼之平板强迫振动基本方程 (6.46), 可设解

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{mn}(t) W_{mn}(x, y) \quad (6.66)$$

代入之, 可得

$$D \left( \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{mn} \nabla^2 \nabla^2 W_{mn} + \chi \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{T}_{mn} \nabla^2 \nabla^2 W_{mn} \right) + \rho h \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{T}_{mn} W_{mn} = q(x, y, t) \quad (a)$$

由于振型  $W_{mn}$  已满足

$$\nabla^2 \nabla^2 W_{mn} = \omega_{mn}^2 \frac{\rho h}{D} W_{mn} \quad (b)$$

则式 (a) 变为

$$\rho h \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{mn}^2 W_{mn} [T_{mn} + \chi \dot{T}_{mn}] + \rho h \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{T}_{mn} W_{mn} = q(x, y, t) \quad (c)$$

将式 (c) 乘  $W_{ij}$ , 并沿板面积分, 注意到薄板振型正交条件

$$\iint \rho h W_{mn} W_{ij} ds = 0 \quad (m \neq i \text{ 或 } n \neq j) \quad (d)$$

则得  $T_{mn}(t)$  方程

$$\frac{d^2 T_{mn}(t)}{dt^2} + \chi \omega_{mn} \frac{dT_{mn}(t)}{dt} + \omega_{mn}^2 T_{mn}(t) = \frac{P_{mn}(t)}{M_{mn}} \quad (6.67a)$$

其中, 广义质量

$$M_{mn} = \iint \rho h W_{mn}^2 ds \quad (6.67b)$$

广义力

$$P_{mn}(t) = \iint q(x, y, t) W_{mn} ds \quad (6.67c)$$

方程 (6.67a) 类同一般有阻尼单自由度系统方程, 其非齐次方程特解为

$$T_{mn}(t) = \frac{1}{\omega_{mn} M_{mn}} \int_0^t e^{-\frac{\chi}{2} \omega_{mn}^2 (t-\tau)} P_{mn}(\tau) \sin \bar{\omega}_{mn}(t-\tau) d\tau \quad (6.68a)$$

$$\bar{\omega}_{mn} = \omega_{mn} \sqrt{1 - \frac{\chi^2 \omega_{mn}^2}{4}} \quad (6.68b)$$

计入相应齐次方程一般解 (6.53a), 并代入式 (6.66), 则有全解

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ e^{-\frac{\chi}{2} \omega_{mn}^2 t} [a_{mn} \cos \bar{\omega}_{mn} t + b_{mn} \sin \bar{\omega}_{mn} t] + \frac{1}{\omega_{mn} M_{mn}} \int_0^t e^{-\frac{\chi}{2} \omega_{mn}^2 (t-\tau)} P_{mn}(\tau) \sin \bar{\omega}_{mn}(t-\tau) d\tau \right\} W_{mn}(x, y) \quad (6.69)$$

式中  $a_{mn}$ ,  $b_{mn}$  由初始条件定。

下面举几个具体例子来说明具有阻尼的平板的强迫振动解。

【例 1】在简谐分布载荷

$$q(x, y, t) = q_0(x, y) \sin pt \quad (e)$$

作用下满足初位移  $w_0(x, y)$  初速度  $\dot{w}_0(x, y)$  之解 (6.69) 为

$$\begin{aligned} w(x, y, t) = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ e^{-\frac{\chi}{2} \bar{\omega}_{mn} t} \left[ a_{mn} \cos \bar{\omega}_{mn} t + \left( \frac{\chi}{2} \frac{\omega_{mn}^2 a_{mn} + \beta_{mn}}{\bar{\omega}_{mn}} \right) \sin \bar{\omega}_{mn} t \right] \right. \\ & + A_{mn} e^{-\frac{\chi}{2} \bar{\omega}_{mn} t} \left[ \sin \gamma_{mn} \cos \bar{\omega}_{mn} t + \left( \frac{\chi}{2} \omega_{mn}^2 \sin \gamma_{mn} - p \cos \gamma_{mn} \right) \right. \\ & \left. \left. \times \frac{\sin \bar{\omega}_{mn} t}{\bar{\omega}_{mn}} \right] + A_{mn} \sin(pt - \gamma_{mn}) \right\} W_{mn}(x, y) \quad (6.70a) \end{aligned}$$

式中

$$a_{mn} = \frac{\iint \rho h w_0 W_{mn} ds}{\iint \rho h W_{mn}^2 ds}, \quad \beta_{mn} = \frac{\iint \rho h \dot{w}_0 W_{mn} ds}{\iint \rho h W_{mn}^2 ds}, \quad \bar{\omega}_{mn} = \omega_{mn} \sqrt{1 - \frac{\chi^2 \omega_{mn}^2}{4}} \quad (6.70b)$$

上述解由三部分组成：式 (6.70a) 中第一项是由初始条件引起的衰减部分；第二项由载荷引起的衰减部分；而第三项是不衰减的，即通常称为稳态解：

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin(pt - \gamma_{mn}) W_{mn}(x, y) \quad (6.71a)$$

式中

$$A_{mn} = \frac{\iint q_0(x, y) W_{mn}(x, y) ds}{M_{mn} \omega_{mn}^2 \sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{\omega_{mn}^2}\right)^2 + (\chi p)^2}} \quad (6.71b)$$

$$\gamma_{mn} = \arctg \frac{\chi p \omega_{mn}^2}{\omega_{mn}^2 - p^2} \quad (6.71c)$$

【例 2】在矩形突加载荷

$$q(x, y, t) = q_0(x, y) \times \begin{cases} 1, & 0 < t < T \\ 0, & t > T \end{cases} \quad (f)$$

作用下解 (6.68) 为

$$T_{mn}(t) = \frac{\iint q_0(x, y) W_{mn}(x, y) ds}{M_{mn} \omega_{mn}^2}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{2}\omega_{mn}^2 t} \left[ \cos \bar{\omega}_{mn} t + \frac{x\omega_{mn}^2}{2\bar{\omega}_{mn}} \sin \bar{\omega}_{mn} t \right], & t < T \\ e^{-\frac{x}{2}\omega_{mn}^2 (t-T)} \left[ \cos \bar{\omega}_{mn} (t-T) + \frac{x\omega_{mn}^2}{2\bar{\omega}_{mn}} \sin \bar{\omega}_{mn} (t-T) \right] \\ - e^{-\frac{x}{2}\omega_{mn}^2 t} \left[ \cos \bar{\omega}_{mn} t + \frac{x\omega_{mn}^2}{2\bar{\omega}_{mn}} \sin \bar{\omega}_{mn} t \right], & t > T \end{cases} \quad (6.72)
 \end{aligned}$$

【例3】在直角三角形爆炸载荷

$$q(x, y, t) = q_0(x, y) \times \begin{cases} \left(1 - \frac{t}{T}\right), & 0 < t < T \\ 0, & t > T \end{cases} \quad (9)$$

作用下, 解 (6.68) 为

$$\begin{aligned}
 T_{mn}(t) &= \frac{\iint q_0(x, y) W_{mn}(x, y) ds}{M_{mn} \omega_{mn}^2} \\
 & \times \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{2}\omega_{mn}^2 t} \left[ \cos \bar{\omega}_{mn} t + \frac{x\omega_{mn}^2}{2\bar{\omega}_{mn}} \sin \bar{\omega}_{mn} t \right] - \frac{t}{T} + \frac{e^{-\frac{x}{2}\omega_{mn}^2 t}}{\omega_{mn}^2 T} \left[ \frac{\bar{\omega}_{mn}^2 - \frac{x^2}{4}\omega_{mn}^4}{\bar{\omega}_{mn}} \right. \\ \quad \times \sin \bar{\omega}_{mn} t - x\omega_{mn}^2 \cos \bar{\omega}_{mn} t \left. \right] + \frac{x}{T}, & t \leq T \\ 1 - e^{-\frac{x}{2}\omega_{mn}^2 t} \left[ \cos \bar{\omega}_{mn} t + \frac{x\omega_{mn}^2}{2\bar{\omega}_{mn}} \sin \bar{\omega}_{mn} t \right] - \frac{t}{T} + \frac{e^{-\frac{x}{2}\omega_{mn}^2 t}}{\omega_{mn}^2 T} \left[ \frac{\bar{\omega}_{mn}^2 - \frac{x^2}{4}\omega_{mn}^4}{\bar{\omega}_{mn}} \right. \\ \quad \times \sin \bar{\omega}_{mn} t - x\omega_{mn}^2 \cos \bar{\omega}_{mn} t \left. \right] + \frac{t-T}{T} \\ - \frac{e^{-\frac{x}{2}\omega_{mn}^2 (t-T)}}{\omega_{mn}^2 T} \left[ \frac{\bar{\omega}_{mn}^2 - \frac{x^2}{4}\omega_{mn}^4}{\bar{\omega}_{mn}} \sin \bar{\omega}_{mn} (t-T) - x\omega_{mn}^2 \cos \bar{\omega}_{mn} (t-T) \right], & t > T \end{cases} \quad (6.73)
 \end{aligned}$$

对于修正理论, 只要将上述各式中  $x$  代以  $\frac{\psi}{2\pi\omega_{mn}}$ 。

## 二、复阻尼理论的强迫振动解

对于复阻尼理论的强迫振动基本方程 (6.59), 讨论简谐载荷

$$q(x, y, t) = q_0(x, y) e^{i\omega t} \quad (h)$$

作用下的稳态解, 可设其为

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} W_{mn}(x) e^{i\omega t} \quad (6.74)$$

代入式 (6.59a), 有

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [D(1+i\gamma)\nabla^2\nabla^2 W_{mn} - \rho h p^2 W_{mn}] A_{mn} = q_0(x, y) \quad (i)$$

由于振型  $W_{mn}$  满足

$$\nabla^2\nabla^2 W_{mn} = \omega_{mn}^2 \frac{\rho h}{D} W_{mn} \quad (j)$$

则式 (i) 变为

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [(1+i\gamma)\omega_{mn}^2 - p^2] \rho h W_{mn} A_{mn} = q_0(x, y) \quad (k)$$

将式 (k) 乘  $W_{ij}$ , 并沿板面积分, 注意到薄板振型正交条件

$$\iint \rho h W_{mn} W_{ij} ds = 0 \quad (m \neq i \text{ 或 } n \neq j) \quad (l)$$

则得

$$A_{mn} = \frac{P_{mn}/M_{mn}}{(1+i\gamma)\omega_{mn}^2 - p^2} \quad (6.75a)$$

其中  $P_{mn}$ ,  $M_{mn}$  见式 (6.67)。通过复数运算, 可以推得

$$A_{mn} = \alpha_{mn} e^{-i\beta_{mn}} \quad (6.75b)$$

而

$$\alpha_{mn} = \frac{P_{mn}}{M_{mn} \omega_{mn}^2 \sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{\omega_{mn}^2}\right)^2 + \gamma^2}}, \quad \beta_{mn} = \arctg \frac{\gamma}{1 - \frac{p^2}{\omega_{mn}^2}} \quad (6.76a)$$

则代回式 (6.74) 有解

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{mn} W_{mn}(x, y) e^{i(p^2 t - \beta_{mn})} \quad (6.77)$$

对于精确化理论, 同样可推得简谐载荷作用下稳态解 (6.77), 但式中

$$\alpha_{mn} = \frac{P_{mn}}{M_{mn} \bar{\omega}_{mn}^2 \sqrt{\left(1 - \frac{\gamma^2}{4} - \frac{p^2}{\bar{\omega}_{mn}^2}\right)^2 + \gamma^2}}, \quad \beta_{mn} = \arctg \frac{\gamma}{1 - \frac{\gamma^2}{4} - \frac{p^2}{\bar{\omega}_{mn}^2}},$$

$$\bar{\omega}_{mn} = \frac{\omega_{mn}}{\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4}}} \quad (6.76b)$$

### 三、强迫振动的阻尼效应

上面对于不同阻尼理论, 给出了薄板强迫振动解的解析表达式。从这些结果可以分析, 计入阻尼效应后薄板的强迫振动有以下几个特点:

(1) 由式 (6.71b), (6.76a), (6.76b) 知, 在  $p = \omega_{mn}$  共振时, 振幅也是有限的, 阻尼越大, 振幅越小; 在共振区, 阻尼  $\alpha$  或  $\gamma$  的引入使振幅改变很大; 而在非共振区, 阻尼  $\alpha$  或  $\gamma$  值影响很小。

(2) 由式 (6.71c), (6.76a), (6.76b) 知, 由于阻尼存在, 使反应与外载间有一相差; 这一相差当  $p$  增大时逐渐由 0 向  $\pi$  增加, 在共振时为  $\frac{\pi}{2}$ 。

(3) 由式 (6.71a), (6.77) 知, 解应是无穷多振型分量叠加; 因此, 在外频  $p$  与

( $m, n$ ) 阶频率 $\omega_{mn}$ 共振时, 该阶振型分量最大, 但有限, 其它阶很小, 这时反应的分布主要是该阶振型形状; 各点反应是具有各种相位的振型分量叠加, 因此由于阻尼板件各点相位是不一样的, 但在共振时, 只有共振的那阶分量很大, 其它阶很小, 因此各点相位又很接近。

以上一些结构动力响应特点是我们在实际结构动力问题中所观察到的, 这里是应用内摩擦理论, 从理论分析上论证这些现象。

#### 四、两类阻尼理论的比较

实际平板振动的现象为: 自由振动是周期衰减振动; 阻尼对频率影响较小, 而且各阶是按同一比例缩小的;  $\psi$  与频率无关, 与幅值有关。对比以上分析结果可知, 四种理论相比, 凯尔文理论与实际差别较大, 其它三种理论较好, 尤其是精确化理论, 更能反映实际客观现象。

目前, 一般认为复阻尼理论比较适合于结构的内摩擦计算, 而粘滞阻尼理论比较适合于地基等土体的内摩擦计算。因此平板计算以复阻尼理论为主, 但地下结构中板件以粘滞阻尼理论为主。

利用复阻尼理论另一个优点在于建立基本方程时方便。由式 (6.40b), (6.59b) 知, 复阻尼理论方程相当于无阻尼方程中弹性模量乘以  $e^{-i\psi}$  即可, 因此可比较容易推得积分方程、变分方程及数值计算格式。但复阻尼理论涉及复系数微积分方程, 求解时有一定数学困难, 只是对简谐载荷 (正如本节讨论的那样) 等特殊载荷才能比较容易得出解析结果。



## 第七章 平板振动的近似解法

前面几章已经系统讨论了板的基本方程及固有振动、自由振动、强迫振动的解法。但可以看到，这些大都是采用经典数学分析方法的精确解法，各自针对特定的几何形状、边界条件、板件参数和载荷的，而且主要解决一些比较正规、简单问题。但实际工程情况比较复杂，而且还有一些和其它构件组合情况，难于借用已有各法进行分析，因此需要寻求对一般板件均为适用，但又较为简易、近似的普遍解法，这对解决实际工程问题是很有意义的，当然这些近似解法也是建立于上面各章所述板件振动理论基础上的。

近似解虽然只能给出具有一定误差的近似结果，但是对实际振动分析还是很为实用的。因为实际工程中一些原始数据（诸如，几何尺寸、材料常数、外载强度以及边界条件模拟等）本来就具有一定误差，即使是“精确”解，也不过是真实解的一种逼近。此外，有许多实际计算，是为了估算和校核的目的，因此近似分析本身是允许的。另外，还要考虑实际计算的经济性，有的“精确”方法只在原则上是成立的，但实际计算的繁琐性已经失去了实用的价值，应用过程中又引入简化近似计算。

近似解法必然带有一定误差，其中包括原始数据误差、计算方法误差以及机器误差、人为误差等。在许多情况下还必须注意计算方法的稳定性与收敛性。这里还必须明确的一个概念是，近似方法结果不一定比“精确”方法实际解误差大，因为许多“精确”解均是无穷级数和，取有限项的实际结果可能有相当大的误差；另一方面，一些变分与数值解法却可以获取所需要的足够高的精确度；另外，大量近似解法均归纳为统一的线代方程组，易于用成熟、统一程序在计算机上求解，可减少人为误差，从而也提高结果的精度。

平板振动分析的近似解法种类繁多，但主要可分为两大类。一类是近似解析解。主要是基于变分方程的变分解法〔364〕〔365〕。一类是数值解法。目前计算技术的蓬勃发展，这类解法越来越受到重视与欢迎。部份近似解法已经在前面几章提及过，本章将进行这方面系统介绍。

### § 7.1 关于平板固有振动的变分原理

#### 一、位移变分原理

在式 (2.16) 中取  $q = 0$ ，设  $w(x, y, t) = W(x, y) \sin(\omega t + \phi)$  代入之，并沿一周积分，即得求解平板固有频率与振型的位移变分原理：

在满足位移边界条件的所有位移振型的几何可能解中，真正振型函数  $W(x, y)$  满足

$$\delta[U_{\omega} - \omega^2 T_{\omega}] = 0 \quad (7.1)$$

其中

$$U_{\omega} = U(W) \quad (7.2a)$$

为  $U$  的表达式中  $w$  代以  $W$

$$T_m = \frac{1}{2} \iint_i \rho h W^2 ds \quad (7.2b)$$

为  $T$  的表达式中  $\frac{\partial w}{\partial t}$  代以  $W$ 。对于不同坐标系的  $U$ ,  $T$  表达式可见第二章各节。例如在直角坐标系中

$$U_m = \frac{1}{2} \iint_i D \left\{ \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\nu) \left[ \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right] \right\} dx dy \quad (7.3a)$$

$$T_m = \frac{1}{2} \iint_i \rho h W^2 dx dy \quad (7.3b)$$

类同式 (2.17) 的推导, 可以证得方程 (7.1) 等价于

$$\begin{aligned} L(W, \delta W) = & \iint_i \left[ D \nabla^2 \nabla^2 W - \rho h \omega^2 W \right] \delta W ds - \int_L M_x^*(W) \delta \left( \frac{\partial W}{\partial n} \right) dL \\ & + \int_L \left[ Q_x^*(W) + \frac{\partial M_{xy}^*(W)}{\partial s} \right] \delta W dL = 0 \end{aligned} \quad (7.4)$$

式 (7.4) 即为振型形式的第二类变分方程, 其中第一项给出振型方程, 其余几项给出振型边界条件。

## 二、力变分原理

在满足力边界条件的所有内力振型解中真正振型函数  $M_x^*(x, y)$ ,  $M_y^*(x, y)$ ,  $M_{xy}^*(x, y)$  满足 [325]

$$\begin{aligned} \delta \left\{ \iint_i \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial^2 M_x^*}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^*}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^*}{\partial y^2} \right]^2 ds - \omega^2 \iint_i \frac{1}{D(1-\nu^2)} \left[ M_x^{*2} + M_y^{*2} \right. \right. \\ \left. \left. - 2\nu M_x^* M_y^* + 2(1+\nu) M_{xy}^{*2} \right] ds \right\} = 0 \end{aligned} \quad (7.5)$$

## § 7.2 瑞雷-里兹法

基于变分原理的近似解法中最常用的一种是瑞雷 (Reyleigh) - 里兹 (Ritz) 法, 它是一种将满足位移边界条件的位移振型的几何可能解代入位移变分原理来建立基本算式的变分解法。[248] [282]

### 一、瑞雷法

瑞雷 [214] 曾提出一个目前广为利用的确定振动体系最低固有频率的近似方法。这个方法是假定与实际振型相近的变形形状函数, 直接代入由位移变分原理推得的计算公式, 求取近似固有频率。对于平板, 可取满足给定位移边界条件的振型近似函数

$$W(x, y) = A_1 W_1(x, y) \quad (7.6)$$

式中  $A_1$  为任意常数,  $W_1(x, y)$  为选定的板面坐标的函数。代入位移变分原理, 式 (7.1) 有

$$\begin{aligned} \delta [U_m - \omega^2 T_m] &= \delta \{ A_1^2 [U_m(W_1) - \omega^2 T_m(W_1)] \} \\ &= 2 A_1 [U_m(W_1) - \omega^2 T_m(W_1)] \delta A_1 = 0 \end{aligned} \quad (a)$$

鉴于 $\delta A_1$ 任意,  $A_1 \neq 0$ , 得

$$U_m(W_1) - \omega^2 T_m(W_1) = 0 \quad (b)$$

则有

$$\omega^2 = \frac{U_m(W_1)}{T_m(W_1)} \quad (7.7a)$$

对于直角坐标系可写成

$$\begin{aligned} \omega^2 = & \left[ \iint_D D(x, y) \left\{ \left( \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 W_1}{\partial x \partial y} \right)^2 \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2} \right\} dx dy + \iint_D \rho h(x, y) W_1^2(x, y) dx dy \right] \quad (7.7b) \end{aligned}$$

对于其它坐标系, 可参见第二章公式, 按式 (7.2) 确定。

这就是瑞雷法的具体算式。式 (7.7) 表明, 若先假定一个近似振型函数, 分别代入式 (7.2a), (7.2b), 然后相除, 即能求取该系统基频近似解, 因此对于实际计算是非常方便的。这样将原来求解微分方程问题简化为简单定积分问题, 而且对于各种形状、各种边界条件的平板, 算式 (7.7a) 是统一的。

不言而喻, 用瑞雷法求取的固有频率的精度主要取决于所选取的近似振型函数的真实程度。如果所选取的振型函数越接近系统的基本振型, 则用瑞雷法求得的固有频率越接近系统的基频。不管什么函数, 只要选取的函数是满足位移边界条件的, 原则上按瑞雷法都能求得系统基频的近似解。

实践表明, 在应用式 (7.7) 求取平板基频时, 所选择的  $W_1(x, y)$  可按下述方法或原则确定:

(1) 取  $W_1$  为满足位移边界条件的一般多项式;

(2) 将在自重下该板的静挠度曲面函数作为  $W_1(x, y)$ ;

(3) 用逐次逼近法: 先任选满足位移边界之  $W_1(x, y)$ , 用式 (7.7) 求出  $\omega_1$ , 再求荷载  $q_1 = \rho h \omega_1^2 W_1$  作用下该板静力挠曲面  $W_2$ , 再用式 (7.7) 求出  $\omega_2$ , 再求  $q_2 = \rho h \omega_2^2 W_2$  以及  $W_3, \omega_3, \dots$  依次类推, 逐次逼近基频的真实解。

(4) 取满足位移边界条件之  $W_1(x, y) = f(x, y, a, b)$ , 其中  $a, b$  为待定系数, 代入式 (7.7), 求得  $\omega(a, b)$ , 由  $\frac{\partial \omega}{\partial a} = \frac{\partial \omega}{\partial b} = 0$  确定  $a, b$  值及相应  $\omega$ 。

(5) 对于复杂情况的平板 (如变厚度, 附加质量、刚度, 开孔等), 取相应简单情况下平板的精确解作为  $W_1(x, y)$ 。

下面举几个用瑞雷法求解平板基频的例子来加以说明。

#### 【例 1】四边固定矩形板

将直角坐标系的坐标原点设在板中心, 若沿  $x$  方向板长为  $a$ , 沿  $y$  方向板宽为  $b$ 。设满足周边固定边界条件的两种振型函数。

若取

$$W_1(x, y) = \left( x^2 - \frac{a^2}{4} \right)^2 \left( y^2 - \frac{b^2}{4} \right)^2 \quad (7.8a)$$

代入式 (7.7 b), 可得基频系数

$$\lambda_1^2 = \omega b^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}} = 22.45 \sqrt{1 + 0.571 \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^4} \quad (7.9 a)$$

对于方板, 有  $\lambda_1^2 = 36.00$

若取

$$W_1(x, y) = \left(1 + \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \left(1 + \cos \frac{2\pi y}{b}\right) \quad (7.8 b)$$

代入式 (7.7 b) 可得基频系数

$$\lambda_1^2 = \omega b^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}} = 22.79 \sqrt{1 + 0.667 \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^4} \quad (7.9 b)$$

对于方板, 有  $\lambda_1^2 = 37.22$

而由表 3.9 知, 方板频率系数较精确的解有  $\lambda_1^2 = 35.98$ 。因此选取不同  $W_1$  函数, 均可求得基频的近似解, 其精度取决于所设  $W_1$  函数与真实振型间接近程度。从上面结果来看, 显然式 (7.8 a) 更接近于四边固定矩形板的基本振型。

【例 2】径边简支、弧边自由的扇形板 (图 4.8)

将极坐标系原点设在张角为  $\beta$ , 半径为  $a$  的扇形板顶点, 轴为扇形板对称轴, 则可设满足两径边位移为零的振型函数

$$W_1(r, \theta) = r^2 \cos \frac{\pi}{\beta} \theta \quad (7.8 c)$$

代入式 (7.7 a), 可得基频系数

$$\lambda_1^2 = \omega a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}} = 1.732 \sqrt{\left[\left(\frac{\pi}{\beta}\right)^4 - 2\left(\frac{\pi}{\beta}\right)^2 + 8\right] - 2\nu \left[\left(\frac{\pi}{\beta}\right)^2 - 1\right] \frac{1}{3}} \quad (7.9 c)$$

按上式, 对于不同  $\beta$  值计算所得基频系数和第四章精确解比较见表 7.1

径边简支弧边自由扇形板基频系数  $\lambda_1 \left( \nu = \frac{1}{3} \right)$

表 7.1

$\beta$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
瑞雷法解	7.761	6.423	5.081	3.750	2.556
精确解	6.797	5.753	4.647	3.497	2.292

可见, 瑞雷法结果给出了基频的偏大近似值。式 (7.9 c) 提供了扇形板基频随  $\beta$  变化规律的解析算式。

【例 3】周边固定椭圆板

将直角坐标系设在长、短轴各为  $2a$ ,  $2b$  的椭圆板对称轴上, 则可设满足椭圆周边固定的边界条件的振型函数

$$W_1(x, y) = \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^2 \quad (7.8 d)$$

代入式 (7.7 b), 可得基频系数

$$\lambda_1^2 = \omega_1 a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}} = 6.323 \sqrt{1 + \frac{2}{3} \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{a}{b}\right)^4} \quad (7.9 d)$$

按上式, 对于不同  $\frac{b}{a}$  值计算所得基频系数和第四章精确解比较见表7.2

周边固定椭圆板基频系数  $\lambda_1$ 

表7.2

$b/a$	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
瑞雷法解	5.296	4.534	4.019	3.659	3.401	3.214
精确解	5.164	4.483	3.994	3.619	3.382	3.196

同样, 瑞雷法给出的基频结果比精确值大, 但有较好精度。

以上例子说明瑞雷法能较好地适应于不同形状、不同边界板的基频求解。同样瑞雷法还能适应于具有附加质量、刚度的板件的基频计算。如果附加的质量、刚度比板件本身质量、刚度小很多, 则  $W_1$  可以直接选用原板件基本振型函数  $W_{11}$ 。

设板 (图7.1) 上有多个集中质量  $M_i$  位于  $(x_i, y_i)$ ; 密度  $m$  的分布质量, 位于  $S_m$  域; 多个集中刚度  $K_j$ , 位于  $(x_j, y_j)$ ; 强度  $k$  的分布刚度, 位于  $S_k$  域。则按位移变分原理 (7.1), 同时考虑到在动能中计入附加质量

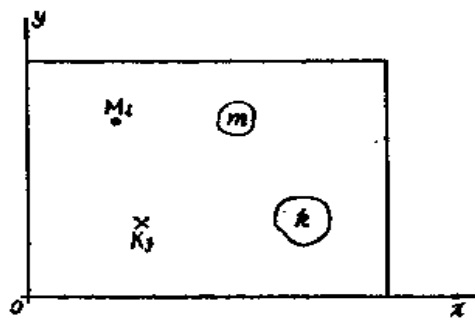


图 7.1

的动能, 变形能中计入附加刚度的变形能, 用  $W_{11}$  代之, 同样可得一般性基频计算公式:

$$\begin{aligned} \omega^2 = & \left\{ \iint D \left[ \left( \nabla^2 W_{11} \right)^2 - 2(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 W_{11}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W_{11}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 W_{11}}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] ds \right. \\ & + \sum_i K_j W_{11}^2(x_j, y_j) + \iint k W_{11}^2 ds \left. \right\} + \left\{ \iint \rho h W_{11}^2 ds + \sum_i M_i W_{11}^2(x_i, y_i) \right. \\ & \left. + \iint m W_{11}^2 ds \right\} \end{aligned} \quad (7.7c)$$

下面举个例子说明其应用

【例4】四边自由方板 (边长  $a$ ) , 底部对称四点 (离角点的两个方向距离均为  $\frac{a}{6}$ ) 有集中刚度  $K$ , 在中部有方形均布质量, 其总质量为  $M$  (所在域边长  $\frac{a}{3}$ )。则取  $W_{11}$  为两个方向第二阶自由-自由梁函数乘积, 代入上式, 可算得基频为

$$\omega = \bar{\omega} \eta_K \eta_M \quad (7.9e)$$

其中  $\bar{\omega}$  为方板本身基频, 而

$$\eta_K = \left[ 1 + \frac{2Ka^2}{(1-\nu)81D} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \eta_M = \left[ 1 + \frac{2M}{165\rho ha^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (7.9f)$$

## 二、关于瑞雷法频率为基频偏大值的证明

从上述各例已经看出, 由瑞雷法求得的频率均较平板基频精确值偏大, 实际上这是一个普遍规律, 对于任意情况的板件均成立。下面从理论上加以证明。

设板件第  $(m, n)$  阶真实法式化振型为  $W_{mn}(x, y)$ , 相应频率为  $\omega_{mn}$ 。则对所取任意函数  $W_1(x, y)$  均可利用振型函数正交性, 展开为

$$W_1(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} W_{mn}(x, y) \quad (c)$$

所以由式 (7.7a) 求得的

$$\omega^2 = \frac{U_m(W_1)}{T_m(W_1)} = \frac{U\left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} W_{mn}\right)}{\frac{1}{2} \iint_S \rho h \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} W_{mn}\right)^2 ds} \quad (d)$$

进行和 § 2.2 类 同的分部积分运算, 以及利用振型正交性及振型满足的振型方程, 可化为

$$\omega^2 = \frac{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 \iint_S D \nabla^2 \nabla^2 W_{mn} ds}{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 \iint_S \rho h W_{mn}^2 ds} = \frac{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 \iint_S \rho h \omega_{mn}^2 W_{mn}^2 ds}{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 \iint_S \rho h W_{mn}^2 ds} \quad (e)$$

再利用法式化条件, 有

$$\omega^2 = \frac{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 \omega_{mn}^2}{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2} = \omega_{11}^2 \left( \frac{a_{11}^2 + a_{12}^2 \frac{\omega_{12}^2}{\omega_{11}^2} + a_{21}^2 \frac{\omega_{21}^2}{\omega_{11}^2} + \dots}{a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + \dots} \right) \quad (f)$$

由于  $\frac{\omega_{12}}{\omega_{11}}, \frac{\omega_{21}}{\omega_{11}}, \dots$  均大于 1, 所以有  $\omega^2 \geq \omega_{11}^2$ , 也就是瑞雷法所给出的  $\omega$  大于板件的基频  $\omega_{11}$ 。同时也可看出, 若  $W_1$  越接近基本振型  $W_{11}$ , 则  $a_{12}, a_{21}, \dots$  分量很小, 故式 (f) 中括号内值越接近 1, 故  $\omega$  越接近真实基频  $\omega_{11}$ 。当  $W_1$  就是  $W_{11}$  时,  $a_{12}, a_{21}, \dots$  各分量为零, 因此有  $\omega = \omega_{11}$  的精确结果。

### 三、用瑞雷法求取高阶频率的近似解

用瑞雷法除能求取大家熟知的基频近似解外, 也可直接求取第二阶以至更高阶频率, 其基本原理是将所选用的  $W_1(x, y)$  函数中滤去低阶分量。

如果板件的第一阶振型  $W_{11}(x, y)$  已经求出, 则用瑞雷法求取第二阶频率时可以选择

$$W_2(x, y) = W_1(x, y) - a_{11} W_{11}(x, y) \quad (7.10a)$$

代入瑞雷法公式 (7.7a), 即

$$\omega^2 = \frac{U_m(W_2)}{T_m(W_2)} \quad (7.10b)$$

因为式 (7.10a) 代入式 (c) 有

$$W_2(x, y) = a_{12} W_{12} + a_{21} W_{21} + \dots \quad (g)$$

类同上一小节方法可证  $\omega^2 \geq \omega_{12}^2$ , 即为第二阶频率偏大近似值。而式 (7.10a) 中  $a_{11}$  值可根据振型正交性, 由式 (c) 得

$$a_{11} = \frac{\iint_S \rho h W_1 W_{11} ds}{\iint_S \rho h W_{11}^2 ds} \quad (7.10c)$$

以此类推, 若对所选用的函数  $W_1(x, y)$  滤去第  $K$  阶振型前各阶振型分量, 则可直接求得第  $K$  阶频率

$$\omega^2 = \frac{U_m(W_K)}{T_m(W_K)} \quad (7.11a)$$

其中,

$$W_K(x, y) = W_1(x, y) - \sum_{i=1}^{K-1} \frac{\iint \rho h W_i W_{K-1} ds}{\iint \rho h W_i^2 ds} W_{i1}(x, y) \quad (7.11b)$$

#### 四、改进瑞雷法

任取满足位移边界的函数  $W_1(x, y)$ , 求在载荷  $\rho h W_1$  作用下该板的静挠度, 用积分方程可表达为

$$W_2(x, y) = \iint K(x, y, \xi, \eta) \rho h(\xi, \eta) W_1(\xi, \eta) ds \quad (7.12a)$$

则

$$\omega^2 = \frac{\iint \rho h W_1 W_2 ds}{\iint \rho h W_1^2 ds} \quad (7.12b)$$

为比式 (7.7a) 更为精确的基频偏大近似值。[287]

更一般性可取

$$\omega^2 = \frac{\iint \rho h W_m W_n ds}{\iint \rho h W_K W_s ds} \quad (7.13a)$$

其中,  $K + s = m + n + 1$ , 而函数

$$W_K(x, y) = \iint K(x, y, \xi, \eta) \rho h(\xi, \eta) W_{K-1}(\xi, \eta) ds \quad (7.13b)$$

或

$$D \nabla^2 \nabla^2 W_K(x, y) = \rho h W_{K-1}(x, y) \quad (7.13c)$$

( $K = 2, 3, 4, \dots$ )

最后均和  $W_1$  有关, 而  $W_1$  为任取的满足位移边界的函数。

#### 五、里兹法

里兹 [227] 发展了瑞雷法, 它在所取的振型形状函数中引入了一个以上待定系数, 从而使频率解更为精确化, 而且能一次给出多个频率与振型的近似解。

取满足位移边界条件的振型近似函数

$$W(x, y) = \sum_{i=1}^n A_i W_i(x, y) \quad (7.14)$$

对于齐次位移边界, 则每个  $W_i(x, y)$  为满足位移边界条件的选定函数,  $A_i$  为待定系数, 代入位移变分原理 (7.1) 有

$$\begin{aligned}\delta[U_n - \omega^2 T_n] &= \delta \left[ U_n \left( \sum_{i=1}^n A_i W_i \right) - \omega^2 T_n \left( \sum_{i=1}^n A_i W_i \right) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial A_i} \left[ U_n \left( \sum_{i=1}^n A_i W_i \right) - \omega^2 T_n \left( \sum_{i=1}^n A_i W_i \right) \right] \delta A_i = 0\end{aligned}\quad (k)$$

由于  $\delta A_i$  的任意性, 所以得

$$\frac{\partial}{\partial A_i} \left[ U_n \left( \sum_{i=1}^n A_i W_i \right) - \omega^2 T_n \left( \sum_{i=1}^n A_i W_i \right) \right] = 0 \quad (7.15)$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

这是关于  $A_i$  的  $n$  阶齐次线代方程组, 由它的特征值及特征向量即可求取  $n$  个固有频率及振型, 这  $n$  个频率依次为板件前  $n$  阶固有频率的偏大近似值。式 (7.15) 即为里兹法的基本算式。可以看出, 当式 (7.14) 中只取一项时, 里兹法即蜕化为上面所述瑞雷法。

我们前面几章所采用的梁函数组合法实质上是一种里兹法的具体应用, 只不过  $W_i(x, y)$  选定为板件两方向相应边界条件各阶梁函数乘积而已。

#### 【例 1】具有内孔的四边自由方板

由于均为自由边界, 没有位移边界需事先满足, 可取振型函数 [200]

$$W(r, \theta) = \sum_{i=1}^4 A_i r^{2(i-2)} \sin 2\theta \quad (7.16a)$$

代入里兹法算式 (7.15), 计算固有频率。对于取不同项的带内圆孔、内方孔 (孔径或孔宽与边长比为 0.5, 边长为  $a$ ,  $\nu = 0.3$ ) 板的基频系数  $\lambda_1^2 = \omega_1 a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}}$  结果列于表 7.3。

具有内孔的四边自由方板基频系数  $\lambda$

表 7.3

包含系数	$A_1$	$A_1, A_2$	$A_1, A_2, A_3$	$A_1, A_2, A_4$	$A_1, A_2, A_3, A_4$
内圆孔板	1.786	1.740	1.721	1.707	1.702
内方孔板	1.760	1.712	1.699	1.686	1.685

从本例可以看出, 里兹法取得的也是频率偏大值, 项数越多, 则越精确, 值越小。因此用基于位移变分原理的各种近似方法求解固有频率, 凡其值越小, 则解越精确。这为我们判别结果精度提供了明确方向。

#### 【例 2】四角点可转动支承的四边自由矩形板 (图 7.2)

位移边界条件为四角点位移为零, 因此可设满足此位移条件的振型函数为

$$W(x, y) = \sum_{m=0}^p \sum_{n=1}^q \left[ A_{mn} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y + B_{mn} \cos \frac{m\pi}{b} y \sin \frac{n\pi}{a} x \right] \quad (7.16b)$$

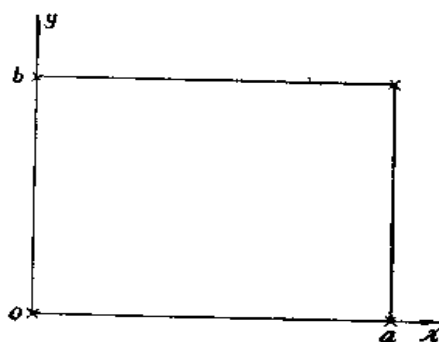


图 7.2



代入里兹法算式 (7.15), 可推得关于  $A_{mn}, B_{mn}$  的齐次线代方程组, 由系数行列式为零给出频率方程, 从而求取频率系数  $\lambda_n^2 = \omega_n b^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}}$  及振型系数列于表 7.4。

四角点支承的四边自由矩形板的频率系数  $\lambda_n$   
(括号内为主要振型系数分量) ( $\nu = 0.3$ )

表 7.4

$a/b \backslash n$	1	2	3	4
1.0	2.731( $A_{01} + B_{01}$ )	4.099( $B_{11}$ )	4.099( $A_{11}$ )	4.427( $A_{01} - B_{01}$ )
1.5	2.023( $B_{01}$ )	3.181( $B_{11}$ )	3.511( $A_{11}$ )	3.933( $A_{01}$ )
2.0	1.538( $B_{01}$ )	2.694( $B_{11}$ )	2.946( $B_{01}$ )	3.748( $A_{01}$ )
2.5	1.232( $B_{01}$ )	2.383( $B_{11}$ )	2.439( $B_{01}$ )	4.034( $B_{11}$ )

从本例可以看出, 用里兹法可以同时求取高阶频率。不同阶频率相应于不同振型, 这可以通过里兹法所取振型函数中不同系数组合来实现。

### § 7.3 迦辽金法

瑞雷-里兹法均是从位移变分方程 (7.1) 出发的变分解法。迦辽金法 (Галёркин) 则是从其等价的第二类变分方程 (7.4) 出发建立算式的。

取满足全部边界条件的振型函数

$$W(x, y) = \sum_{i=1}^n A_i W_i(x, y) \quad (7.17)$$

式中,  $W_i(x, y)$  为选定函数,  $A_i$  为待定系数。代入方程 (7.4), 由于函数 (7.17) 已满足全部边界条件, 因此只剩下面积分:

$$\iint [D \nabla^2 \nabla^2 \left( \sum_{i=1}^n A_i W_i \right) - \rho h \omega^2 \left( \sum_{i=1}^n A_i W_i \right)] \left( \delta \sum_{i=1}^n A_i W_i \right) ds = 0 \quad (a)$$

也即

$$\sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{j=1}^n A_j \iint [ (D \nabla^2 \nabla^2 W_i) W_j - \rho h \omega^2 W_i W_j ] ds \right\} \delta A_i = 0 \quad (b)$$

由于  $\delta A_i$  的任意性, 所以得

$$\sum_{i=1}^n [a_{ji} - \omega^2 \beta_{ji}] A_i = 0 \quad (j = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (7.18a)$$

其中

$$\begin{aligned} a_{ji} &= \iint (D \nabla^2 \nabla^2 W_i) W_j ds \\ \beta_{ji} &= \iint \rho h W_i W_j ds \end{aligned} \quad (7.18b)$$

这是关于  $A_i$  的  $n$  阶齐次线代方程组, 由它的特征值及特征向量即可求取  $n$  个固有频率及相应振型, 这  $n$  个频率依次为板件前  $n$  阶固有频率的偏大近似值。式 (7.18) 即为迦辽金法的基本

算式。

从式 (a) 看出, 迦辽金法可直接从基本微分方程出发来建立算式的, 而无须象瑞雷法那样需事先求取板件的变形能与动能等泛函, 因此对大多数问题而言是较为方便的。

【例】周边固定椭圆板 (图4.9)

我们计算用瑞雷法计算过的周边固定椭圆板。设满足周边全部边界条件的振型函数

$$W(x, y) = A_1 \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^2 + A_2 \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^3 \quad (7.19a)$$

代入式 (7.18) 可得频率系数解

$$\lambda_1^2 = \omega_1 a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}} = 6.263 \sqrt{1 + \frac{2}{3} \left( \frac{a}{b} \right)^2 + \left( \frac{a}{b} \right)^4} \quad (7.19b)$$

$$\lambda_2^2 = \omega_2 a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}} = 11.37 \sqrt{1 + \frac{2}{3} \left( \frac{a}{b} \right)^2 + \left( \frac{a}{b} \right)^4} \quad (7.19c)$$

对于不同  $b/a$  值算得的基频系数结果和第四章精确解比较见表7.5。迦辽金法也给出频率的偏大近似值。由于振型函数 (7.19a) 包括两个待定系数, 因此可给出二个频率近似值, 而且基频系数 (表7.5) 比只取一项的瑞雷法结果 (表7.2) 有更好的精度。

周边固定椭圆板基频系数  $\lambda_1$

表7.5

$b/a$	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
迦辽金法	5.269	4.512	3.999	3.641	3.384	3.198
精确解	5.164	4.483	3.994	3.619	3.382	3.196

迦辽金法也有其不足的一面, 即要求所选择的函数满足全部边界条件。实际从第二类变分方程 (7.4) 出发, 所选择的函数也可以部分或不满足边界条件, 只要将所设振型函数 (7.17) 直接代入方程 (7.4), 有算式

$$L\left(\sum_{i=1}^n A_i W_i, W_i\right) = 0 \quad (7.20)$$

其中泛函  $L(W, \delta W)$  表达式见式 (7.4)。这是一种广义迦辽金法。

## § 7.4 求解固有频率下限的方法

上述基于位移变分原理的诸法均是求取固有频率的偏大值, 即上限。为了给出固有频率估算的确切范围, 需要求取固有频率的下限。

### 一、变应力法

力变分原理 (7.5) 是指板的满足力边界条件的内力振型中真正内力振型解使下列泛函

$$\begin{aligned} L(M^*) = & \iint_s \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial^2 M_x^*}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^*}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^*}{\partial y^2} \right]^2 ds \\ & - \omega^2 \iint_s \frac{1}{D(1-\nu^2)} \left[ M_x^{*2} + M_y^{*2} \right. \\ & \left. - 2\nu M_x^* M_y^* + 2(1+\nu) M_{xy}^{*2} \right] ds \end{aligned} \quad (7.21a)$$

取极值。故若选取满足 (例  $x = x_0$ )

自由边:

$$M_x = 0$$

$$V_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = 0$$

简支边:

$$M_x = 0$$

固定边:

无

(7.21 b)

的近似内力振型函数

$$M_x^*(x, y) = \sum_{i=1}^n A_i M_{xi}(x, y) \quad (7.22 a)$$

$$M_y^*(x, y) = \sum_{j=1}^m B_j M_{yj}(x, y) \quad (7.22 b)$$

$$M_{xy}^*(x, y) = \sum_{k=1}^l C_k M_{xyk}(x, y) \quad (7.22 c)$$

使泛函  $L(M^*)$  取得极值, 并注意到  $\delta A_i, \delta B_j, \delta C_k$  的任意性, 可得算式

$$\begin{aligned} & \iint \frac{2}{\rho} \left[ \sum_{i=1}^n A_i \frac{\partial^2 M_{xi}}{\partial x^2} + \sum_{j=1}^m B_j \frac{\partial^2 M_{yj}}{\partial y^2} + 2 \sum_{k=1}^l C_k \frac{\partial^2 M_{xyk}}{\partial x \partial y} \right] \frac{\partial^2 M_{xi}}{\partial x^2} ds \\ & - \omega^2 \iint \frac{1}{D(1-\nu^2)} \left[ 2 \sum_{i=1}^n A_i M_{xi} - 2\nu \sum_{j=1}^m B_j M_{yj} \right] M_{xi} ds = 0 \\ & (i = 1, 2, 3, \dots, n) \end{aligned} \quad (7.23 a)$$

$$\begin{aligned} & \iint \frac{2}{\rho} \left[ \sum_{i=1}^n A_i \frac{\partial^2 M_{xi}}{\partial x^2} + \sum_{j=1}^m B_j \frac{\partial^2 M_{yj}}{\partial y^2} + 2 \sum_{k=1}^l C_k \frac{\partial^2 M_{xyk}}{\partial x \partial y} \right] \frac{\partial^2 M_{yj}}{\partial y^2} ds \\ & - \omega^2 \iint \frac{1}{D(1-\nu^2)} \left[ 2 \sum_{j=1}^m B_j M_{yj} - 2\nu \sum_{i=1}^n A_i M_{xi} \right] M_{yj} ds = 0 \\ & (j = 1, 2, 3, \dots, m) \end{aligned} \quad (7.23 b)$$

$$\begin{aligned} & \iint \frac{4}{\rho} \left[ \sum_{i=1}^n A_i \frac{\partial^2 M_{xi}}{\partial x^2} + \sum_{j=1}^m B_j \frac{\partial^2 M_{yj}}{\partial y^2} + 2 \sum_{k=1}^l C_k \frac{\partial^2 M_{xyk}}{\partial x \partial y} \right] \frac{\partial^2 M_{xyk}}{\partial x \partial y} ds \\ & - \omega^2 \iint \frac{2(1+\nu)}{D(1-\nu^2)} \left[ 2 \sum_{k=1}^l C_k M_{xyk} \right] M_{xyk} ds = 0 \quad (K = 1, 2, 3, \dots, l) \end{aligned} \quad (7.23 c)$$

这是关于  $A_i, B_j, C_k$  之齐次线代方程组, 由其系数行列式为零, 从而求取频率与振型, 给出固有频率偏小值, 即下限。

## 二、冬克雷法

由平板积分方程 (2.18 a) 给出振型形式的积分方程为

$$W(x, y) = \omega^2 \iint K(x, y, \xi, \eta) \rho h(\xi, \eta) W(\xi, \eta) ds \quad (7.24)$$

为了便于讨论冬克雷 (Dunkerley) 法原理, 将板件分割为若干个小块, 将上述积分化为叠

加形式:

$$W_{ij} = \omega^2 \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n \delta_{ij,pq} m_{pq} W_{pq} \quad (a)$$

其中

$$W_{ij} = W(x_i, y_j) \quad (b)$$

$$m_{pq} = \rho h(x_p, y_q) S_{pq} \quad (c)$$

而  $S_{pq}$  为  $(p, q)$  块面积,  $\delta_{ij,pq}$  为  $(i, j)$  与  $(p, q)$  点间柔性系数。

将式 (a) 改写为

$$\left[ m_{ij} \delta_{ij,ij} - \frac{1}{\omega^2} \right] W_{ij} + \sum_{p \neq i}^m \sum_{q \neq j}^n m_{pq} \delta_{ij,pq} W_{pq} = 0 \quad (d)$$

$$(i, j = 11, 12, \dots, pq)$$

这是关于未知振型  $W_{ij}$  的齐次线代方程组, 由系数行列式为零, 可求得频率方程。由分析知, 频率方程是一个关于  $\left(\frac{1}{\omega^2}\right)$  的  $m \times n$  次代数方程, 且首项  $\left(\frac{1}{\omega^2}\right)^{m \times n}$  项之系数为 1, 第二

项  $\left(\frac{1}{\omega^2}\right)^{m \times n - 1}$  项之系数为  $\pm \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n m_{ij} \delta_{ij,ij}$ 。根据高次代数方程性质, 第二项的系数为该方程的  $m \times n$  个  $\left(\frac{1}{\omega^2}\right)$  根之和, 即有

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n m_{ij} \delta_{ij,ij} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{1}{\omega_{ij}^2} \geq \frac{1}{\omega_{11}^2} \quad (7.25a)$$

所以有

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n m_{ij} \delta_{ij,ij}} \leq \omega_{11}^2 \quad (7.25b)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n m_{ij} \delta_{ij,ij}}} \leq \omega_{11} \quad (7.25c)$$

这就是一般离散体系的邓克雷法算式。现为了回复到板件来应用, 再将每块面积分割为无限小的求和用积分来表示为

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{\iint K(x, y, x, y) \rho h(x, y) ds}} \leq \omega_{11} \quad (7.25d)$$

若板上有附加质量, 则进一步有

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{\iint K(x, y, x, y) \rho h(x, y) ds + \sum_i M_i \delta_{ii}}} \leq \omega_{11} \quad (7.25e)$$

式中  $M_i$  为位于板上  $i$  点的集中质量值,  $\delta_{ii}$  为板上  $i$  点的柔度系数。上式表明, 按 (7.25e) 计算得到的频率为基频的下限近似值。

上述公式也可以推广用于近似估算连续板的频率。若有  $n$  跨连续板，其第  $i$  跨单个节间板当节线为简支、固定时的基频分别为  $\omega_{i1}$ ,  $\omega_{i2}$ ，则连续板的基频近似公式为

$$\omega = \frac{1}{2}(\omega_{i1} + \omega_{i2}) \quad (7.26a)$$

而

$$\omega_{i1} = \sqrt{\frac{1}{\sum_{j=1}^n \frac{1}{\omega_{ij1}^2}}}, \quad \omega_{i2} = \sqrt{\frac{1}{\sum_{j=1}^n \frac{1}{\omega_{ij2}^2}}} \quad (7.26b)$$

上述这些公式对于实际工程计算是相当方便的，因为式 (7.25) 中影响系数  $K(x, y, x, y)$  或柔度系数  $\delta_{ij}$  的求取是一个静力学问题，而且对于大部分板件的结果均有现成公式可循；而式 (7.26) 中  $\omega_{i1}$ ,  $\omega_{i2}$  值在前述各章中已详细讨论过了。

## § 7.5 积分方程近似解法

### 一、积分方程的变分法

用影响函数  $K$  来表示板的能量，将可建立积分方程形式的板的变分方程 (2.27)

$$\begin{aligned} & \delta \int_0^1 \iint \rho h(x, y) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, y, t) \left[ w(x, y, t) \right. \\ & \quad \left. + \iint K(x, y, \xi, \eta) \rho h(\xi, \eta) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(\xi, \eta, t) ds \right] ds dt \\ & \quad + \int_0^1 \iint q \delta w ds dt = 0 \end{aligned} \quad (7.27)$$

上式和积分方程 (2.18) 是等价的。

式 (7.27) 中取  $q = 0$ ，设  $w(x, y, t) = W(x, y) \sin(\omega t + \phi)$ ，代入之，并沿一周积分，有相应振型方程

$$\begin{aligned} & \delta \iint \rho h(x, y) W(x, y) \left[ W(x, y) - \omega^2 \iint K(x, y, \xi, \eta) \rho h(\xi, \eta) W(\xi, \eta) ds \right] ds \\ & = 0 \end{aligned} \quad (7.28)$$

设满足边界条件的振型解  $W(x, y) = \sum_{i=1}^n A_i W_i(x, y)$  代入上式，其中  $W_i$  为给定函数。

展开之，由于  $\delta A_i$  的任意性得

$$\sum_{i=1}^n [\alpha_{ij} - \omega^2 \beta_{ij}] A_i = 0 \quad (j = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (7.29a)$$

其中

$$\alpha_{ij} = \iint \rho h(x, y) W_i(x, y) W_j(x, y) ds \quad (7.29b)$$

$$\beta_{ij} = \iint \rho h(x, y) W_i(x, y) \left[ \iint K(x, y, \xi, \eta) \rho h(\xi, \eta) W_j(\xi, \eta) ds \right] ds$$

(7.29c)

这是关于 $A_i$ 的 $n$ 阶齐次线代方程组,可求取板件的固有频率与振型。这是一种积分方程形式的变分解法。

## 二、积分方程迭代法

对于振型积分方程(2.20b)可以按公式

$$W_{(m)}(x, y) = \iint_s K(x, y, \xi, \eta) \rho h(\xi, \eta) W_{(m-1)}(\xi, \eta) ds \quad (7.30a)$$

$$\omega_{(m)}^2 = \frac{W_{(m-1)}(x, y)}{W_{(m)}(x, y)} \quad (7.30b)$$

进行迭代计算,其中初次板振型函数 $W_{(0)}(x, y)$ 的确定方法可参见§7.2瑞雷法函数的选取。按上式进行反复迭代直至 $\omega_{(m)}^2 \approx \omega_{(m-1)}^2$ ,则

$$\omega_{(m)}^2 \approx \omega_1^2, \quad W_{(m)}(x, y) \approx W_1(x, y) \quad (7.30c)$$

即给出基频及基本振型近似值。

为了求取第二阶频率与振型,可以采用每次滤去基频分量的办法,即迭代公式为

$$W_{(m)}(x, y) = \iint_s K(x, y, \xi, \eta) \rho h(\xi, \eta) \bar{W}_{(m-1)}(\xi, \eta) ds \quad (7.31a)$$

$$\bar{W}_{(m-1)}(x, y) = W_{(m-1)}(x, y) - W_1(x, y) \frac{\iint_s \rho h(\xi, \eta) W_{(m-1)}(\xi, \eta) W_1(\xi, \eta) ds}{\iint_s \rho h(\xi, \eta) W_1^2(\xi, \eta) ds} \quad (m=1, 2, 3, \dots) \quad (7.31b)$$

$$\omega_{(m)}^2 = \frac{W_{(m-1)}(x, y)}{W_{(m)}(x, y)} \quad (7.31c)$$

当 $\omega_{(m)}^2 \approx \omega_{(m-1)}^2$ 时,则有

$$\omega_{(m)}^2 \approx \omega_2^2, \quad W_{(m)}(x, y) \approx W_2(x, y) \quad (7.31d)$$

用同样原理可以用本迭代法求取更高阶振型。关于上述迭代公式的收敛性证明可参见§7.13齐次线代方程特征值问题的迭代法。

## §7.6 斯托独拉静载法

平板固有振动满足振型方程

$$D \nabla^2 \nabla^2 W(x, y) = \rho h \omega^2 W(x, y) = F(x, y) \quad (7.32)$$

这一方程是类同平板静力问题的基本方程。因此上式表明,如果我们能找出一载荷 $F(x, y)$ ,作用在板件上,其静力挠曲面 $W(x, y)$ 和所作用的 $F(x, y)$ 完全相似,则此曲面即为振型,并从两者之间比值可推得相应的频率值。根据这一原理,我们即可用解静力问题的过程来迭代求解固有频率与振型,这就是斯托独拉(Stodola)静载法。该法的具体运算过程如下:

(1) 任设接近基本振型的板面函数 $W_{(1)}(x, y)$ (可参见§7.2瑞雷法的函数选取),组成一板面分布载荷 $F_{(1)}(x, y) = \rho h(x, y) W_{(1)}(x, y)$ ,求取在该载荷作用下(给定几何形状、边界条件、刚度与质量参数的)的本平板的静力挠曲面 $W_{(2)}(x, y)$ 。

(2) 一般来说, $W_{(2)}(x, y)$ 并不与 $W_{(1)}(x, y)$ 相似,则同样取载荷 $F_{(2)}(x, y) =$

$\rho h(x, y)W_{(2)}(x, y)$ , 再求静力挠曲面  $W_{(3)}(x, y)$ 。

(3) 重复上述步骤, 直至  $W_{(m+1)}(x, y)$  与  $W_{(m)}(x, y)$  相似, 则有基本频率

$$\omega_1^2 \approx \frac{W_{(m)}}{W_{(m+1)}} \quad (7.33a)$$

而基本振型

$$W_1(x, y) \approx W_{(m+1)}(x, y) \quad (7.33b)$$

由于  $W_{(m+1)}(x, y)$  已和  $W_{(m)}(x, y)$  相似, 因此式 (7.33a) 中  $W_{(m)}$  及  $W_{(m+1)}$  取为  $W_{(m)}(x, y)$  及  $W_{(m+1)}(x, y)$  在板上任意同一点的函数值即可。

这一方法也可以同样求取高阶振型与频率, 原理与上节迭代法一样。例如, 如在板面函数中滤去基频分量, 即可求取第二阶振型与频率。具体过程如下:

(1) 已知基本振型  $W_1(x, y)$  及基频  $\omega_1$  值, 则任设接近第二阶振型的板面函数  $W_{(1)}(x, y)$ , 并立

$$\bar{W}_{(1)}(x, y) = W_{(1)}(x, y) - a_1^{(1)} W_1(x, y) \quad (7.34a)$$

其中基频分量

$$a_1^{(1)} = \frac{\iint \rho h(x, y) W_{(1)}(x, y) W_1(x, y) ds}{\iint \rho h(x, y) W_1^2(x, y) ds} \quad (7.34b)$$

(2) 求在载荷  $F_{(1)}(x, y) = \rho h(x, y) \bar{W}_{(1)}(x, y)$  作用下该板静力挠曲面  $W_{(2)}(x, y)$ 。

(3) 重复上述过程。即在载荷

$$F_{(m)}(x, y) = \rho h(x, y) \bar{W}_{(m)}(x, y) \quad (m=1, 2, 3, \dots) \quad (7.34c)$$

作用下求该板的静力挠曲面  $W_{(m+1)}(x, y)$ 。式中

$$\bar{W}_{(m)}(x, y) = W_{(m)}(x, y) - a_1^{(m)} W_1(x, y) \quad (7.34d)$$

$$a_1^{(m)} = \frac{\iint \rho h(x, y) W_{(m)}(x, y) W_1(x, y) ds}{\iint \rho h(x, y) W_1^2(x, y) ds} \quad (7.34e)$$

(4) 在迭代若干次后, 则有

第二阶频率

$$\omega_2^2 \approx \frac{W_{(m)}}{W_{(m+1)}} \quad (7.34f)$$

第二阶振型

$$W_2(x, y) \approx W_{(m+1)}(x, y) \quad (7.34g)$$

本法的优点在于运算过程中主要环节是板的静力分析, 这就可直接利用现成的板件静力学结果。

## § 7.7 白劳金渐近法

设平板 (图7.3) 的振型渐近解

$$W(x, y) = A \sin\left(\frac{k_1}{a}x + \varphi_1\right) \sin\left(\frac{k_2}{b}y + \varphi_2\right) \quad (7.35a)$$

使其满足板域振型方程 (3.23), 则有关系式

$$\alpha^4 = \frac{\rho h}{D} \omega^2 = \left(\frac{k_1}{a}\right)^4 + 2\left(\frac{k_1}{a}\right)^2 \left(\frac{k_2}{b}\right)^2 + \left(\frac{k_2}{b}\right)^4 \quad (7.35b)$$

解(7.35)只满足振型方程,而不满足边界条件。其中系数 $k_1, k_2$ 是未知的,由满足振型边界条件确定。

再取欲满足 $y = \pm \frac{b}{2}$ 处边界条件的边界域

振型渐近解

$$W(x, y) = \sin\left(\frac{k_1}{a}x + \varphi_1\right)\psi(y) \quad (7.36a)$$

代入振型方程(3.23)得 $\psi(y)$ 方程

$$\psi'''' - 2\left(\frac{k_1}{a}\right)^2 \psi'' + \left[\left(\frac{k_1}{a}\right)^4 - \alpha^4\right]\psi = 0 \quad (7.36b)$$

代入式(7.35b)之 $\alpha^4$ 值,则有

$$\psi'''' - 2\left(\frac{k_1}{a}\right)^2 \psi'' - \left(\frac{k_2}{b}\right)^2 \left[\left(\frac{k_2}{b}\right)^2 + 2\left(\frac{k_1}{a}\right)^2\right]\psi = 0 \quad (7.36c)$$

常微分方程(7.36c)的特征根解为

$$s_{1,2} = \pm i\left(\frac{k_2}{b}\right), \quad s_{3,4} = \pm \sqrt{\left(\frac{k_2}{b}\right)^2 + 2\left(\frac{k_1}{a}\right)^2} \quad (7.36d)$$

因此有解

$$\begin{aligned} \psi(y) = & A_1 \sin \frac{k_2}{b} y + B_1 \cos \frac{k_2}{b} y + C_1 \operatorname{sh} \sqrt{\left(\frac{k_2}{b}\right)^2 + 2\left(\frac{k_1}{a}\right)^2} y \\ & + D_1 \operatorname{ch} \sqrt{\left(\frac{k_2}{b}\right)^2 + 2\left(\frac{k_1}{a}\right)^2} y \end{aligned} \quad (7.36e)$$

由 $y = \pm \frac{b}{2}$ 的四个边界条件确定 $A_1, B_1, C_1, D_1$ 所满足的四阶齐次线代方程组,由非零解给出的系数行列式为零,是关于 $k_1, k_2$ 的超越方程。

同样取欲满足 $x = \pm \frac{a}{2}$ 处边界条件的边界域振型渐近解

$$W(x, y) = \Phi(x) \sin\left(\frac{k_2}{b}y + \varphi_2\right) \quad (7.37a)$$

代入振型方程(3.23)得 $\Phi(x)$ 方程

$$\Phi'''' - 2\left(\frac{k_2}{b}\right)^2 \Phi'' + \left[\left(\frac{k_2}{b}\right)^4 - \alpha^4\right]\Phi = 0 \quad (7.37b)$$

代入式(7.35b)之 $\alpha^4$ 值,则有

$$\Phi'''' - 2\left(\frac{k_2}{b}\right)^2 \Phi'' - \left(\frac{k_1}{a}\right)^2 \left[\left(\frac{k_1}{a}\right)^2 + 2\left(\frac{k_2}{b}\right)^2\right]\Phi = 0 \quad (7.37c)$$

常微分方程(7.37c)的特征根解为

$$s_{1,2} = \pm i\left(\frac{k_1}{a}\right), \quad s_{3,4} = \pm \sqrt{\left(\frac{k_1}{a}\right)^2 + 2\left(\frac{k_2}{b}\right)^2} \quad (7.37d)$$

因此有解

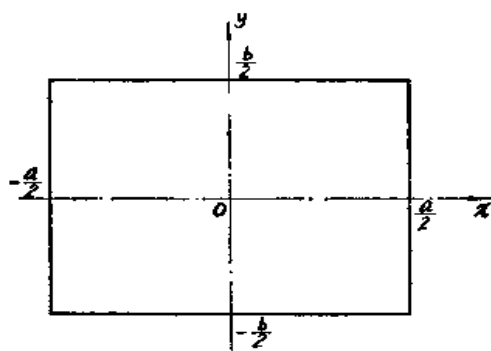


图 7.3



$$\begin{aligned}\Phi(x) = & A_2 \sin \frac{k_1}{a} x + B_2 \cos \frac{k_1}{a} x + C_2 \operatorname{sh} \sqrt{\left(\frac{k_1}{a}\right)^2 + 2\left(\frac{k_2}{b}\right)^2} x \\ & + D_2 \operatorname{ch} \sqrt{\left(\frac{k_1}{a}\right)^2 + 2\left(\frac{k_2}{b}\right)^2} x\end{aligned}\quad (7.37c)$$

由  $x = \pm \frac{a}{2}$  的四个边界条件确定  $A_2, B_2, C_2, D_2$  所满足的四阶齐次线代方程组, 由非零解给出的系数行列式为零, 是关于  $k_1$  和  $k_2$  的另一个超越方程。

例如, 四边固定板的两个联立超越方程为

$$\operatorname{tg} \frac{k_1}{2} = \begin{cases} -\sqrt{\left(\frac{k_1}{a}\right)^2 + 2\left(\frac{k_2}{b}\right)^2} \frac{a}{k_1} \operatorname{th} \left[ \sqrt{\left(\frac{k_1}{a}\right)^2 + 2\left(\frac{k_2}{b}\right)^2} \frac{a}{2} \right] & (\text{沿 } x \text{ 对称}) \\ \frac{k_1}{a \sqrt{\left(\frac{k_1}{a}\right)^2 + 2\left(\frac{k_2}{b}\right)^2}} \operatorname{th} \left[ \sqrt{\left(\frac{k_1}{a}\right)^2 + 2\left(\frac{k_2}{b}\right)^2} \frac{a}{2} \right] & (\text{沿 } x \text{ 反对称}) \end{cases}\quad (7.38a)$$

$$\operatorname{tg} \frac{k_2}{2} = \begin{cases} -\sqrt{\left(\frac{k_2}{b}\right)^2 + 2\left(\frac{k_1}{a}\right)^2} \frac{b}{k_2} \operatorname{th} \left[ \sqrt{\left(\frac{k_2}{b}\right)^2 + 2\left(\frac{k_1}{a}\right)^2} \frac{b}{2} \right] & (\text{沿 } y \text{ 对称}) \\ \frac{k_2}{b \sqrt{\left(\frac{k_2}{b}\right)^2 + 2\left(\frac{k_1}{a}\right)^2}} \operatorname{th} \left[ \sqrt{\left(\frac{k_2}{b}\right)^2 + 2\left(\frac{k_1}{a}\right)^2} \frac{b}{2} \right] & (\text{沿 } y \text{ 反对称}) \end{cases}\quad (7.38b)$$

由此可解得一系列  $k_{1n}, k_{2n}$ , 代回式 (7.35b) 可得  $\alpha^2_{nn} = \omega_{nn} \sqrt{\frac{\rho h}{D}}$ , 而振型为

$$W(x, y) = \Phi(x) \psi(y) \quad (7.39)$$

此法即为白劳金 (Bolotin) 渐近法<sup>[27][134]</sup>, 可求取板件的偏低近似频率 (下限)。

对于不同边界条件的方板, 用上述渐近法求得的  $k_1, k_2$  的第一个根及相应频率系数  $\lambda_1^2 = \omega_1 \alpha^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}}$  以及和附录 III 的结果比较列于表 7.6。

方板基频系数  $\lambda_1$  的渐近法解

表 7.6

边界条件	$x$ 方向	固定—固定	简支—简支	固定—固定	固定—自由	固定—自由
	$y$ 方向	固定—固定	固定—固定	自由—自由	自由—自由	固定—自由
$k_1$		4.189	3.665	4.412	1.709	1.712
$k_2$		4.189	3.665	2.603	2.205	1.712
渐近法解		$\lambda_1 = 5.924$	$\lambda_1 = 5.183$	$\lambda_2 = 5.122$	$\lambda_1 = 2.791$	$\lambda_1 = 2.421$
精确解		$\lambda_1 = 5.999$	$\lambda_1 = 5.381$	$\lambda_2 = 5.151$	$\lambda_2 = 2.919$	$\lambda_1 = 2.635$

## § 7.8 等效离散体系法

以上几节方法所给出的均是近似解析解, 即是以连续函数表达的振型结果, 这是平板振动近似分析方法的其中一个方面。另一方面则属于数值解法, 给出的有关结果是以离散的数值解来表达的, 这就是从本节开始以下几节所要讲述的另一类近似分析方法。

在一般结构动力学书籍中我们早已熟悉,任何工程结构的质量、刚度都是连续分布的,但都可以用有限自由度体系来处理,这就涉及到具有无限自由度的连续体简化为有限自由度的离散体系问题。本节将结合平板结构讲述这一简化与等效过程。这一过程又可包括等效成单自由度体系及等效成多自由度体系的两种方法。

### 一、等效单自由度体系

这一方法即是连续体等效成受集中外载的质量-弹簧体系,即可用单自由度体系的基本方程来表达:

$$M_e \ddot{w}_e + k_e w_e = P_e(t) \quad (7.40)$$

式中,  $M_e$  为等效质量,  $k_e$  为等效刚度,  $P_e$  为等效载荷,  $w_e$  为等效体系的位移。如果能等效成可用式 (7.40) 表达的单自由度体系, 则其动力分析就相当简单和熟知的。因此其关键在于  $M_e$ ,  $k_e$ ,  $P_e$  的确定以及  $w_e(t)$  和板件动力挠曲函数  $w(x, y, t)$  间转换关系的确立。

等效体系的等效参数的确定原则一般采用能量等效原理, 即等效体系的动能、变形能及外力作功和真实体系相应的动能、变形能及外力作功相等。这从变分原理角度来看, 这样的等效与简化导出的结果将会有相当的精度。

等效质量  $M_e$  按等效体系与真实体系动能相等条件确定, 对于平板一般为

$$M_e = \frac{\iint_S \rho h W^2(x, y) ds + \sum_i M_i W^2(x_i, y_i) + \iint_{S_m} m W^2(x, y) ds}{W_m^2} \quad (7.41a)$$

等效刚度  $k_e$  按等效体系与真实体系变形能相等条件确定, 对于平板一般为

$$k_e = \frac{\left\{ \iint_S D \left[ (\nabla^2 W)^2 - 2(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] ds + \sum_i k_i W^2(x_i, y_i) + \iint_{S_b} k W^2(x, y) ds \right\}}{W_m^2} \quad (7.41b)$$

等效载荷  $P_e(t)$  按等效体系与真实体系的外力作功相等条件确定, 对于平板一般为

$$P_e(t) = \frac{\iint_S q(x, y, z, t) W(x, y) ds}{W_m} \quad (7.41c)$$

式 (7.41) 各式中  $\rho h, D, q$  分别为真实板件的质量密度、弯曲刚度、横向 外载强度;  $M_i, m, k_i, k$  分别为真实板件的附加集中、分布的质量与刚度;  $W(x, y)$  为相应的振型函数或动力响应函数。一般对于求解基频或常见分布载荷下动力反应问题,  $W(x, y)$  可选取为接近基本振型的板面函数 (可参见 § 7.2); 但对求解高频或特殊分布载荷 (达种载荷下的板件动力响应以高频分量为主) 下动力反应问题, 则  $W(x, y)$  可选取为与相应振型相接近的板面函数。而  $W_m$  为  $W(x, y)$  中某一确定点的函数值, 一般选取为  $W(x, y)$  的最大值。当然选取不同的  $W(x, y)$ , 则相应单自由度体系分析所给出的结果会有所不同。

例如, 对于常用的四边简支、四边固定的矩形板的质量系数  $k_M = \frac{M_e}{\rho h a b}$ , 刚度系数  $k_K$

$$= \frac{k_s}{k\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)}, \text{ 载荷系数 } k_p = \frac{P_s(t)}{\iint q(x, y, t) ds} = k_K \text{ 可选用表7.7所列各值,}$$

四边简支, 四边固定矩形板的质量系数与刚度系数( $\nu = 0.3$ )

表7.7

边界	$a/b$	$k_M$	$k_K$	$k\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$
简支	1.0	0.31	0.45	$22.6 \frac{Eh^3}{a^2}$
	0.5	0.41	0.55	$18.0 \frac{Eh^3}{a^2}$
固定	1.0	0.21	0.33	$72.5 \frac{Eh^3}{a^2}$
	0.5	0.31	0.43	$72.2 \frac{Eh^3}{a^2}$

有了方程 (7.40) 各系数值, 则进一步求解固有频率或动力响应, 就十分简单了。按单自由度体系理论, 有体系固有频率

$$\omega = \sqrt{\frac{k_s}{M_s}} \quad (7.42a)$$

动力反应的特解为

$$w_s = \frac{1}{\sqrt{M_s k_s}} \int_0^t P_s(\tau) \sin \sqrt{\frac{k_s}{M_s}} (t - \tau) d\tau \quad (7.42b)$$

整体板件动力反应的解为

$$w(x, y, t) = \frac{w_s}{W_m} W(x, y) \quad (7.42c)$$

式中  $W(x, y)$  及  $W_m$  为原来所选用的板面函数及其确定点的值。当然用等效单自由度体系法还可加入相应阻尼项, 求解有阻尼振动。

例如, 对于四边简支方板, 将表7.7中第一行值代入式 (7.42a), 求得频率近似解

$$\omega = \sqrt{\frac{k_K \cdot k\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)}{k_M \cdot \rho h a^2}} = \frac{18.93}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad (a)$$

大家熟知, 精确值应为

$$\omega_1 = \frac{2\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} = \frac{19.73}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad (b)$$

因此用等效单自由度体系法也能达到一定精度。

## 二、等效多自由度体系

将板件等效成单自由度体系只能计算一个固有频率, 而且误差较大。为求取多阶固有频率, 获得较高精度, 进一步可将连续板件离散为多个点质量或质量块, 而置于无质量的弹性板面上进行分析。这样的体系就可以用一般结构动力学中所研究的多自由度体系方法来进行讨论。

设具有一定边界条件的无质量弹性板件上有  $n$  个集中质量  $m_1, m_2, \dots, m_i, \dots, m_n$  (图

7.4)。在处于某振型 $W(x, y)$ 及相应频率 $\omega$ 时，相当在 $S$ 点作用有集中力

$$P_s = \omega^2 m_s W_s \quad (7.43 a)$$

式中 $W_s$ 为该振型 $W(x, y)$ 在 $S$ 点的值，则利用叠加原理在 $K$ 点的挠曲振型应为

$$W_k = \sum_{s=1}^n P_s \delta_{ks} = \sum_{s=1}^n \omega^2 m_s W_s \delta_{ks} \quad (k=1, 2, 3, \dots, n) \quad (7.43 b)$$

其中 $\delta_{ks}$ 为 $S$ 处作用单位集中力时引起该板件在 $k$ 处的静挠度（柔度系数），它取决于板的不同形状、尺寸、材料与边界，由板的静力分析给出。式（7.43 b）是关于 $W_s$ 的 $n$ 阶齐次线代方程组，可改写为矩阵形式

$$[[\delta][m] - \frac{1}{\omega^2}[I]]\{W\} = [A]\{W\} = \{0\} \quad (7.44 a)$$

其中，

质量矩阵

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & & & 0 \\ & m_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & m_n \end{bmatrix} \quad (7.44 b)$$

柔度矩阵

$$[\delta] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \cdots & \delta_{nn} \end{bmatrix} \quad (7.44 c)$$

振型矩阵

$$\{W\} = [W_1 W_2 \cdots W_n]^T \quad (7.44 d)$$

而 $[I]$ 为单位对角矩阵， $\{0\}$ 为零列阵。齐次线代方程组（7.44）有非零解的充分、必要条件为其系数行列式为零，即

$$\text{Det}[A] = 0 \quad (7.45)$$

从而给出关于 $\omega^2$ 的频率方程，可求取各阶固有频率 $\omega_k$ （ $k=1, 2, 3, \dots, n$ ），再代回方程（7.44 a），给出相应各阶振型向量

$$\{W\}_k = [W_{1k} W_{2k} \cdots W_{nk}]^T \quad (k=1, 2, 3, \dots, n) \quad (7.46)$$

算式（7.44 a）中柔度矩阵 $[\delta]$ 可用一般平板静力学方法求得。质量矩阵 $[m]$ 的求取有两种方法：集中质量阵与等效质量阵。集中质量阵形式如同式（7.44 b）所示，其中元素 $m_s$ 为板件作简单分割后， $S$ 点附近几何域质量的全部或部分（对于含支承边界域）。等效质量阵形式仍为式（7.44 b），但其中元素按动能等效原理确定，如同等效单自由度体系的式（7.41 a）有



图7.4

$$m_s = \frac{\iint_{S_s} \rho h W^2(x, y) ds}{W_s^2} \quad (7.47a)$$

其中,  $W(x, y)$  为所设满足位移边界, 接近所求振型形状或响应形状的给定函数;  $W_s$  为在  $S$  点的  $W$  值;  $\rho h$  为包括板面质量及附加集中、分布质量的质量密度;  $S_s$  为分割后  $S$  点附近几何域。

【例】悬臂平行四边形板。全板等效为三个具有平移与转动特性的质量块(图7.5), 考虑一个具有六个自由度的离散体系。按本法求得的前三阶频率系数  $\lambda^2 = \omega_n b^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}}$  列于表7.8。

悬臂平行四边形板频率系数  $\lambda$  表7.8

$\beta_0$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$
$b/a$	0.697	0.387	0.398
$\lambda_1$	1.612	0.7769	0.7626
$\lambda_2$	2.952	1.715	1.616
$\lambda_3$	3.924	1.978	1.896

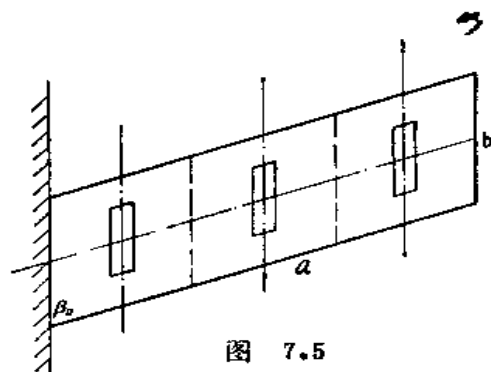


图 7.5

等效多自由度体系法同样也可用于强迫振动分析, 原理同上, 只要在应用叠加原理计算质量所在点挠曲时, 同时考虑惯性力与外载作用, 即

$$w_n = \sum_{i=1}^n \delta_{ni} (-m_i \ddot{w}_i + F_i) \quad (7.48a)$$

则有矩阵形式算式

$$[m]\{\ddot{w}\} + [K]\{w\} = \{F\} \quad (7.48b)$$

其中,  $[m]$  为质量矩阵, 确定方法见前;  $[K]$  为刚度矩阵, 是上述柔度矩阵  $[\delta]$  的逆矩阵, 载荷列阵  $\{F\}$  中各元素可按下列方法确定:

- (1) 简单地取该点所占几何域上全部或部分(对于含支承边界域)外载;
- (2) 在板的所有集中点下方加支座, 求出在真实外载作用下各点反力, 反向地加在各点作为集中外载。

- (3) 按外载做功等效原理, 如同等效单自由度体系的式(7.41c), 有

$$F_s(t) = \frac{\iint_{S_s} q(x, y, t) W(x, y) ds}{W_s} \quad (7.47b)$$

其中,  $q(x, y, t)$  为实际外载分布, 其它符号意义同前。

关于齐次线代方程组(7.44a)及联立常微分方程组(7.48b)的解法见§7.13—§7.15。

## §7.9 等效网格梁法

在上节等效离散体系法中, 质量、载荷是离散的, 但刚度还是按连续弹性板求取的, 这

对某些形状、边界条件的板件还是存在一定困难的。大多数工程技术人员比较熟悉的还是梁系的结构力学分析方法，而且梁系分析对于大多数计算机又各有现成程序，因此本节再介绍一种用网格梁替代连续弹性板进行离散化计算的方法。

等效网格梁法最主要特点是将弹性平板简化为交叉梁系（图7.6），每个构件作为一个梁来处理，在结点上梁间是刚接的，边界支承条件不变。这样的等效体系基本方程仍为式（7.48b），质量与载荷矩阵建立方法同上节，只是每个集中质量有三个自由度（挠曲及沿二个方向的转动），刚度矩阵可按梁系的结构力学方法求得。等效梁构件的重要刚度参数——弯曲刚度可根据变形能等效确定。〔116〕〔41〕例如，对于图7.6所示正方形网格梁的等效体系，有其

直梁弯曲刚度

$$EJ_1 = \frac{Eah^3}{12(1+\nu)} \quad (7.49a)$$

斜梁弯曲刚度

$$EJ_2 = \frac{Eah^3}{12\sqrt{2}(1+\nu)} \quad (7.49b)$$

而在边界处取其一半值。根据刚度系数定义，可在某一结点产生单位位移或转角，其它结点固定情况下，求取该梁系的结点反力或反力矩，形成刚阵元素。实际计算可用单元刚阵元素叠加形成总刚阵，这样形成的刚阵是带状对称方阵。

等效网格梁法对板件几何、材料、载荷、边界条件有很大适应性，可进行自振特性、自由振动、强迫振动分析，也宜于上机计算，所得到的精度对于大部份工程问题来说也是足够的。另外，这一方程从开始处理就变成一种梁系，这可免于涉及板件理论有关一系列复杂问题。

【例】悬臂等腰直角三角形板。简化为如图7.7所示网格梁，将质量集中在图示十个结点上，共计30个自由度。集中质量及转动惯量取附近 $\frac{2b}{9}$ 宽度板件计算。刚度系数按上述方法计算。求得板件头三阶频率系数 $\lambda_1^2 = \omega_1 b^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}}$ 及相应挠曲振型系数列于表7.9。

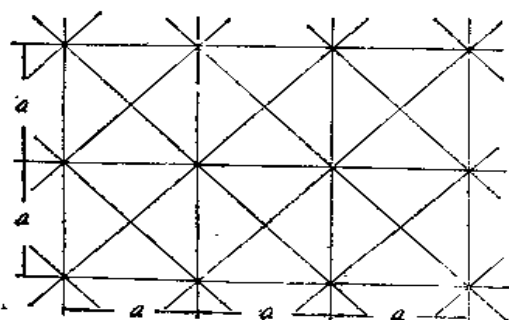


图 7.6

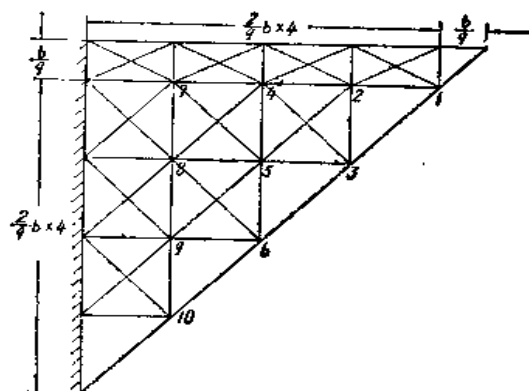


图 7.7

悬臂等腰直角三角形板的频率系数及振型系数 ( $\nu = 0.3$ )

表 7.9

$n$	$\lambda_n$	$W_1$	$W_2$	$W_3$	$W_4$	$W_5$	$W_6$	$W_7$	$W_8$	$W_9$	$W_{10}$
1	2.480	1.00	0.65	0.56	0.33	0.28	0.20	0.10	0.06	0.06	0.02
2	4.868	1.00	0.29	-0.94	-0.05	-0.78	-1.33	-0.05	-0.32	-0.45	-0.31
3	6.704	1.00	-0.27	0.45	-0.81	-0.07	0.43	-0.47	-0.11	0.12	0.11

## § 7.10 有限差分法

有限差分法是一种直接从相应问题的微分方程出发的离散化方法。〔260〕〔261〕这种方法不与问题的物理模型直接发生联系，而只与反映问题物理本质的数学方程有关，因此对具有共同方程形式的不同物理问题将具有同样的离散化格式。有限差分法主要在数学上应用差商代替方程及边界条件中微商，从而进行离散。对于平板振动问题，即是将板的连续振型函数或动力响应函数及其导数用其定义域内一系列选定坐标点的函数值来表示，从而将偏微分方程变为常微分或代数方程问题。

## 一、导数及偏导数的有限差分表达式

一般物理问题的基本方程及边界条件均是未知函数及其导数、偏导数所应满足的方程。要将微分方程离散化，首先要建立导数与偏导数的差分表达式。

以中心差分为例。各阶导数用差分可表示为 (图 7.8)

$$\left(\frac{dw}{dx}\right)_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\lambda}(w_{i+1} - w_i) \quad (7.50a)$$

$$\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)_i = \frac{1}{\lambda^2}(w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}) \quad (7.50b)$$

$$\left(\frac{d^3w}{dx^3}\right)_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\lambda^3}(w_{i+2} - 3w_{i+1} + 3w_i - w_{i-1}) \quad (7.50c)$$

$$\left(\frac{d^4w}{dx^4}\right)_i = \frac{1}{\lambda^4}(w_{i+2} - 4w_{i+1} + 6w_i - 4w_{i-1} + w_{i-2}) \quad (7.50d)$$

其中  $\lambda$  为  $x$  向差分步长，各阶偏导数用差分可表示为 (图 7.9)

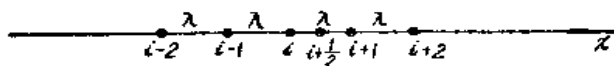


图 7.8

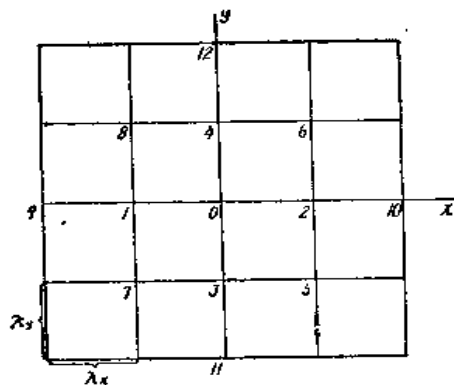


图 7.9

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 = \frac{1}{2\lambda_x} [w_2 - w_1] \quad (7.51a)$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_0 = \frac{1}{\lambda_x^2} [w_2 - 2w_0 + w_1] \quad (7.51b)$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_0 = \frac{1}{4\lambda_x \lambda_y} [w_7 - w_6 + w_8 - w_9] \quad (7.51c)$$

$$\left(\nabla^2 w\right)_0 = \frac{1}{\lambda_x^2} [w_2 - 2w_0 + w_1] + \frac{1}{\lambda_y^2} [w_4 - 2w_0 + w_3] \quad (7.51d)$$

$$\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right)_0 = \frac{1}{\lambda_x^4} [(w_{10} + w_9) - 4(w_2 + w_1) + 6w_0] \quad (7.51e)$$

$$\left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)_0 = \frac{1}{\lambda_y^4} [(w_{12} + w_{11}) - 4(w_4 + w_3) + 6w_0] \quad (7.51f)$$

$$\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_0 = \frac{1}{\lambda_x^2 \lambda_y^2} [(w_8 + w_7 + w_6 + w_9) - 2(w_4 + w_3 + w_2 + w_1) + 4w_0] \quad (7.51g)$$

其中 $\lambda_x$ 、 $\lambda_y$ 分别为 $x$ 、 $y$ 方向差分步长。

## 二、直角坐标系薄板振动分析的有限差分格式

直角坐标系的薄板振动基本方程按式(2.10)有

$$D \left[ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, y, t) \quad (7.52a)$$

则板上某点0的基本方程差分格式,按式(7.51),有

$$D_0 L_0(w) + \rho_0 h_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} = q_0(t) \quad (7.53a)$$

其中

$$\begin{aligned} L_0(w) = & \frac{1}{\lambda_x^4} (w_{10} + w_9) + \frac{1}{\lambda_y^4} (w_{12} + w_{11}) + \frac{2}{\lambda_x^2 \lambda_y^2} (w_8 + w_7 + w_6 + w_9) \\ & - \frac{4}{\lambda_x^2} \left( \frac{1}{\lambda_x^2} + \frac{1}{\lambda_y^2} \right) (w_2 + w_1) - \frac{4}{\lambda_y^2} \left( \frac{1}{\lambda_x^2} + \frac{1}{\lambda_y^2} \right) (w_4 + w_3) \\ & + 2 \left( \frac{3}{\lambda_x^4} + \frac{4}{\lambda_x^2 \lambda_y^2} + \frac{3}{\lambda_y^4} \right) w_0 \end{aligned} \quad (7.53b)$$

式中 $D_0$ 、 $\rho_0$ 、 $h_0$ 、 $q_0$ 分别为相应量在0点的值。若板上各结点事先统一编号,对于每个内结点可建立类似式(7.53)的差分算式。应注意到,对于边界向内一个步长处各结点建立差分方程,将涉及边界上及边界外一个步长处结点(虚拟点)的挠度,然而对于板件边界上一个结点有两个边界条件,按差分格式(7.51),可建立两个差分方程,因此结点挠度总数和方程总数是相等的,因而这些方程的集合,可表达为全板各结点挠度所应满足的非齐次常微分方程组

$$[A]\{\ddot{w}\} + [B]\{w\} = \{F\} \quad (7.54a)$$

方程组(7.54a)与§7.8的方程组(7.48b)具有同样形式,不过矩阵含义不同,其解法将统一在§7.14,§7.15介绍。进一步可按式(2.6),(2.9)相应差分格式求取板件内力的差分算式,可用于边界条件差分方程及按结点挠度计算结点内力:

$$(M_x)_0 = -D \left[ \frac{1}{\lambda_x^2} (w_2 + w_1) + \frac{\nu}{\lambda_y^2} (w_4 + w_3) - 2 \left( \frac{1}{\lambda_x^2} + \frac{\nu}{\lambda_y^2} \right) w_0 \right] \quad (7.55a)$$

$$(M_y)_0 = -D \left[ \frac{\nu}{\lambda_x^2} (w_2 + w_1) + \frac{1}{\lambda_y^2} (w_4 + w_3) - 2 \left( \frac{\nu}{\lambda_x^2} + \frac{1}{\lambda_y^2} \right) w_0 \right] \quad (7.55b)$$



$$(M_{xy})_0 = -\frac{D(1-\nu)}{4\lambda_x\lambda_y}[(w_7+w_8)-(w_8+w_5)] \quad (7.55c)$$

$$(Q_x)_0 = -\frac{D}{2}\left[\frac{w_{10}-w_9}{\lambda_x^3} + \frac{(w_8+w_6)-(w_8+w_7)}{\lambda_x\lambda_y^2} + \frac{2}{\lambda_x}\left(\frac{1}{\lambda_x^2} + \frac{1}{\lambda_y^2}\right)(w_1-w_2)\right] \quad (7.56a)$$

$$(Q_y)_0 = -\frac{D}{2}\left[\frac{w_{12}-w_{11}}{\lambda_y^3} + \frac{(w_8+w_6)-(w_7+w_5)}{\lambda_x^2\lambda_y} + \frac{2}{\lambda_y}\left(\frac{1}{\lambda_x^2} + \frac{1}{\lambda_y^2}\right)(w_3-w_4)\right] \quad (7.56b)$$

对于固有振动问题，薄板振型的基本方程为

$$D\left[\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 W}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4}\right] - \rho h\omega^2 W = 0 \quad (7.52b)$$

则板上某点 0 的基本方程差分格式类似有

$$D_0 L_0(W) - \rho_0 h_0 \omega^2 W_0 = 0 \quad (7.53c)$$

其中算式  $L_0$  见式 (7.53b)。同样每个内结点的基本方程以及边界结点的边界条件的差分算式集合为全板各结点振型所应满足的齐次线代方程组

$$[A]\{W\} = \{0\} \quad (7.54b)$$

方程组 (7.54b) 与 §7.8 的方程组 (7.44a) 具有同样形式，矩阵  $[A]$  中均含有未知频率  $\omega$  项，由其特征值及特征向量可求得系统的固有频率与振型，其解法将统一在 §7.13 中介绍。

【例 1】四边简支方板，取  $3 \times 3$  网格，用有限差分法求得的前四阶频率系数  $\lambda_1^2 = \omega_1 a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}}$  与精确解比较列于表 7.10。

四边简支方板频率系数  $\lambda_1$

表 7.10

$n$	1	2	3	4
有限差分法解	4.279	6.071	6.071	7.423
精确解	4.443	7.025	7.025	8.886

【例 2】四角点支承四边自由矩形板，对于不同网格，用有限差分法求得的基频系数  $\lambda_1^2 = \omega_1 b^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}}$  列于表 7.11。

四角点支承四边自由矩形板基频系数  $\lambda_1$

表 7.11

$a/b$	1.0			1.5			2.0		
网 格	4×4	6×6	10×10	4×6	6×9	10×15	4×8	6×12	10×20
$\lambda_1$	2.643	2.657	2.670	1.977	1.987	1.994	1.517	1.523	1.527

从上述两例可以看到，对于基频用比较粗糙的网格也能给出较为满意的结果，但对于高频，则必须采用较细密的网格才行。

### 三、斜坐标系薄板振动分析的有限差分格式

在斜坐标系中薄板固有振动及强迫振动分析的有限差分算式仍分别为式 (7.53c) 及式 (7.53a)，只是算式  $L_0$  发生变化。在斜坐标系中结点挠度的拉普拉斯算子的有限差分格式

为 (图7.10)

$$(\nabla^2 w)_0 = \frac{1}{\cos^2 \beta} \left\{ \frac{(w_2 - 2w_0 + w_1)}{\lambda_\xi^2} + \frac{(w_4 - 2w_0 + w_3)}{\lambda_\eta^2} - \frac{\sin \beta}{2\lambda_\xi \lambda_\eta} (w_7 + w_6 - w_8 - w_5) \right\} \quad (7.57a)$$

式中  $\lambda_\xi, \lambda_\eta$  分别为沿斜坐标系坐标轴  $\xi, \eta$  方向的步长。显然, 当  $\beta = 0$  时, 就变成直角坐标系的表达式 (7.51d)。因此在直角坐标系中一点挠度的拉普拉斯算子的有限差分算式只与附近四个结点挠度有关; 但在斜坐标系中则与附近八个结点挠度有关。对式 (7.57a) 两边均作  $\nabla^2$  运算, 对于右边九个结点挠度的拉普拉斯算子  $\nabla^2 w_i (i=0, 1, 2, \dots, 8)$ , 再代入其与式 (7.57a) 相类似的有限差分算式, 即可求得  $L_0(w)$  算式。由于上面所述原因, 一点挠度的  $L_0$  算式不再是象式 (7.53b) 那样, 只与附近12个结点的挠度值有关, 而是和附近24个结点的挠度值有关。<sup>[330][358]</sup> 为了简便起见, 这里列出  $\lambda_\xi = \lambda_\eta = \lambda, \beta = 30^\circ$  的  $L_0(w)$  算式来说明这一现象:

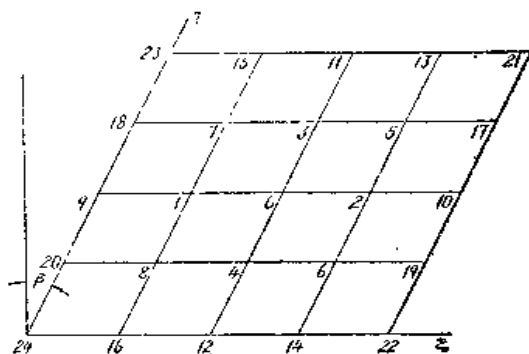


图 7.10

$$\begin{aligned} L_0(w) = & \frac{1}{9\lambda^4} \{ (w_{24} + w_{23} + w_{22} + w_{21}) + 8[(w_{18} + w_{18}) + (w_{16} + w_{14}) \\ & - (w_{20} + w_{17}) - (w_{16} + w_{13})] + 14(w_{12} + w_{11} + w_{10} + w_0) \\ & + 64[(w_8 + w_5) - (w_7 + w_6)] - 128(w_4 + w_3 + w_2 + w_1) + 324w_0 \} \end{aligned} \quad (7.57b)$$

#### 四、有限差分法的误差估计

为了确定应用差分算式来表示原始函数的导数算式 (7.50) 的误差, 我们可以借助于泰勒 (Taylor) 级数的展开式。函数  $w(x)$  的泰勒展开式有

$$w_{i+1} = w_i + \frac{\lambda}{1!} w'_i + \frac{\lambda^2}{2!} w''_i + \frac{\lambda^3}{3!} w'''_i + \dots \quad (7.58a)$$

$$w_{i-1} = w_i - \frac{\lambda}{1!} w'_i + \frac{\lambda^2}{2!} w''_i - \frac{\lambda^3}{3!} w'''_i + \dots \quad (7.58b)$$

两式相减得

$$\left( \frac{dw}{dx} \right)_i = \frac{1}{2\lambda} (w_{i+1} - w_{i-1}) - \frac{\lambda^2}{3!} w'''_i - \frac{\lambda^4}{5!} w^{(5)}_i - \dots \quad (7.59a)$$

两式相加得

$$\left( \frac{d^2w}{dx^2} \right)_i = \frac{1}{\lambda^2} (w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}) - \frac{2\lambda^2}{4!} w^{(4)}_i - \frac{2\lambda^4}{6!} w^{(6)}_i - \dots \quad (7.59b)$$

和式 (7.50b) 相比, 可知二阶导数的有限差分算式误差为

$$e_2 = -\frac{\lambda^2}{12} w^{(4)}_i - \frac{\lambda^4}{360} w^{(6)}_i - \dots \quad (7.60a)$$

同样, 可求得四阶导数的有限差分算式误差为

$$\varepsilon_4 = -\frac{\lambda^2}{6} w_i'''' - \dots \quad (7.60b)$$

所以有相对误差

$$\eta_4 = \frac{\varepsilon_4}{w_i''''} \approx -\frac{\lambda^2}{6} \frac{w_i''''}{w_i''''} \sim \left(\frac{\lambda}{L}\right)^2 \quad (7.60c)$$

平板振动方程和挠度四阶导数有关，因此用有限差分法计算平板振动问题的误差接近于网格步长与板跨度比值平方的量级。当网格分得越细密，步长 $\lambda$ 越小，则计算方法的误差也越小。

## § 7.11 有限单元法

有限单元法是除了上述有限差分法外另一种得到广泛应用的结构分析的数值方法，而且比有限差分法具有更大的对结构复杂情况的适应性，更宜于上机计算<sup>[6][109]</sup>。有限单元法与有限差分法不同之处在于：有限差分法基于微分方程，而有限单元法则基于变分方程；有限差分法是物理模型精确，数学求解上近似，而有限单元法则物理模型近似，数学求解上精确。正由于有限元法是从物理模型上进行离散和通过变分方程建立离散化方程，因此具有网格、材料、边界灵活性及程序统一性特点。这些优点和特点使得有限单元法很快成为结构与介质分析最为有效方法之一。

从方法上来讲，有限单元法十分类似于§ 7.2中里兹法。在里兹法中，板的位移函数是用已知解析函数乘相应待定系数和来表示，这些待定系数的确定是根据相应变分方程，并且所假设的位移函数是适用于整个平板的。而在有限单元法中，先将板分割为一系列小单元，对每个单元的位移函数是通过低阶分片多项式用结点广义位移来表示的，而全板的位移场就可以用单元位移函数逐段来表示，这些待定的结点广义位移通过全板变分原理来确定的。由于整个离散化方程是通过许多小单元运算矩阵集合而成的，因此不同几何、材料、载荷、边界参数的单元的集合给整体板件分析带来很大灵活性。

有限单元法研究自56<sup>[254]</sup>年以来曾发表过大量理论与实践方面的文章与著作，内容十分丰富，这里仅结合平板振动分析对一种矩形单元作一简要介绍，有关系统内容可参阅<sup>[109]</sup>，<sup>[209]</sup>，<sup>[286]</sup>等文献。

### 一、位移函数的确定

板件分割后的矩形单元如图7.11所示。单元有四个结点： $i(x_i, y_i)$ ， $j(x_j, y_j)$ ， $m(x_m, y_m)$ ， $n(x_n, y_n)$ ，每个结点有三个自由度：一个挠度 $w$ 及两个转角 $\theta_x$ ， $\theta_y$ 。将单元内挠度表示为含有12个待定系数的直角坐标系的多项式函数：

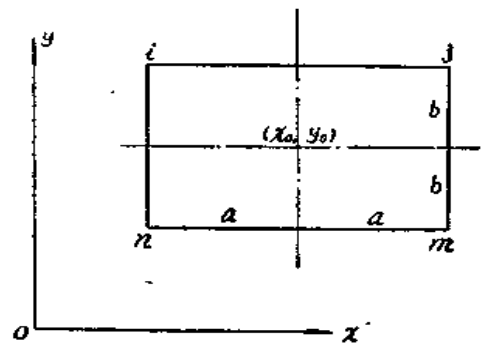


图 7.11

$$w(x, y) = A_1 + A_2x + A_3y + A_4x^2 + A_5xy + A_6y^2 + A_7x^3 + A_8x^2y + A_9xy^2 + A_{10}y^3 + A_{11}x^3y + A_{12}xy^3 \quad (7.61a)$$

上式是这种单元的一种具体表达式。为了叙述建立位移函数的一般过程，现改写为如下一般

## 性矩阵形式

$$\{f\} = [P]\{A\} \quad (7.61b)$$

式中 $\{f\}$ 为板件位移变量的列阵，不一定是一个变量（如厚板，有三个独立变量）， $\{A\}$ 是待定系数列阵，元素个数和单元自由度数相同， $[P]$ 是坐标的幂函数矩阵。将式(7.61a)代入结点自由度值：

$$\begin{aligned} w(x_1, y_1) &= w_1, \quad \frac{\partial w}{\partial x}(x_1, y_1) = -\theta_{v1}, \quad \frac{\partial w}{\partial y}(x_1, y_1) = \theta_{z1}, \\ w(y_1, y_1) &= w_1, \quad \frac{\partial w}{\partial x}(x_1, y_1) = -\theta_{v1}, \quad \frac{\partial w}{\partial y}(x_1, y_1) = \theta_{z1}, \\ w(x_m, y_m) &= w_m, \quad \frac{\partial w}{\partial x}(x_m, y_m) = -\theta_{vm}, \quad \frac{\partial w}{\partial y}(x_m, y_m) = \theta_{zm}, \\ w(x_n, y_n) &= w_n, \quad \frac{\partial w}{\partial x}(x_n, y_n) = -\theta_{vn}, \quad \frac{\partial w}{\partial y}(x_n, y_n) = \theta_{zn} \end{aligned} \quad (7.62a)$$

即可建立关于12个待定系数 $A_i (i=1, 2, 3, \dots, 12)$ 的十二个线代方程，一般形式有

$$[C]\{A\} = \{\delta\} \quad (7.62b)$$

式中， $\{\delta\}$ 为单元结点未知广义位移-自由度列阵，例如，如式(7.62a)所示元素， $[C]$ 为结点坐标的函数列阵，是已知的。因此求解(7.62b)，可给出用单元自由度表示的待定系数列阵

$$\{A\} = [C]^{-1}\{\delta\} \quad (7.62c)$$

代回单元位移函数表达式(7.61b)，有

$$\{f\} = [P][C]^{-1}\{\delta\} = [N]\{\delta\} \quad (7.63a)$$

而

$$[N] = [P][C]^{-1} \quad (7.63b)$$

称为单元形函数，它是坐标多项式及结点坐标参数的函数，可以通过上述过程建立。式

(7.63a)表明，单元内部位移函数表示成了结点未知广义位移的函数。则进一步可将单元所有力学量均表示为结点未知广义位移的函数，从而达到离散化目的。

对于这里所讨论的矩形单元，式(7.63)的具体表达式为

$$w = [N]\{\delta\} \quad (7.64a)$$

而

$$\{\delta\} = [w, \theta_z, \theta_v, w, \theta_z, \theta_v, w, \theta_z, \theta_v, w, \theta_z, \theta_v]^T \quad (7.64b)$$

$$[N] = [N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7, N_8, N_9, N_{10}, N_{11}, N_{12}] \quad (7.64c)$$

其中

$$N_1 = \frac{1}{16} [\bar{x}_2^2 \bar{y}_1^2 - \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{y}_1 \bar{y}_2 + 2 \bar{x}_1 \bar{x}_2^2 \bar{y}_1 + 2 \bar{x}_2 \bar{y}_1^2 \bar{y}_2]$$

$$N_{2,1} = -\frac{b}{8} \bar{x}_2 \bar{y}_1^2 \bar{y}_2$$

$$N_{v,1} = -\frac{a}{8} \bar{x}_1 \bar{x}_2^2 \bar{y}_1$$

$$N_7 = \frac{1}{16} (\bar{x}_1^2 \bar{y}_1^2 - \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{y}_1 \bar{y}_2 + 2 \bar{x}_1^2 \bar{x}_2 \bar{y}_1 + 2 \bar{x}_1 \bar{y}_1^2 \bar{y}_2)$$

$$N_{2,7} = -\frac{b}{8} \bar{x}_1 \bar{y}_1^2 \bar{y}_2$$

$$\begin{aligned}
N_{\nu\nu} &= \frac{a}{8} \overline{x_1^2} \overline{x_2 y_1} \\
N_{\nu\tau} &= \frac{1}{16} [\overline{x_1^2 y_2^2} - \overline{x_1 x_2 y_1 y_2} + 2 \overline{x_1^2 x_2 y_2} + 2 \overline{x_1 y_1 y_2^2}] \\
N_{\tau\tau} &= \frac{b}{8} \overline{x_1 y_1 y_2^2} \\
N_{\nu\tau} &= \frac{a}{8} \overline{x_1^2} \overline{x_2 y_2} \\
N_{\tau\tau} &= \frac{1}{16} (\overline{x_2^2 y_2^2} - \overline{x_1 x_2 y_1 y_2} + 2 \overline{x_1 x_2^2 y_2} + 2 \overline{x_2 y_1 y_2^2}) \\
N_{\tau\tau} &= \frac{b}{8} \overline{x_2 y_1 y_2^2} \\
N_{\nu\tau} &= -\frac{a}{8} \overline{x_1 x_2^2 y_2} \quad (7.64d)
\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}
\overline{x_1} &= 1 + \frac{x+x_0}{a}, \quad \overline{x_2} = 1 - \frac{x+x_0}{a} \\
\overline{y_1} &= 1 + \frac{y+y_0}{b}, \quad \overline{y_2} = 1 - \frac{y+y_0}{b} \quad (7.64e)
\end{aligned}$$

应该再次指出的是, 对于各种单元, 式 (7.61b), (7.62c), (7.63) 过程有一般性意义, 而式 (7.64) 各式只是一个具体例子。实际应用的单元的广义位移列阵及形函数可以是多种多样的。下面将进一步建立单元运算矩阵, 这一过程对各种单元也具有普遍意义。

## 二、应变、内力表达式

第二章曾给出薄板理论的位移-应变关系式, 即挠度-曲率关系式

$$x_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad x_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad x_{xy} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (7.65)$$

代入有限元的位移表达式 (7.63a), 可建立应变列阵

$$\{\varepsilon\} = [B]\{\delta\} \quad (7.66a)$$

式中

$$\{\varepsilon\} = [x_x, x_y, x_{xy}]^T \quad (7.66b)$$

面矩阵

$$[B] = \left[ -\frac{\partial^2}{\partial x^2} [N] - \frac{\partial^2}{\partial y^2} [N] - 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [N] \right]^T \quad (7.66c)$$

第二章给出薄板理论的应变-内力关系式, 即曲率-弯、扭矩关系式, 为

$$M_x = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (x_x + \nu x_y) \quad (7.67a)$$

$$M_y = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (x_y + \nu x_x) \quad (7.67b)$$

$$M_{xy} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} x_{xy} \quad (7.67c)$$

代入应变表达式 (7.66b), 可建立内力列阵

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (7.68a)$$

式中

$$\{\sigma\} = [M_x M_y M_{xy}]^T \quad (7.68b)$$

而矩阵

$$[D] = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (7.68c)$$

如果板件同时作用有平面力, 则算式 (7.66), (7.68) 可参见 § 14.3。

### 三、刚度、质量、荷载矩阵

根据第二章薄板变分方程 (2.16), 有

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt + \int_{t_0}^{t_1} \iint_S q \delta w ds dt = 0 \quad (7.69)$$

若用矩阵表示板件变形能, 为

$$U = \frac{1}{2} \iint_S \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} ds \quad (7.70a)$$

代入式 (7.66a) 及式 (7.68a), 有

$$U = \frac{1}{2} \iint_S \{\delta\}^T [B]^T [D] [B] \{\delta\} ds \quad (7.70b)$$

用矩阵表示板件动能, 为

$$T = \frac{1}{2} \iint_S \{\dot{f}\}^T \rho h \{\dot{f}\} ds \quad (7.70c)$$

代入式 (7.63a), 有

$$T = \frac{1}{2} \iint_S \{\dot{\delta}\}^T [N]^T \rho h [N] \{\dot{\delta}\} ds \quad (7.70d)$$

用矩阵表示外载做功, 并代入式 (7.63a) 有

$$\iint_S \{\dot{f}\}^T \{q\} ds = \iint_S \{\delta\}^T [N]^T \{q\} ds \quad (7.70e)$$

将式 (7.70) 诸式代入方程 (7.69), 对动能项作分部积分, 对所有项作变分运算, 并考虑到  $\{\delta\}$  变分的任意性, 可得算式

$$[M] \{\ddot{\delta}(t)\} + [K] \{\delta(t)\} = \{F(t)\} \quad (7.71a)$$

式中

单元质量矩阵

$$[M] = \iint_S [N]^T \rho h [N] ds \quad (7.71b)$$

单元刚度矩阵

$$[K] = \iint_S [B]^T [D] [B] ds \quad (7.71c)$$

单元荷载列阵

$$\{F\} = \iint_S [N]^T \{q\} ds \quad (7.71d)$$

整个板件的算式, 可通过全板变形能、动能、外载作功, 代入式 (7.69) 求得, 最终运算方程同式 (7.71a), 只不过其中  $[M]$ ,  $[K]$ ,  $\{F\}$  为板的整体质量、刚度、载荷矩阵, 它们的元素分别由单元质量、刚度荷载矩阵的相应行列元素叠加而成。<sup>[286]</sup> 对于薄板弯曲振动, 式 (7.71d) 中  $\{q\}$  即为横向动载荷  $q(t)$ 。

由板件非齐次微分方程组 (7.71a) 可解得  $\{\delta(t)\}$  (解法见 § 7.14, § 7.15), 再按式 (7.63a), (7.66a), (7.68a) 求取板内位移、应变、内力分量的动力反应解。

式 (7.71a) 中结点广义位移用相应振型代入, 即得结点广义位移振型所满足的算式

$$[K]\{\delta\} - \omega^2[M]\{\delta\} = \{0\} \quad (7.72)$$

由齐次线代方程组 (7.72) 可求取板件固有频率  $\omega_n$  及特征向量  $\{\delta\}_n$  (解法见 § 7.13), 再由  $\{\delta\}_n$  代入式 (7.63a), 求取相应位移振型。

从下面两例可以看出, 应用位移变分原理的有限元将给出结构频率偏大值, 但不多的网格即能给出精度足够满意的频率结果; 其精度不但和单元数有关, 而且还取决于单元类型, 即一个单元内包括的自由度数; 另外, 同样单元和自由度数时, 求取低频精度较高, 高频则精度较差。

【例 1】四边简支方板, 边长  $a$ , 取不同单元类型及单元数, 用有限元法计算所得的头三阶频率系数  $\lambda_{mn}^2 = \omega_{mn}^2 a^4 \sqrt{\frac{\rho h}{D}}$  与解析解 (§ 3.2) 比较列于表 7.12。

四边简支方板的频率系数  $\lambda_{mn}$ 

表 7.12

有 限 元						解 析 解
网 格	8 × 8	4 × 4				
自 由 度	243	195	243	315	507	
$\lambda_{11}$	4.479	4.457	4.445	4.441	4.443	
$\lambda_{12}$	7.227	7.055	7.054	7.032	7.029	7.025
$\lambda_{21}$	9.137	8.951	8.941	8.939	8.891	8.885

【例 2】四边固定方板, 边长  $a$ , 四边受均匀张力  $N$  作用, 将四分之一板分成  $4 \times 4$  网格, 用有限元法计算不同  $N$  值作用下的基频系数  $\lambda_1^2 = \omega_1^2 a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}}$  与解析解<sup>[61]</sup> 比较列于表 7.13。

受四周张力作用的四边固定板的基频系数  $\lambda_1$ 

表 7.13

$\frac{NQ^2}{\pi^2 D}$	-2	0	10	20
有限元解	5.352	6.000	7.743	8.732
解 析 解	5.346	5.999	7.741	8.726

## § 7.12 半解析元法

前面已经提到过, 结构振动分析的求解方法总的可归纳为两大类: 解析方法与数值方法。解析方法是用数学分析方法求解相应问题的原始基本方程, 给出以解析函数表达的解,

数值方法是將基本方程化为离散化方程，上机计算，给出一系列数值结果表达的解。前者能给出较精确的解析结果，但求解的范围有限；后者给出近似的数值结果，适用范围较广，但对于复杂问题需要相当多的自由度、内存和计算工作量。这里再介绍一种将达两类方法相结合的半解析有限元法。

有限元法的特点是沿所有坐标方向进行离散和分片多项式插值，因此相应结点和自由度较多。例如上面简单方板振动例子，就接近300自由度，至于复杂结构工作量就十分可观。其原因是板件在空间是二维的，因此为了降成结点变量的代数或常微分方程，需要进行二维离散。如果我们将以前几章解析方法中利用一向解析函数族使方程降维的方法（例如§3.3）用到有限元中，则只要进行一维离散，而沿未离散方向在形函数中代之以一般分片多项式为解析函数族；沿离散方向仍保持分片多项式插值，再一起代入变分方程，建立离散结线上的未知广义位移所满足的离散化方程。

半解析元法是一种适用于广泛结构与介质分析的普遍方法<sup>[849]</sup>，这里仅介绍其中适合于板件振动分析的有限板条法<sup>[854]</sup>。

对于任意形状板件，用一系列平行（例如平行  $y$  轴）线，沿一个坐标方向（例如  $x$  向）分割为一系列板条单元。对每一个板条用图7.12所示矩形板条代替。设每个结线上有两个广义位移参数：挠度  $w$  和法向转角  $\theta$ ，因此这种板条单元有二个结线、四个自由度。条内挠度将表示为含有四个常数的多项式和解析函数组合：

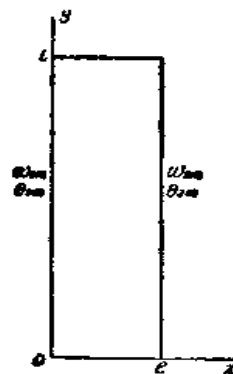


图 7.12

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^r [A_{1m} + A_{2m}x + A_{3m}x^2 + A_{4m}x^3] \bar{Y}_m(y) \quad (7.73a)$$

式中， $\bar{Y}_m(y)$ 为与板条两端边界条件相应之梁函数（附录 I）， $m$ 为项数序号。上式是这种单元的一种特殊表达式，为了叙述建立位移函数的一般过程，现改写为如下一般性矩阵形式：

$$\{f\} = \sum_{m=1}^r [P] \bar{Y}_m \{A\}_m \quad (7.73b)$$

式中， $\{f\}$ 为板件位移变量列阵， $\{A\}_m$ 是待定系数列阵， $[P]$ 是坐标的幂函数矩阵。式(7.73a)代入结线广义位移参数值：

$$\begin{aligned} w(0, y) &= \sum_{m=1}^r w_{1m} \bar{Y}_m(y), \quad \frac{\partial w}{\partial x}(0, y) = \sum_{m=1}^r \theta_{1m} \bar{Y}_m(y) \\ w(e, y) &= \sum_{m=1}^r w_{2m} \bar{Y}_m(y), \quad \frac{\partial w}{\partial x}(e, y) = \sum_{m=1}^r \theta_{2m} \bar{Y}_m(y) \end{aligned} \quad (7.74a)$$

即可建立关于待定系数  $A_{i,m}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) 的线代方程组，一般形式有

$$[C] \{A\}_m = \{\delta\}_m \quad (7.74b)$$

式中， $\{\delta\}_m$ 为单元结线广义位移（自由度）列阵， $[C]$ 为结线坐标的函数列阵，是已知的。因此求解方程 (7.74b)，可给出用单元自由度表示的待定系数列阵



$$\{A\}_m = [C]^{-1} \{\delta\}_m \quad (7.74c)$$

代回单元位移函数表达式 (7.73b), 有

$$\begin{aligned} \{f\} &= \sum_{m=1}^r [P] \bar{Y}_m [C]^{-1} \{\delta\}_m = \sum_{m=1}^r \bar{Y}_m(y) [N_0] \{\delta\}_m \\ &= \sum_{m=1}^r [N]_m \{\delta\}_m = [N] \{\delta\} \end{aligned} \quad (7.75a)$$

其中

$$[N_0] = [P][C]^{-1} \quad (7.75b)$$

而

$$[N]_m = [P][C]^{-1} \bar{Y}_m = [N_0] \bar{Y}_m \quad (7.75c)$$

为形函数。它是由离散方向坐标( $x$ )的多项式 $[N_0]$ 及未离散方向坐标( $y$ )的解析函数 $\bar{Y}$ 结合而成, 借以建立单元内部位移与结线广义位移的联系。

对于这里讨论的具有四个自由度的二结线板条(图7.12), 有式(7.75a)中

$$\{\delta\}_m = [w_{1m} \quad \theta_{1m} \quad w_{2m} \quad \theta_{2m}]^T \quad (7.76a)$$

$$\begin{aligned} [N_0] &= \left[ 1 - 3\left(\frac{x}{e}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{e}\right)^3 \quad x - 2\frac{x^2}{e} + \frac{x^3}{e^2} \quad 3\left(\frac{x}{e}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{e}\right)^3 \right. \\ &\quad \left. - \frac{x^2}{e} + \frac{x^3}{e^2} \right] \end{aligned} \quad (7.77a)$$

应该指出, 式(7.74b)一式(7.75c)均有一般性意义, 对于其它具有不同结线不同自由度的板条均适用, 只是式(7.75a)中 $\{\delta\}_m$ 及 $[N_0]$ 表达式有所不同。又如有:

(1) 二结线、二自由度

$$\{\delta\}_m = [w_{1m} \quad w_{2m}]^T \quad (7.76b)$$

$$[N_0] = \left[ 1 - \frac{x}{e} \quad \frac{x}{e} \right] \quad (7.77b)$$

(2) 二结线、六自由度

$$\{\delta\}_m = [w_{1m} \quad \theta_{1m} \quad x_{1m} \quad w_{2m} \quad \theta_{2m} \quad x_{2m}]^T \quad (7.76c)$$

$$\begin{aligned} [N_0] &= \left[ \left( 1 - 10\left(\frac{x}{e}\right)^3 + 15\left(\frac{x}{e}\right)^4 - 6\left(\frac{x}{e}\right)^5 \right) \left( x - 6\frac{x^2}{e^2} + 8\frac{x^4}{e^3} - 3\frac{x^5}{e^4} \right) \right. \\ &\quad \left( 0.5x^2 - 1.5\frac{x^3}{e} + 1.5\frac{x^4}{e^2} - 0.5\frac{x^5}{e^3} \right) \left( 10\left(\frac{x}{e}\right)^3 - 15\left(\frac{x}{e}\right)^4 + 6\left(\frac{x}{e}\right)^5 \right) \\ &\quad \left. \left( -4\frac{x^3}{e^2} + 7\frac{x^4}{e^3} - 3\frac{x^5}{e^4} \right) \left( 0.5\frac{x^3}{e} - \frac{x^4}{e^2} + 0.5\frac{x^5}{e^3} \right) \right] \end{aligned} \quad (7.77c)$$

(3) 三结线、三自由度

$$\{\delta\}_m = [w_{1m} \quad w_{2m} \quad w_{3m}]^T \quad (7.76d)$$

$$[N_0] = \left[ \left( 1 - 3\left(\frac{x}{e}\right) + 2\left(\frac{x}{e}\right)^2 \right) \left( 4\left(\frac{x}{e}\right) - 4\left(\frac{x}{e}\right)^2 \right) \left( -\left(\frac{x}{e}\right) + 2\left(\frac{x}{e}\right)^2 \right) \right] \quad (7.77d)$$

(4) 五结线、五自由度

$$\{\delta\}_m = [w_{1m} \quad w_{2m} \quad w_{3m} \quad w_{4m} \quad w_{5m}]^T \quad (7.76e)$$

$$[N_0] = \frac{1}{3} \left[ \left( 3 - 25\left(\frac{x}{e}\right) + 70\left(\frac{x}{e}\right)^2 - 80\left(\frac{x}{e}\right)^3 + 32\left(\frac{x}{e}\right)^4 \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
& \left( 48\left(\frac{x}{e}\right) - 208\left(\frac{x}{e}\right)^2 + 288\left(\frac{x}{e}\right)^3 - 128\left(\frac{x}{e}\right)^4 \right) \\
& \left( -36\left(\frac{x}{e}\right) + 278\left(\frac{x}{e}\right)^2 - 384\left(\frac{x}{e}\right)^3 + 192\left(\frac{x}{e}\right)^4 \right) \\
& \left( 16\left(\frac{x}{e}\right) - 112\left(\frac{x}{e}\right)^2 + 224\left(\frac{x}{e}\right)^3 - 128\left(\frac{x}{e}\right)^4 \right) \\
& \left( -3\left(\frac{x}{e}\right) + 22\left(\frac{x}{e}\right)^2 - 48\left(\frac{x}{e}\right)^3 + 32\left(\frac{x}{e}\right)^4 \right) \quad (7.77c)
\end{aligned}$$

下面再进一步建立单元运算矩阵，所有过程对上述各种类型板条均适用。根据薄板理论的位移-应变关系式 (7.65)，类同式 (7.66a)，有板条应变列阵

$$\{\varepsilon\} = [B]\{\delta\} = \sum_{n=1}^r [B]_n \{\delta\}_n \quad (7.78a)$$

式中

$$\{\varepsilon\} = [x_x, x_y, x_{xy}]^T \quad (7.78b)$$

面矩阵

$$[B]_n = \left[ -\frac{\partial^2}{\partial x^2}[N]_n, -\frac{\partial^2}{\partial y^2}[N]_n, -2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}[N]_n \right]^T \quad (7.78c)$$

根据薄板理论的应变-内力关系式 (7.67)，类同式 (7.68a)，有板条内力列阵

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (7.79a)$$

式中

$$\{\sigma\} = [M_x, M_y, M_{xy}]^T \quad (7.79b)$$

面矩阵

$$[D] = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (7.79c)$$

类同有限元过程 (§7.11) 可建立单元算式

$$[M]\{\ddot{\delta}(t)\} + [K]\{\delta(t)\} = \{F(t)\} \quad (7.80)$$

式中

单元质量矩阵

$$\begin{aligned}
[M] &= \iint_V [N]^T \rho h [N] ds \\
&= \begin{bmatrix} [M]_{11} & [M]_{12} & \cdots & [M]_{1r} \\ [M]_{21} & [M]_{22} & \cdots & [M]_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & [M]_{rn} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [M]_{r1} & [M]_{r2} & \cdots & [M]_{rr} \end{bmatrix} \quad (7.81a)
\end{aligned}$$

而

$$[M]_{mn} = \int_0^l \int_0^b [N]^T \rho h [N]_n dx dy \quad (7.81b)$$

单元刚度矩阵

$$[K] = \int_0^l \int_0^b [B]^T [D] [B] dx dy$$

$$= \begin{bmatrix} [K]_{11} & [K]_{12} & \cdots & [K]_{1r} \\ [K]_{21} & [K]_{22} & \cdots & [K]_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & [K]_{mn} \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [K]_{r1} & [K]_{r2} & \cdots & [K]_{rr} \end{bmatrix} \quad (7.82a)$$

而

$$[K]_{mn} = \int_0^l \int_0^b [B]^T [D] [B]_n dx dy \quad (7.82b)$$

单元载荷列阵

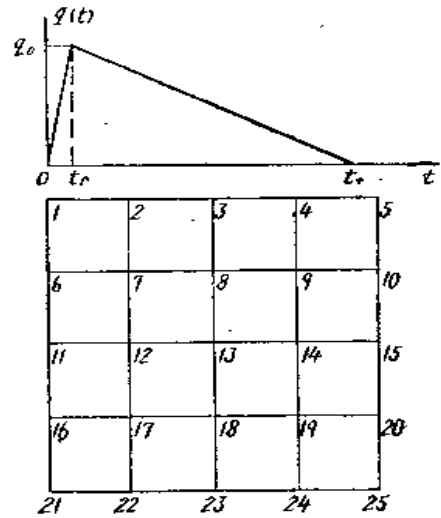


图 7.13

$$\{F\} = \iint [N]^T \{q\} ds$$

$$= [\{F\}_1 \{F\}_2 \cdots \{F\}_n \cdots \{F\}_r]^T \quad (7.83a)$$

而

$$\{F\}_n = \int_0^l \int_0^b [N]^T \{q\} dx dy \quad (7.83b)$$

由条单元运算矩阵，集合成整体运算矩阵的方法类同有限元法，但由于有限条法中结线只与两侧板条有关，因此整体运算矩阵中元素为有关两个单元矩阵的元素的叠加。

用有限条法计算板件固有振动的算式同式 (7.72)。和有限元同理，有限条法给出的是结构频率的偏大值。

为适应不同形状板件的计算，除上述直角坐标系的矩形板条外，还有用不同坐标系表示的曲板条、斜板条、梯形板条、扇形板条、环板条、椭圆板条等不同形式。

由于半解析元法保持了一个方向上离散，并用积分形式表达运算矩阵的元素，因此和有限元一样，对于板件的形状、材料、载荷、边界以及附加条件具有很大适应性；并由于减少了一个方向上离散，因此单元、内存、自由度有很大节省。

【例1】不同边界条件方板。用二个五结线、五自由度、三项有限条求解各阶频率系数  $\lambda_{mn}^2 = \omega_{mn}^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}}$  与解析解 (§ 3.2, § 3.3) 比较列于表7.13。数据表明，用有限条法求得的均是频率偏大值；随着频率阶次增加，误差将增大；具有固定边界板的误差大于简支边界板，这是因为简支梁函数真实反映了解析方向板条振型分布。用本半解析元法计算固有频率共计27个自由度，显然比同样精度的有限元法 (表7.12) 的工作量节省很多。

方板频率系数

表7.13

边 界	方 法	$\lambda_{11}$	$\lambda_{21}$	$\lambda_{32}$	$\lambda_{41}$
四边简支	半解析元解	4.453	7.091	9.029	10.10
	解析解	4.449	7.025	8.886	9.935
对固对简	半解析元解	5.442	7.499	9.948	10.30
	解析解	5.380	7.399	9.725	10.11

【例2】四边简支方板。长 $a=5\text{m}$ ，厚 $h=0.1\text{m}$ ，材料常数： $E=2.45\times 10^{10}\text{N/m}^2$ ， $\nu=\frac{1}{6}$ ， $\rho=2.4\times 10^3\text{kg/m}^3$ 。用二个五结线、十自由度、二项有限条计算在如图7.13所示均布冲击波作用下板动力响应的位移、内力峰值及相应静力解列于表7.14。载荷峰值 $q_0=9.8\times 10^4\text{N/m}^2$ ， $t_+=1\text{s}$ ， $t_-=0.01\text{s}$ 。计算步长 $\Delta t=0.005\text{s}$ 。

冲击波作用下四边简支方板的动力响应

表7.14

$w$ (m)	点 号	11	12	13	14	15
	动力峰值	0	0.1009	0.1389	0.1009	0
	静力解	0	0.08527	0.1164	0.08527	0
$M_x$ ( $10^6\text{N}\cdot\text{m/m}$ )	点 号	3	8	13	18	23
	动力峰值	0.01213	0.9466	1.182	0.9356	0.01359
	静力解	0.009535	0.8013	0.9713	0.8013	0.009535
$M_y$ ( $10^6\text{N}\cdot\text{m/m}$ )	点 号	11	12	13	18	23
	动力峰值	0	0.9666	1.181	0.9666	0
	静力解	0	0.8292	0.9648	0.8292	0
$M_{xy}$ ( $10^6\text{N}\cdot\text{m/m}$ )	点 号	1	7	13	17	21
	动力峰值	0	0.9628	1.176	0.9628	0
	静力解	0	0.8259	0.9610	0.8259	0
$Q_x$ ( $10^5\text{N/m}$ )	点 号	3	8	13	18	23
	动力峰值	1.677	0.7893	0.03571	-0.7884	-1.683
	静力解	1.526	0.6327	0.04135	-0.6327	-1.526
$Q_y$ ( $10^5\text{N/m}$ )	点 号	11	12	13	18	23
	动力峰值	1.498	0.8042	0	-0.8042	-1.498
	静力解	1.317	0.6445	0	-0.6445	-1.317

### § 7.13 固有振动离散化方程的数值解法

前面所述平板振动各种数值解法及大部份近似解析解法以及第十四章所涉及壳体振动分析的各种近似解法最终都归结为两种类型方程：一类是求解固有频率及振型的齐次线性方程组：

$$[K]\{\delta\} - \omega^2[M]\{\delta\} = \{0\} \quad (7.84a)$$

式中 $[K]$ ,  $[M]$ 为已知矩阵, 在大部份情况下分别代表刚度、质量矩阵,  $\omega$ 是体系的固有圆频率,  $\{\delta\}$ 为未知参数, 在大部份情况下代表广义位移列阵, 因此在数学上是求解齐次线代方程组 (7.84a) 的特征值及特征向量问题, 这将在本节介绍; 另一类是求解强迫振动动力响应的非齐次常微分方程组:

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = \{F\} \quad (7.84b)$$

式中 $\{F\}$ 为已知矩阵, 在大部份情况下为载荷列阵。这类常微分方程组问题一般分两步求解: 先是进行时间积分, 化常微分方程组为非齐次线代方程组, 这将在 § 7.14 中介绍; 再是求解非齐次线代方程组, 这将在 § 7.15 中介绍。

求解齐次线代方程组的特征值及特征向量问题是各类结构、各种数值方法求解固有频率及振型的共同问题, 也是线性代数的基本问题之一。这在许多专门书籍中已有详细叙述。<sup>〔20〕〔83〕〔92〕〔210〕〔331〕</sup>这里只介绍几种常用、有效的方法, 如直接迭代法、逆迭代法、子空间迭代法等。此外还有雅可宾(Jacobi)法, 可一次求出全部特征值与特征向量;  $LR$ 法及 $QR$ 法, 可一次求出全部特征值等。由于需要一些专门知识, 这里就不再介绍了。

### 一、直接迭代法

结构固有振动问题最后归纳为齐次线代方程组, 可能有下列几种形式

$$[K]\{W\} - \omega^2[M]\{W\} = \{0\} \quad (7.85a)$$

$$[K]^{-1}[M]\{W\} = \frac{1}{\omega^2}\{W\} \quad (7.85b)$$

$$[M]^{-1}[K]\{W\} = \omega^2\{W\} \quad (7.85c)$$

不同形式取决于不同数值方法, 但统一可改写为如下标准矩阵形式

$$[D]\{W\} = \lambda\{W\} \quad (7.85d)$$

$$\text{或} \quad ([D] - \lambda[I])\{W\} = \{0\} \quad (7.85e)$$

式中 $[I]$ 为单位对角矩阵。

式(7.85d)表明, 如果 $\{W\}$ 取为真正第 $k$ 阶特征向量, 则 $[D]\{W\}$ 之各元素与 $\{W\}$ 各元素完全成比例, 其比例系数即为第 $k$ 阶特征值 $\lambda_k$ ,  $\{W\}$ 即为第 $k$ 阶特征向量 $\{W\}_k$ 。

直接迭代法是一种逐次逼近真正 $\{W\}_k$ 的方法。可先取任意 $\{W^{(0)}\}$ , 按下列格式进行迭代运算:

$$\{W^{(p)}\} = [D]\{W^{(p-1)}\} \quad (p=1, 2, 3, \dots) \quad (7.86a)$$

当迭代次数适当多后, 有 $\{W^{(p-1)}\}$ 与 $\{W^{(p)}\}$ 各相应元素比相等, 则其比例系数即为最大特征值, 其 $\{W^{(p)}\}$ 即为该特征值相应的特征向量。

在具体运算过程中, 可取定 $\{W^{(p-1)}\}$ 中第 $s$ 个元素为1, 即迭代后括出该元素值

$$[D]\{W^{(p-1)}\} = \{\bar{W}^{(p)}\} = \bar{W}_{s, (p)}\{W^{(p)}\} \quad (7.86b)$$

则 $p$ 适当大后有

$$\lambda_{max} = \lambda_1 \approx \bar{W}_{s, (p)} \quad (7.86c)$$

$$\{W\}_1 \approx \{W^{(p)}\} \quad (7.86d)$$

下面证明采用上述迭代过程会给出最大特征值 $\lambda_{max}$ 及相应特征向量 $\{W\}_1$ 。

对所设任意初始向量 $\{W^{(0)}\}$ 按体系的各特征向量展开为

$$\{W^{(0)}\} = A_1\{W\}_1 + A_2\{W\}_2 + \dots + A_n\{W\}_n = \sum_{i=1}^n A_i\{W\}_i \quad (a)$$

迭代一次为

$$\begin{aligned} [D]\{W^{(0)}\} &= A_1[D]\{W\}_1 + A_2[D]\{W\}_2 + \cdots + A_n[D]\{W\}_n \\ &= A_1\lambda_1\{W\}_1 + A_2\lambda_2\{W\}_2 + \cdots + A_n\lambda_n\{W\}_n \\ &= \sum_{k=1}^n A_k\lambda_k\{W\}_k \end{aligned} \quad (b)$$

迭代  $p$  次后, 有

$$\begin{aligned} \{W^{(p)}\} &= [D]^p\{W^{(0)}\} = \sum_{k=1}^n A_k\lambda_k^p\{W\}_k = \lambda_{\max}^p \sum_{k=1}^n A_k \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_{\max}}\right)^p \{W\}_k (C) \\ \lim_{p \rightarrow \infty} \{W^{(p)}\} &= \lambda_{\max}^p A_m \{W\}_m \end{aligned} \quad (d)$$

则

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\{W^{(p)}\}}{\{W^{(p-1)}\}} = \frac{\lambda_{\max}^p}{\lambda_{\max}^{p-1}} = \lambda_{\max} \quad (7.87a)$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \{W^{(p)}\} = \{W\}_m \quad (7.87b)$$

这就证明, 用上述迭代过程, 当  $p$  适当大时, 按式 (7.86c), (7.86d) 给出了最大特征值及相应特征向量的近似值。

工程上关心的总是结构振动的最低固有频率, 而上述迭代法给出的是最大特征值的近似值。因此用式 (7.85b) 进行迭代恰好求得最大的  $\frac{1}{\omega^2}$ , 即最小的  $\omega$  值, 但如果建立的离散化方程是相应于式 (7.85c), 则用迭代法求得的最大  $\lambda$  相应于最大的  $\omega$  值, 恰不是所需要的。为此, 若从式 (7.85c) 出发进行迭代, 而要求得最小  $\omega$  值, 则可应用移轴法。

设

$$\lambda' = C - \lambda \quad (7.88a)$$

即

$$\lambda = C - \lambda' \quad (7.88b)$$

代入式 (7.85d), 有

$$[D]\{W\} = \lambda\{W\} = (C - \lambda')\{W\} \quad (7.88c)$$

得

$$[D']\{W\} = (C[I] - [D])\{W\} = \lambda'\{W\} \quad (7.88d)$$

一般可取

$$C \approx \lambda_{\max} \quad (7.88e)$$

因此按移轴后的式 (7.88d) 进行迭代, 可求得  $\lambda'$  最大值, 代入式 (7.88b), 求出的  $\lambda$  即为  $\lambda$  最小值, 相应于式 (7.85c), 则给出  $\omega$  之最小值。至于式 (7.88e) 中  $\lambda_{\max}$  估值可用原式 (7.85c) 迭代几次求取。

迭代法求取固有频率与振型的精度除了与所设初始向量有关外, 主要还取决于迭代次数, 因此加快迭代速度是提高精度一种有效办法。由式 (7.86a) 知。

$$\begin{aligned} \{W^{(p)}\} &= [D]\{W^{(p-1)}\} = [D]^2\{W^{(p-2)}\} = \cdots = [D]^p\{W^{(0)}\} \\ &= ([D]^m)^n \{W^{(0)}\} \end{aligned} \quad (7.89)$$

如果事先运算好  $[D]^m$ , 则按式 (7.89) 进行迭代, 只需要进行  $n = \frac{p}{m}$  次, 其精度相当于用式 (7.86a) 迭代  $p (> n)$  次, 因此加快了收敛速度。例如事先将  $[D]$  自乘五次, 再进行迭代运

算, 则迭代 4 次就相当于原来迭代 20 次的精度。

若要求取结构的高一阶频率与振型即式 (7.85d) 的次大特征值, 则要利用特征向量即振型的正交性来消除低阶频率分量。

平板离散化后的正交条件表达为矩阵形式有

$$\{W\}^T [M] \{W\}_i = 0 \quad (i \neq j) \quad (7.90)$$

对所设初始向量可按体系的各特征向量展开为

$$\{W^{(0)}\} = A_1 \{W\}_1 + A_2 \{W\}_2 + \cdots + A_n \{W\}_n \quad (e)$$

两边作同样运算, 考虑到正交性有

$$\begin{aligned} \{W\}^T [M] \{W^{(0)}\} &= A_1 \{W\}^T [M] \{W\}_1 + \sum_{k=2}^n A_k \{W\}^T [M] \{W\}_k \\ &= A_1 \{W\}^T [M] \{W\}_1 \end{aligned} \quad (f)$$

所以

$$A_1 = \frac{\{W\}^T [M] \{W^{(0)}\}}{\{W\}^T [M] \{W\}_1} \quad (7.91a)$$

如果取初始向量

$$\{W_2^{(0)}\} = \{W^{(0)}\} - A_1 \{W\}_1 = \{W^{(0)}\} - \frac{\{W\}_1 \{W\}^T [M] \{W^{(0)}\}}{\{W\}^T [M] \{W\}_1} \quad (7.91b)$$

代入式 (7.86a) 进行迭代

$$\begin{aligned} [D] \{W_2^{(0)}\} &= [D] \{W^{(0)}\} - \frac{[D] \{W\}_1 \{W\}^T [M] \{W^{(0)}\}}{\{W\}^T [M] \{W\}_1} \\ &= [D] \{W^{(0)}\} - \frac{\lambda_1 \{W\}_1 \{W\}^T [M] \{W^{(0)}\}}{\{W\}^T [M] \{W\}_1} \\ &= [D^*] \{W^{(0)}\} \end{aligned} \quad (7.91c)$$

其中修正矩阵

$$[D^*] = [D^*]_2 = [D] - \frac{\lambda_1 \{W\}_1 \{W\}_1^T [M]}{\{W\}_1^T [M] \{W\}_1} \quad (7.91d)$$

迭代过程类似, 可按式进行

$$\{W^{(p)}\} = [D^*]_2 \{W^{(p-1)}\} \quad (p=1, 2, 3, \dots) \quad (7.91e)$$

由于消除了基频分量, 多次迭代后, 类似上面证明, 必有

$$\frac{\{W^{(p)}\}}{\{W^{(p-1)}\}} \approx \lambda_2 \quad (7.92a)$$

$$\{W\}^{(p)} \approx \{W\}_2 \quad (7.92b)$$

以此类推, 为了求取第  $k$  阶频率与振型, 则只要用下列  $k$  阶修正矩阵进行迭代

$$\{W^{(p)}\} = [D^*]_k \{W^{(p-1)}\} \quad (p=1, 2, 3, \dots) \quad (7.93a)$$

$$[D^*]_k = [D^*]_{k-1} - \frac{\lambda_{k-1} \{W\}_{k-1} \{W\}_{k-1}^T [M]}{\{W\}_{k-1}^T [M] \{W\}_{k-1}} \quad (7.93b)$$

$$(k=3, 4, 5, \dots)$$

将可求  $\lambda_k$  及  $\{W\}_k$ , 其中  $\lambda_{k-1}$  及  $\{W\}_{k-1}$  认为已经求得。

最后应指出一点是, 用迭代法求解固有频率与振型的好处是在迭代过程中有运算错误, 并不影响最后会收敛为正确结果, 因为运算错误的结果相当新的初始向量。

【例】

$$[M] = \begin{bmatrix} 30 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{bmatrix}, [D] = [K]^{-1}[M] = \begin{bmatrix} 1.77 & 2.23 & 1.86 \\ 2.23 & 5.39 & 5.10 \\ 2.23 & 6.12 & 8.73 \end{bmatrix}$$

设初始向量

$$\{W^{(0)}\} = [1 \ 1 \ 1]^T$$

按式 (7.86b) 有下列迭代过程

$$\{\bar{W}^{(1)}\} = [D]\{W^{(0)}\} = 5.86[1 \ 2.17 \ 2.91]^T$$

$$\{\bar{W}^{(2)}\} = [D]\{W^{(1)}\} = 12.0[1 \ 2.39 \ 3.40]^T$$

$$\{\bar{W}^{(3)}\} = [D]\{W^{(2)}\} = 13.4[1 \ 2.42 \ 3.47]^T$$

$$\{W^{(4)}\} = [D]\{W^{(3)}\} = 13.6[1 \ 2.42 \ 3.48]^T$$

按式 (7.86c) 有

$$\lambda_1 \approx 13.6, \omega_1 \approx 0.271$$

按式 (7.86d) 有

$$\{W\}_1 \approx [1 \ 2.42 \ 3.48]^T$$

这就是第一阶频率与振型，收敛还是相当快的。

再根据式 (7.91d) 有第二阶修正矩阵

$$[D^*]_2 = \begin{bmatrix} 0.972 & 0.288 & -0.472 \\ 0.288 & 0.691 & -0.530 \\ -0.562 & -0.636 & 0.632 \end{bmatrix}$$

若仍设初始向量为

$$\{W^{(0)}\} = [1 \ 1 \ 1]^T$$

按式 (7.91e) 有下列迭代过程

$$\{\bar{W}^{(1)}\} = [D^*]_2\{W^{(0)}\} = 0.788[1 \ 0.569 \ -0.718]^T$$

$$\{\bar{W}^{(2)}\} = [D^*]_2\{W^{(1)}\} = 1.47[1 \ 0.720 \ -0.934]^T$$

$$\{\bar{W}^{(3)}\} = [D^*]_2\{W^{(2)}\} = 1.62[1 \ 0.790 \ -0.994]^T$$

$$\{\bar{W}^{(4)}\} = [D^*]_2\{W^{(3)}\} = 1.67[1 \ 0.815 \ -1.01]^T$$

$$\{\bar{W}^{(5)}\} = [D^*]_2\{W^{(4)}\} = 1.68[1 \ 0.823 \ -1.02]^T$$

按式 (7.92a) 有

$$\lambda_2 \approx 1.68, \omega_2 \approx 0.772$$

按式 (7.92b) 有

$$\{W\}_2 \approx [1 \ 0.823 \ -1.02]^T$$

这就给出第二阶频率与振型。

虽然在求取第二阶自振特性时，初始向量取得仍和求第一阶自振特性时一样，但由于修正矩阵中已经考虑了每次迭代均消去第一阶分量，因此最后仍可迭代到第二阶自振特性，而且收敛也相当快。有了第二阶频率与振型，则依次可类似求取第三阶以至更高阶频率与振型。

## 二、逆迭代法

直接迭代法适宜于求取最低阶频率。但为求取某高阶频率，而必须将其前几阶频率与振



型都求出来, 因此相当不便。本小节将介绍另一种迭代法, 它将求取最小特征值, 并可直接求取中间某阶频率, 而不需为此事先计算前几阶频率。

直接迭代法求取矩阵 $[D]$ 的最大特征值的基本迭代格式是

$$\{W^{(p)}\} = [D]\{W^{(p-1)}\} \quad (p=1, 2, 3, \dots) \quad (7.94)$$

而逆迭代法是以 $[D]^{-1}$ 代替 $[D]$ , 进行迭代, 即

$$\{W^{(p)}\} = [D]^{-1}\{W^{(p-1)}\} \quad (p=1, 2, 3, \dots) \quad (7.95a)$$

类同直接迭代法证明, 当 $p$ 增加时, 多次迭代将给出最小特征值与相应特征向量近似值, 即

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\{W^{(p)}\}}{\{W^{(p-1)}\}} = \frac{1}{\lambda_{\min}} = \frac{1}{\lambda_n} \quad (7.95b)$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \{W^{(p)}\} = \{W\}_n \quad (7.95c)$$

如果 $[D]$ 由式(7.85c)定义, 则迭代所求得特征值将近似为 $\frac{1}{\omega_{n+1}^2}$ 。式(7.95a)的实际运算过程可改写为

$$[D]\{W^{(p)}\} = \{W^{(p-1)}\} \quad (7.95d)$$

即已知 $\{W^{(p-1)}\}$ 及 $[D]$ 求 $\{W^{(p)}\}$ , 这可采用求解非齐次线代方程组的方法 (§ 7.15)。

如果我们希望直接求取某定值 $C$ 附近最靠近的一个特征根, 则只要将移轴法应用到逆迭代法中即可, 即取如下迭代格式

$$\{W^{(p)}\} = ([D] - C[I])^{-1}\{W^{(p-1)}\} \quad (7.96a)$$

或

$$([D] - C[I])\{W^{(p)}\} = \{W^{(p-1)}\} \quad (7.96b)$$

经上式迭代, 可得相应于矩阵 $[D]' = ([D] - C[I])$ 的最小特征值 $\lambda'_{\min}$ 。由移轴法知, 有

$$\lambda'_{\min} = (\lambda - C)_{\min} \quad (7.96c)$$

即可求出最为靠近 $C$ 的特征值 $\lambda$ , 而

$$\lambda = \lambda' + C \quad (7.96d)$$

因此对于式(7.85c), 按式(7.96)进行迭代, 为求得某频率 $\omega^*$ 值附近的固有频率, 则可在式(7.96)中取

$$C \approx \frac{1}{\omega^{*2}} \quad (7.96e)$$

### 三、子空间迭代法

以上两种方法均是一次迭代单个特征值。而这里再介绍一种通过一次迭代过程同时求解头几阶特征值与特征向量的方法, 即子空间迭代法。

一般来说, 质量、刚度矩阵 $[M]$ ,  $[K]$ 均是对称的, 但基本算式(7.81b), (7.85c)中 $[D]$ 为 $[K]^{-1}[M]$ 或 $[M]^{-1}[K]$ 均是非对称的。采用子空间迭代法首先要将求特征值的矩阵 $[D]$ 对称化。其方法是将 $[K]$ 分解为三角矩阵 (见 § 7.15)

$$[K] = [L][L]^T \quad (g)$$

即

$$[K]^{-1} = ([L]^T)^{-1}[L]^{-1} \quad (h)$$

将式 (h) 代入式 (7.85b), 再两边均左乘以  $[L]^T$  得

$$[L]^{-1}[M]\{W\} = \lambda[L]^T\{W\} \quad (i)$$

即

$$[L]^{-1}[M]([L]^T)^{-1}[L]^T\{W\} = \lambda[L]^T\{W\} \quad (j)$$

令

$$[L]^T\{W\} = \{W^*\} \quad (7.97a)$$

$$[L]^{-1}[M]([L]^{-1})^T = [D'] \quad (7.97b)$$

则化为

$$[D']\{W^*\} = \lambda\{W^*\} \quad (7.97c)$$

因为  $[M]$  是对称的, 则按式 (7.97b),  $[D']$  也是对称的, 故化为对称矩阵的特征值问题。求出  $\lambda$  与  $\{W^*\}$ , 再按式 (7.97a) 求取  $\{W\}$ 。

子空间迭代法将同时迭代出  $m$  个特征值与特征向量 ( $m$  小于  $[D]$  的阶次  $n$ )。这里只介绍具体步骤, 更详细细节可参见本节所列专门书籍。

(1) 假设头  $m$  个线性无关特征向量的初始值  $\{W^{(0)}\}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), 组成  $n \times m$  阶矩阵

$$[U^{(0)}] = [U] = [\{W^{(0)}\}_1 \{W^{(0)}\}_2 \dots \{W^{(0)}\}_m] \quad (7.98a)$$

其满足

$$[U]^T[U] = [I] \quad (7.98b)$$

(2) 计算  $n \times m$  阶矩阵

$$[V] = [D][U] \quad (7.98c)$$

及  $m \times m$  阶矩阵

$$[B] = [V]^T[V] \quad (7.98d)$$

(3) 求出矩阵  $[B]$  的  $m$  个特征值  $\lambda_i^{(1)}$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, m$ ) 和相应特征向量矩阵  $[P]$ 。

(4) 计算  $n \times m$  阶矩阵

$$[W] = [V][P] \quad (7.98e)$$

(5) 运用 Gram-Schmidt 正交化过程, 将  $[W]$  变成  $[U]$ , 一般可以取

$$[U] = [U^{(1)}] = [W][\lambda] \quad (7.98f)$$

而

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & 0 \\ & \frac{1}{\lambda_2} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \frac{1}{\lambda_m} \end{bmatrix} \quad (7.98g)$$

重复上述过程, 即由  $[U^{(p-1)}]$  求  $[U^{(p)}]$  ( $p = 1, 2, 3, \dots$ )。迭代若干次后, 则头  $m$  个特征值即为  $\lambda_i^{(p)}$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, m$ ), 相应  $m$  个特征向量即为  $n \times m$  矩阵  $[U^{(p)}]$  中  $m$  列向量。

为了加快收敛, 所取  $m$  往往大于所需计算的特征值数  $l$ , 一般取  $m = \min(2l, l+8)$

为妥。

## § 7.14 强迫振动的离散化方程的时间积分方法

上节已经提到板壳结构强迫振动的各种近似解法最终将归结为非齐次常微分方程组，一般具有下列矩阵形式：

$$[M]\{\ddot{w}\} + [K]\{w\} = \{F\} \quad (7.99)$$

此方程组中微分是对时间变量  $t$  的，故式 (7.99) 是联立常微分方程组，需要进行对时间变量的积分，这将在本节加以讨论。和这方面有关的主要有下面三种方法<sup>〔20〕〔24〕</sup>。

### 一、振型叠加法

连续结构离散化后的方程 (7.99) 和多自由度体系的基本方程组相类似，其相应的固有频率  $\omega_k$  及振型  $\{W\}_k$  可以用上节方法求取。在多自由度体系动力学中已经证明，这些振型具有正交性

$$\{W\}_m^T [M] \{W\}_n = \{W\}_m^T [K] \{W\}_n = 0 \quad (m \neq n) \quad (7.100a)$$

方程 (7.99) 的解可按其各阶振型展开为

$$\{w\} = [W] \{T\} \quad (7.100b)$$

其中振型向量矩阵

$$[W] = [\{W\}_1, \{W\}_2, \dots, \{W\}_k, \dots, \{W\}_n] \quad (7.100c)$$

而  $\{T\}$  为各振型分量列阵

$$\{T\} = [T_1, T_2, \dots, T_k, \dots, T_n]^T \quad (7.100d)$$

将式 (7.100b) 代入式 (7.99)，得

$$[M][W]\{\ddot{T}\} + [K][W]\{T\} = \{F\} \quad (a)$$

以  $\{W\}_k^T$  左乘上式各项，并利用正交条件 (7.100a)，可得

$$\{W\}_k^T [M] \{W\}_k \ddot{T}_k + \{W\}_k^T [K] \{W\}_k T_k = \{W\}_k^T \{F\} \quad (b)$$

考虑到特征向量  $\{W\}_k$  已满足式 (7.85a)

$$[K] \{W\}_k = \omega_k^2 [M] \{W\}_k \quad (c)$$

$$\text{即} \quad \{W\}_k^T [K] \{W\}_k = \omega_k^2 \{W\}_k^T [M] \{W\}_k = \omega_k^2 M_k \quad (d)$$

其中记

$$M_k = \{W\}_k^T [M] \{W\}_k \quad (7.101a)$$

代入式 (b)，有  $T_k$  所满足的方程

$$M_k \ddot{T}_k + \omega_k^2 M_k T_k = P_k(t) \quad (7.101b)$$

其中

$$P_k(t) = \{W\}_k^T \{F\} \quad (7.101c)$$

式 (7.101b) 是标准的单自由度体系方程，有一般解 (见 § 6.3)。

$$T_k(t) = a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t + \frac{1}{M_k \omega_k} \int_0^t P_k(\tau) \sin \omega_k (t - \tau) d\tau \quad (7.101d)$$

将此解代回式 (7.100d)，(7.100b)，即得常微分方程组 (7.99) 的解  $\{w\}$ 。

求解式 (7.101d) 中杜哈美积分的解析方法可见 § 6.3，其数值方法可见本节中第三小节的介绍。

## 二、直接积分法

上面的振型叠加法实质上是强迫振动的离散化方程对时间积分的解析方法。而本小节将讨论其对时间积分的数值解法，即直接积分法。直接积分法可以事先不用求解其相应齐次方程的特征量与特征向量，而将变量对时间的微商用差商来代替，从而直接求解方程 (7.99)。直接积分法可分为两大类。

## (一) 显式

方程 (7.99) 中的微商用中差公式

$$\frac{d^2 w_i}{dt^2} = \frac{w_i^{(r+1)} - 2w_i^{(r)} + w_i^{(r-1)}}{\tau^2} \quad (7.102a)$$

代替，其中  $\tau$  为时间步长， $r$  为时刻序号。则原方程 (7.99) 离散化为

$$[M]\{w\}^{(r+1)} = \tau^2 \{F\}^{(r)} - \tau^2 [K]\{w\}^{(r)} + 2[M]\{w\}^{(r)} - [M]\{w\}^{(r-1)} \quad (7.102b)$$

这样就可以由  $r, r-1$  时刻的已知  $\{w\}, \{F\}$  求取下一时刻未知的  $\{w\}^{(r+1)}$ ，而进行逐次计算，其中  $\{w\}^{(0)}, \{w\}^{(1)}$  由初始条件确定。

可以看出，这种方法的基本算式 (7.102b) 只是简单的矩阵运算，而不是求解线代方程组，因此是十分简便的。但这种显式直接积分法主要问题是它对步长  $\tau$  有一定要求，才能保证计算是稳定的。可以证明，采用式 (7.102b) 计算格式的稳定性要求是取步长

$$\tau < \frac{2}{\omega_{max}} \quad (7.102c)$$

其中， $\omega_{max}$  为方程 (7.99) 相应齐次方程的最大特征值，这很容易用直接迭代法的一次迭代进行估算。

## (二) 隐式

隐式直接积分法对于步长  $\tau$  没有要求，是无条件稳定的，但每步计算必须求解非齐次线代方程组。下面是一种常用的 Wilson- $\theta$  法

设加速度在  $t$  到  $t + \theta\tau$  间是线性变化 ( $\tau$  为时间步长)，即

$$\ddot{w}_i(t + \Delta t) = \ddot{w}_i(t) + \frac{\Delta t}{\theta\tau} [\ddot{w}_i(t + \theta\tau) - \ddot{w}_i(t)] \quad (7.103a)$$

积分之有

$$\dot{w}_i(t + \Delta t) = \dot{w}_i(t) + \Delta t \ddot{w}_i(t) + \frac{(\Delta t)^2}{2\theta\tau} [\ddot{w}_i(t + \theta\tau) - \ddot{w}_i(t)] \quad (7.103b)$$

$$w_i(t + \Delta t) = w_i(t) + \Delta t \dot{w}_i(t) + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{w}_i(t) + \frac{(\Delta t)^3}{6\theta\tau} [\ddot{w}_i(t + \theta\tau) - \ddot{w}_i(t)] \quad (7.103c)$$

取  $\Delta t = \theta\tau$ ，则此两式为

$$\dot{w}_i(t + \theta\tau) = \dot{w}_i(t) + \frac{\theta\tau}{2} [\ddot{w}_i(t + \theta\tau) + \ddot{w}_i(t)] \quad (7.103d)$$

$$w_i(t + \theta\tau) = w_i(t) + \theta\tau \dot{w}_i(t) + \frac{\theta^2\tau^2}{6} [\ddot{w}_i(t + \theta\tau) + 2\ddot{w}_i(t)] \quad (7.103e)$$

从式 (7.103e) 解出

$$\ddot{w}_i(t+\theta\tau) = -\frac{6}{\theta^2\tau^2} \left[ w_i(t+\theta\tau) - w_i(t) \right] - \frac{6}{\theta\tau} \dot{w}_i(t) - 2\ddot{w}_i(t) \quad (7.103f)$$

基本方程组 (7.99) 在  $(t+\theta\tau)$  时刻有

$$[M]\{\ddot{w}\}_{i+\theta\tau} + [K]\{w\}_{i+\theta\tau} = \{F\}_{i+\theta\tau} \quad (7.104a)$$

取

$$\{F\}_{i+\theta\tau} = \{F\}_i + \theta[\{F\}_{i+\tau} - \{F\}_i] \quad (7.104b)$$

将上述诸式代入式 (7.104a)，则有基本算式

$$\begin{aligned} \left( \frac{6}{\theta^2\tau^2}[M] + [K] \right) \{w\}_{i+\theta\tau} &= \frac{6}{\theta^2\tau^2}[M] \{w\}_i + \frac{6}{\theta\tau}[M] \{\dot{w}\}_i \\ &+ 2[M]\{\ddot{w}\}_i + \{F\}_i + \theta[\{F\}_{i+\tau} - \{F\}_i] \end{aligned} \quad (7.105)$$

这样，就可以由  $t$  时刻的已知各量求取  $(t+\theta\tau)$  时刻未知的  $\{w\}_{i+\theta\tau}$ ，然后代回式 (7.103f)，可求取  $\{\ddot{w}\}_{i+\theta\tau}$ ，再用到式 (7.103a)，(7.103b)，(7.103c)，并取  $\Delta t = \tau$ ，则可计算下一时刻  $(t+\tau)$  的  $\{\ddot{w}\}_{i+\tau}$ ， $\{\dot{w}\}_{i+\tau}$ ， $\{w\}_{i+\tau}$ 。重复上述步骤，即能完成对时间逐步积分过程。可以看出，这种方法的每一步的基本算式 (7.105) 是非齐次线代方程组（解法见下节），求解过程要比显式直接积分法复杂。但可以证明，<sup>[20]</sup> 采用式 (7.105) 的计算格式，当  $\theta \geq 1.37$ （一般取  $\theta = 1.4$ ）时，计算是无条件稳定的，即无论步长  $\tau$  取多少，计算总是稳定的，不同的  $\tau$  只是影响精度不同。

### 三、杜哈美积分的数值解法

在第六章中解析方法和本节离散化方程的振型叠加法都归结为求解杜哈美积分。杜哈美积分是结构动力学中一种十分常用的定积分计算。除在第六章中介绍的解析方法外，这里将介绍其数值解法。在实际工程问题中外载随时间变化规律可能比较复杂，难以解析求解，也可能外载函数本来就是以数值形式给出的，因此杜哈美积分的数值求解方法是十分实用的。一般包括有两种方法。

#### （一）纵剖法（图7.14）

将  $t$  划分为若干任意区间  $\Delta t_i$ ，以其中点对应的  $p$  值作横坐标的平行线  $p = p_i$ ，用这些分段常值代替实际  $p(t)$  曲线，则就可用下列公式数值求解杜哈美积分

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(t) &= \frac{\omega}{p_0} \int_0^t p(\tau) \sin \omega(t-\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{p_0} \left[ \int_0^{t_1} p_1 [-\sin \omega(t-\tau)] d\omega(t-\tau) \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_1}^{t_2} p_2 [-\sin \omega(t-\tau)] d\omega(t-\tau) + \dots \right] \\ &= \frac{1}{p_0} \left\{ p_1 [\cos \omega(t-t_1) - \cos \omega(t-0)] \right. \\ &\quad \left. + p_2 [\cos \omega(t-t_2) - \cos \omega(t-t_1)] + \dots \right\} \\ &= \frac{1}{p_0} \sum_{i=1}^n p_i [\cos \omega(t-t_i) - \cos \omega(t-t_{i-1})] \end{aligned} \quad (7.106a)$$

其中  $t_n$  为所求时刻  $t$ 。

#### （二）横剖法（图7.15）

将  $t$  划分为若干任意离散点  $t_i$ ，以其每个区间中点对应的  $p$  值作横坐标的平行线，求出

这些平行线的间隔 $\Delta P_i$ 。实际 $P(t)$ 化为若干个幅值为 $\Delta P_i$ 的阶梯载荷的叠加, 则对于每个阶梯载荷有杜哈美积分 (§ 6.4)

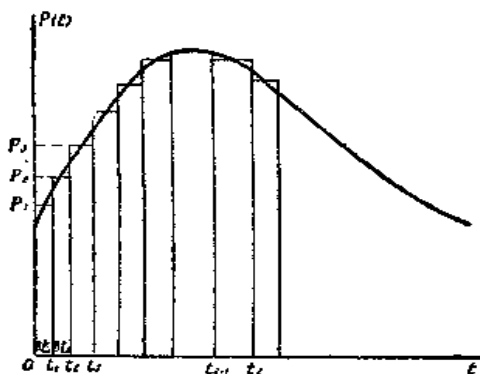


图 7.14

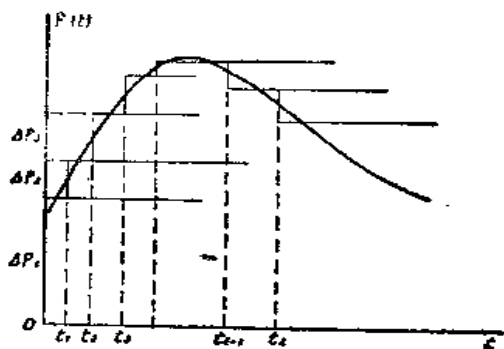


图 7.15

$$\mathcal{D}_1(t) = \frac{1}{p_0} \Delta P_1 [1 - \cos \omega(t - 0)]$$

$$\mathcal{D}_2(t) = \frac{1}{p_0} \Delta P_2 [1 - \cos \omega(t - t_1)]$$

.....

(7.106b)

而实际的杜哈美积分为这些结果的叠加, 即

$$\mathcal{D}(t) = \frac{1}{p_0} \sum_{i=1}^n \Delta P_i [1 - \cos \omega(t - t_{i-1})] \quad (7.106c)$$

其中 $\Delta P_i$ 可能为负值, 如果 $P(t)$ 值随时间而减小的话。

#### 四、计入阻尼因素的离散化方程

在第六章我们详细讨论了连续体的内摩擦理论和解析求解方法中阻尼因素的计入。而许多近似解法最后归结为离散化方程。如何在离散化方程中计入阻尼因素和进行求解, 这将在本小节中扼要介绍。

离散化方程 (7.99) 一般加入和广义速度有关的阻尼阵, 而变为

$$[M]\{\ddot{w}\} + [c]\{\dot{w}\} + [K]\{w\} = \{F\} \quad (7.107)$$

式中质量、刚度、载荷矩阵在以前各种近似方法中已详细讨论过了。而阻尼矩阵 $[c]$ 的确立有两种方法: 一种是取对角线矩阵, 其元素取为与内、外阻尼有关的阻尼系数; 另一种是瑞雷阻尼<sup>[152]</sup>, 它与质量矩阵及刚度矩阵成正比

$$[c] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (7.108a)$$

若已知体系基本频率 $\omega_1$ 及其相应的阻尼比 $\lambda_1$ , 则常数 $\alpha, \beta$ 确定为

$$\alpha = \lambda_1 \omega_1, \quad \beta = \lambda_1 / \omega_1 \quad (7.108b)$$

若已知体系的第一、二阶固有频率 $\omega_1, \omega_2$ 及其相应的阻尼比 $\lambda_1, \lambda_2$ 则常数 $\alpha, \beta$ 确定为

$$\alpha = \frac{2\omega_1\omega_2(\lambda_2\omega_1 - \lambda_1\omega_2)}{\omega_1^2 - \omega_2^2}, \quad \beta = \frac{2(\lambda_1\omega_1 - \lambda_2\omega_2)}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \quad (7.108c)$$

计入阻尼的强迫振动离散化方程的求解仍可用前面所述的方法进行时间积分。如果采用瑞雷阻尼, 则可用振型叠加法解耦为各振型分量所满足的独立常微分方程, 按有阻尼单自由

度方程求解。对于各种类型阻尼矩阵均可用直接积分法:

如果采用显式, 则引用速度的中差公式

$$\frac{dw_i}{dt} = \frac{1}{2\tau} \left[ w_i^{(r+1)} - w_i^{(r-1)} \right] \quad (7.109a)$$

连同式 (7.102a) 一起代入方程 (7.107), 有相应逐次计算公式

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{\tau^2} [M] + \frac{1}{2\tau} [c] \right) \{w\}^{(r+1)} &= \{F\}^{(r)} - \left( [K] - \frac{2}{\tau^2} [M] \right) \{w\}^{(r)} \\ &\quad - \left( \frac{1}{\tau^2} [M] - \frac{1}{2\tau} [c] \right) \{w\}^{(r-1)} \end{aligned} \quad (7.109b)$$

如果采用隐式, 则将式 (7.103f) 代入式 (7.103d) 有

$$\dot{w}_i(t + \theta\tau) = \frac{3}{\theta\tau} \left[ w_i(t + \theta\tau) - w_i(t) \right] - 2\dot{w}_i(t) - \frac{\theta\tau}{2} \ddot{w}_i(t) \quad (7.110a)$$

连同式 (7.103f) 一起代入基本方程组 (7.107) 在  $(t + \theta\tau)$  时刻算式

$$\begin{aligned} [M]\{\dot{w}\}_{(t+\theta\tau)} + [c]\{\dot{w}\}_{(t+\theta\tau)} + [K]\{w\}_{(t+\theta\tau)} &= \{F\}_{(t+\theta\tau)} \\ &= \{F\}_{(t)} + \theta[\{F\}_{(t+\tau)} - \{F\}_{(t)}] \end{aligned} \quad (7.110b)$$

则有基本算式

$$\begin{aligned} \left( \frac{6}{\theta^2\tau^2} [M] + \frac{3}{\theta\tau} [c] + [K] \right) \{w\}_{(t+\theta\tau)} &= \left( \frac{6}{\theta^2\tau^2} [M] + \frac{3}{\theta\tau} [c] \right) \{w\}_{(t)} \\ &\quad + \left( \frac{6}{\theta\tau} [M] + 2[c] \right) \{\dot{w}\}_{(t)} + \left( 2[M] + \frac{\theta\tau}{2} [c] \right) \{\ddot{w}\}_{(t)} \\ &\quad + \{F\}_{(t)} + \theta[\{F\}_{(t+\tau)} - \{F\}_{(t)}] \end{aligned} \quad (7.110c)$$

## § 7.15 强迫振动的非齐次线代方程的数值解法

强迫振动的离散化方程是线性常微分方程组, 通过对时间的数值积分, 归结为非齐次线代方程组, 其一般形式可写为矩阵形式

$$[A]\{x\} = \{B\} \quad (7.111a)$$

其中

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \{x\} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \{B\} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (7.111b)$$

它代表一组  $n$  元非齐次线性代数方程组, 其中  $[A]$  及  $\{B\}$  是已知的, 需求解列阵  $\{x\}$ 。求解元素  $x_k$  的一般性公式为

$$x_k = \frac{|C_k|}{|A|} \quad (7.111c)$$

式中  $|A|$  为矩阵  $[A]$  的元素行列式值;  $|C_k|$  为矩阵  $[C_k]$  的元素行列式值, 矩阵  $[C_k]$  为矩阵  $[A]$  的第  $k$  列元素代以列阵  $\{B\}$  的元素。但实际适用于手算与电算的方法是三角阵法, 迭代法, 松弛法, 消元法, 平方根法等。这里仅介绍前两种, 有关详情可参见专门文献 [74] [83]

等。

## 一、三角阵法

将 $[A]$ 分解为两个三角形方阵的乘积, 即

$$[A]=[U][V]=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ u_{21} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ u_{31} & u_{32} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{n1} & u_{n2} & u_{n3} & \cdots & u_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & \cdots & v_{1n} \\ 0 & v_{22} & v_{23} & \cdots & v_{2n} \\ 0 & 0 & v_{33} & \cdots & v_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix} \quad (7.112a)$$

其中

$$\begin{aligned} v_{1j} &= a_{1j} \quad (j=1, 2, \cdots, n) \\ v_{2j} &= a_{2j} - u_{21}v_{1j} \quad (j=2, 3, \cdots, n) \\ v_{3j} &= a_{3j} - u_{31}v_{1j} - u_{32}v_{2j} \quad (j=3, 4, \cdots, n) \\ v_{ij} &= a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ik}v_{kj} \quad (i=4, \cdots, n, j=i, \cdots, n) \end{aligned} \quad (7.112b)$$

$$u_{i1} = \frac{a_{i1}}{v_{11}} \quad (i=2, 3, \cdots, n)$$

$$u_{i2} = \frac{a_{i2} - u_{i1}v_{12}}{v_{22}} \quad (i=3, 4, \cdots, n)$$

$$u_{i3} = \frac{a_{i3} - u_{i1}v_{13} - u_{i2}v_{23}}{v_{33}} \quad (i=4, 5, \cdots, n)$$

$$u_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ik}v_{kj}}{v_{jj}} \quad \begin{pmatrix} i=j+1, \cdots, n \\ j=4, \cdots, n \end{pmatrix} \quad (7.112c)$$

则基本方程 (7.111a) 化为

$$[U][V]\{x\} = \{B\} \quad (7.113a)$$

可分解为两个方程组

$$[V]\{x\} = \{y\} \quad (7.113b)$$

$$[U]\{y\} = \{B\} \quad (7.113c)$$

按方程 (7.113c), 即可解出 $\{y\}$ 的元素

$$y_1 = b_1, y_2 = b_2 - u_{21}y_1, y_3 = b_3 - u_{31}y_1 - u_{32}y_2,$$

$$y_i = b_i - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ik}y_k \quad (i=4, \cdots, n) \quad (7.114a)$$

按方程 (7.113b), 即可解出 $\{x\}$ 的元素

$$x_n = \frac{y_n}{v_{nn}},$$

$$x_{n-1} = \frac{y_{n-1} - v_{(n-1)n}y_n}{v_{(n-1)(n-1)}},$$



$$x_i = \frac{y_i - \sum_{k=i+1}^n v_{ik} y_k}{v_{ii}} \quad (i=n-2, n-3, \dots, 1) \quad (7.114b)$$

从而求得基本方程 (7.111a) 的解  $\{x\}$ 。

## 二、迭 代 法

将基本方程 (7.111a) 改写成

$$\{x\} = [C]\{x\} + \{B\} \quad (7.115a)$$

式中矩阵

$$[C] = [I] - [A] \quad (7.115b)$$

则可按式

$$\{x\}^{(n)} = [C]\{x\}^{(n-1)} + \{B\} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (7.115c)$$

进行迭代, 其中  $\{x\}^{(0)}$  为所设任意初始向量。当  $n$  适当大时,  $\{x\}^{(n)}$  将逼近于真实解  $\{x\}$ 。

【例】

$$[A]\{x\} = \begin{bmatrix} 0.78 & -0.02 & -0.12 & -0.14 \\ -0.02 & 0.86 & -0.04 & 0.06 \\ -0.12 & -0.04 & 0.72 & -0.08 \\ -0.14 & 0.06 & -0.08 & 0.74 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.76 \\ 0.08 \\ 1.12 \\ 0.68 \end{Bmatrix} = \{B\}$$

按式 (7.115b) 算得

$$[C] = [I] - [A] = \begin{bmatrix} 0.22 & 0.02 & 0.12 & 0.14 \\ 0.02 & 0.14 & 0.04 & -0.06 \\ 0.12 & 0.04 & 0.28 & 0.08 \\ 0.14 & -0.06 & 0.08 & 0.26 \end{bmatrix}$$

按式 (7.115c) 迭代有

$$\{x\}^{(0)} = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$$

$$\{x\}^{(1)} = [1.26 \ 0.220 \ 1.64 \ 1.10]^T$$

$$\{x\}^{(2)} = [1.39 \ 0.136 \ 1.83 \ 1.26]^T$$

$$\{x\}^{(3)} = [1.46 \ 0.124 \ 1.91 \ 1.34]^T$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\{x\}^{(7)} = [1.53 \ 0.122 \ 1.97 \ 1.41]^T$$

$$\{x\}^{(8)} = [1.53 \ 0.122 \ 1.97 \ 1.41]^T$$

## 第八章 平板振动的一些专门问题

第二章所建立的平板振动理论以及随后各章所给出的各种形状、边界条件板件各类振动分析均属于在一系列简化假定前提下的最简单情况,即各向同性、匀质等厚度、线弹性、薄板的小挠度振动。实际工程中所遇到的情况可能要复杂得多。本章将讨论超出第二章所述平板振动理论范围的一些特殊问题。这些问题都是一些专门课题,下面各节仅给出有关问题的基本理论和一些主要结果,详细情况可参见书后所列有关文献。

### § 8.1 平面力板的振动

第二章推导薄板振动基本方程的基本假定之一是认为中面没有变形。如果平面边界直接作用有平面力或者由于温度等原因引起平面力,则将会和板的弯曲变形耦合,从而影响平板的自振特性和振动分析<sup>[108] [171] [218]</sup>。本节所讨论的平面力仅限于静力、已知的,并和板的横向挠曲无关。至于弯曲与平面振动的耦合问题,将在§ 8.9中专门讨论。

#### 一、基本方程

在线弹性薄板、小挠度振动范围内,有平面力作用的板的几何方程、物理方程及内力表达式仍同第二章所列,但由于平面力 $N_x, N_y, N_{xy}$ 的存在,其动平衡方程将改变。根据图8.1的内力图、图8.2的变形图,考虑单元体所受弯矩、扭矩、剪力、惯性力和已知平面力在三个轴方向上力的平衡有

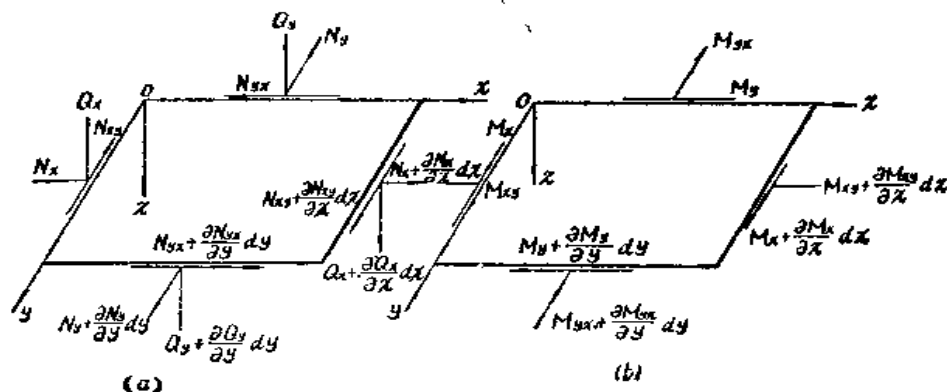


图 8.1

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (8.1a)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} - \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (8.1b)$$

及

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \left( N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \left( N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \left( 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + q - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (8.1c)$$

对平面内二轴的力矩的平衡有

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0 \quad (8.1d)$$

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0 \quad (8.1e)$$

上面已谈到, 在有平面力作用的板的振动问题中,  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy}$  是静力的, 故式 (8.1a), (8.1b) 简化为

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (8.2a)$$

$$\frac{\partial N_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \quad (8.2b)$$

显然方程 (8.2) 是独立的, 与其它三个方程无关, 在板边界平面受力已知情况下是一个简单的平面静力问题。因而可认为在式 (8.1c) 中的  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy}$  是已知的。

将式 (8.1d), (8.1e) 代入 (8.1c), 并代入内力表达式 (2.6), 可得在直角坐标系的平面力板的振动方程

$$D \nabla^2 \nabla^2 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + q \quad (8.3)$$

平面力板的边界条件仍同式 (2.11), 但要注意对于自由边界的合剪力应为

$$V_n = Q_n + \frac{\partial M_n}{\partial t} + N_n \frac{\partial w}{\partial n} \quad (8.4)$$

在均布拉力  $N$  情况下, 基本方程变为

$$D \nabla^2 \nabla^2 w - N \nabla^2 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q \quad (8.5a)$$

式中, 对于直角坐标系有

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (8.5b)$$

对于极坐标系为

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (8.5c)$$

## 二、矩 形 板

现讨论在双向均布拉力作用下矩形板的固有振动, 即基本方程 (8.3) 中  $q = 0$ ,  $N_x = N_1$ ,  $N_y = N_2$ ,  $N_{xy} = 0$ , 则方程变为

$$D \nabla^2 \nabla^2 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = N_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (8.6a)$$

其相应振型方程为

$$\nabla^2 \nabla^2 W - \alpha^4 W = \frac{N_1}{D} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{N_2}{D} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \quad (8.6b)$$

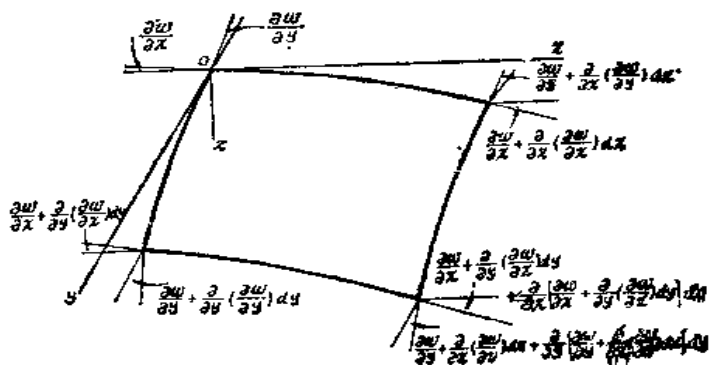


图 8.2

$$\alpha^4 = \omega^2 \frac{\rho h}{D} \quad (8.6c)$$

下面对于不同边界条件求解方程 (8.6b)

四边简支板 设满足边界条件振型解 (图3.2)

$$W(x, y) = A_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (m, n = 1, 2, 3, \dots) \quad (8.7)$$

代入振型方程 (8.6b), 因  $A_{mn} \neq 0$ , 可得固有频率解

$$\omega_{mn} = k, \omega_{mn}^0 \quad (8.8a)$$

其中, 无平面力板频率

$$\omega_{mn}^0 = \pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad (8.8b)$$

平面力修正系数

$$k_1 = \left[ 1 + \frac{1}{\pi^2 D} \frac{N_1 \left( \frac{m}{a} \right)^2 + N_2 \left( \frac{n}{b} \right)^2}{\left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (8.8c)$$

由解 (8.8) 知, 当  $N_1, N_2$  为拉力时, 平板固有频率增加; 当  $N_1, N_2$  为压力时, 平板固有频率减小。相应于  $\omega_{mn} = 0$ , 有

$$N \left( \frac{m}{a} \right)^2 + N_2 \left( \frac{n}{b} \right)^2 = -\pi^2 D \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} \quad (8.9a)$$

则不再振动, 即达临界失稳状态。在单向压缩 ( $N_2 = 0$ ) 情况下, 式 (8.9a) 变为熟知的四边简支板的临界力公式

$$(N_1)_{cr} = -D \left( \frac{a}{m\pi} \right)^2 \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} \quad (8.9b)$$

平面力效应不但和平面力的值有关, 而且与阶次有关。式 (8.8c) 表明, 随着阶次增加, 平面力影响可能降低。即, 随  $(m, n)$  增加, 虽然  $\omega_{mn}^0$  值增加, 但  $k_1$  值减少, 因此两者综合结果可能造成基本固有频率相应之  $(m, n)$  不一定是 (1, 1), 亦即对于不同  $N_1, N_2$  及  $\frac{a}{b}$  值, 其基频的阶次  $(m, n)_0$  值是不同的<sup>[108]</sup>。例如, 单向压缩 ( $N_1$ ) 情况下, 按式 (8.8), 可算得相应不同  $N_1$  及  $\frac{a}{b}$  值之基频阶次  $(m, n)_0$  值见表 8.1。

四边简支平面力板的基频阶次  $(m, n)_0$

表 8.1

$\begin{matrix} (m, n)_0 \\ N_1 / (N_1)_{cr} \\ a/b \end{matrix}$	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)
5	0 ~ 0.57	0.57 ~ 0.62	0.62 ~ 0.75	0.75 ~ 0.91	0.91 ~ 1.00
4	0 ~ 0.59	0.59 ~ 0.70	0.70 ~ 0.89	0.89 ~ 1.00	
3	0 ~ 0.62	0.62 ~ 0.87	0.87 ~ 1.00		
2	0 ~ 0.81	0.81 ~ 1.00			

对边简支板 设满足  $x = 0, a$  简支边界条件的解

$$W(x, y) = Y_n(y) \sin \frac{m\pi}{a} x \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (8.10)$$

代入振型方程 (8.6b), 得  $\bar{Y}_m(y)$  所应满足的常微分方程

$$\bar{Y}_m'''' - \left( 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{N_2}{D} \right) \bar{Y}_m'' + \left( \frac{m^4 \pi^4}{a^4} - \alpha^4 + \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \frac{N_1}{D} \right) \bar{Y}_m = 0 \quad (8.11)$$

对此常系数常微分方程, 可求得一般解

$$\bar{Y}_m(y) = A_m \sin \beta_{1m} y + B_m \cos \beta_{1m} y + C_m \operatorname{sh} \beta_{2m} y + D_m \operatorname{ch} \beta_{2m} y \quad (8.12a)$$

式中,

$$\beta_{1m} = \left\{ \left[ \left( \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{N_2}{2D} \right)^2 - \left( \frac{m^4 \pi^4}{a^4} - \alpha^4 + \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \frac{N_1}{D} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \mp \left( \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{N_2}{2D} \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (8.12b)$$

解中四个待定系数  $A_m, B_m, C_m, D_m$  由  $y=0, b$  每边二个边界条件确定为四阶齐次线性方程组, 由非零解条件, 可推得各种边界条件的频率方程。对于不同边界条件的频率方程具体表达式类同对边简支无平面力板解 (3.23), (3.26), (3.27), 只是其中  $\beta_{1m}, \beta_{2m}$  按式 (8.12b) 代入计算。

应该指出, 上述解 (8.12a) 是按  $\beta_{1m}, \beta_{2m}$  均为正实根建立的, 若在实际计算中出现零、虚根、复根, 则解的形式要作相应改变。

### 三、圆板

对于固有振动, 方程 (8.5) 相应的振型方程为 (图4.1)

$$D \nabla^2 \nabla^2 W - N \nabla^2 W - \rho \omega^2 W = 0 \quad (8.13a)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (8.13b)$$

进一步可分离为

$$(\nabla^2 + \psi^2)(\nabla^2 - \phi^2)W = 0 \quad (8.14a)$$

其中

$$\psi^2 = \frac{N}{2D} \left( \sqrt{1 + \frac{4\rho D \omega^2}{N^2}} - 1 \right), \quad \phi^2 = \frac{N}{2D} \left( \sqrt{1 + \frac{4\rho D \omega^2}{N^2}} + 1 \right) \quad (8.14b)$$

方程的求解将类似于第四章无平面力圆板。可设方程 (8.14) 的解为

$$W(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} W_m^{(1)}(r) \cos m\theta + \sum_{m=1}^{\infty} W_m^{(2)}(r) \sin m\theta \quad (8.15)$$

代入方程 (8.14), 则下列两个方程中任一个解均为  $W_m^{(1)}$  或  $W_m^{(2)}$ ,

$$W_m^{(1)}(r) + \frac{1}{r} W_m^{(1)'}(r) - \left( \frac{m^2}{r^2} - \psi^2 \right) W_m^{(1)}(r) = 0 \quad (8.16a)$$

$$W_m^{(2)}(r) + \frac{1}{r} W_m^{(2)'}(r) - \left( \frac{m^2}{r^2} + \phi^2 \right) W_m^{(2)}(r) = 0 \quad (8.16b)$$

第二章已研究过, 这两个均是贝塞尔方程, 有解

$$W_m^{(1)}(r) = A_m J_m(\psi r) + B_m Y_m(\psi r) \quad (8.17a)$$

$$W_m^{(2)}(r) = C_m I_m(\phi r) + D_m K_m(\phi r) \quad (8.17b)$$

其中,  $J_m, Y_m$  分别为第一、二类贝塞尔函数,  $I_m, K_m$  分别为第一、二类修正贝塞尔函数, 将这两组解叠加, 代入式 (8.15), 得振型一般解

$$W(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} [A_m^{(1)} J_m(\psi r) + B_m^{(1)} Y_m(\psi r) + C_m^{(1)} I_m(\phi r) + D_m^{(1)} K_m(\phi r)] \cos m\theta +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} [A_m^{(2)} J_m(\psi r) + B_m^{(2)} Y_m(\psi r) + C_m^{(2)} I_m(\phi r) + D_m^{(2)} K_m(\phi r)] \sin m\theta \quad (8.18a)$$

对于整圆板, 考虑到圆心处振型有限, 以及将坐标轴置于振型对称轴上, 有解

$$W(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} [A_m J_m(\psi r) + C_m I_m(\phi r)] \cos m\theta \quad (8.18b)$$

解中两个待定系数  $A_m$ 、 $C_m$  由周边两个边界条件确定为二阶齐次线代方程组, 由非零解条件, 可推得各种边界条件的频率方程及频率解<sup>[262]</sup> 例如:

**简支板** 由边界条件  $W(a) = Mr(a) = 0$  得频率方程

$$\frac{J_{m+1}(\psi a)}{J_m(\psi a)} \psi + \frac{I_{m+1}(\phi a)}{I_m(\phi a)} \phi - \frac{\psi^2 + \phi^2}{1 - \nu} a = 0 \quad (8.19a)$$

可求得  $\omega_{mn}$ ,  $\psi_{mn}$ ,  $\phi_{mn}$ , 则相应振型为

$$W_{mn}(r, \theta) = [I_m(\phi_{mn} r) - \frac{I_m(\phi_{mn} a)}{J_m(\psi_{mn} a)} J_m(\psi_{mn} r)] \cos m\theta \quad (8.19b)$$

按方程 (8.19a) 求得的频率系数  $\lambda_{mn}$  (定义见式 (4.9)) 列于表 8.2, 其中临界载荷

$$(N)_{cr} = 4.2 \frac{D}{a^2}.$$

在均布张力作用下简支圆板的频率系数  $\lambda_{mn}$  ( $\nu = 0.3$ )

表 8.2

$\frac{N}{(N)_{cr}}$	0			0.5			1.0			2.0		
$m \backslash n$	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
0	2.231	3.736	5.062	2.459	3.814	5.161	2.643	3.946	5.255	2.924	4.178	5.436
1	5.457	6.964	8.374	5.548	6.994	8.376	5.639	7.067	8.423	5.809	7.214	8.541
2	8.617	10.09	11.59	8.672	10.22	11.64	8.730	10.27	11.69	8.848	10.37	11.77

**固定板** 由边界条件  $W(a) = \frac{\partial W}{\partial r}(a) = 0$  得频率方程

$$\frac{J_{m+1}(\psi a)}{J_m(\psi a)} \psi + \frac{I_{m+1}(\phi a)}{I_m(\phi a)} \phi = 0 \quad (8.20)$$

相应振型表达式同 (8.19b), 只是其中  $\omega_{mn}$ ,  $\psi_{mn}$ ,  $\phi_{mn}$  为方程 (8.20) 解。按方程 (8.20)

求得的频率系数  $\lambda_{mn}$  列于表 8.3, 其中临界载荷  $(N)_{cr} = 14.7 \frac{D}{a^2}$

在均布张力作用下固定圆板的频率系数  $\lambda_{mn}$

表 8.3

$\frac{N}{(N)_{cr}}$	0			0.5			1.0			2.0		
$m \backslash n$	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
0	3.195	4.604	5.899	3.527	4.999	6.170	3.782	5.139	6.511	4.167	5.533	6.713
1	6.305	7.801	9.196	6.538	7.966	9.382	6.747	8.146	9.554	7.113	8.478	9.859
2	9.446	10.76	12.32	9.607	10.90	12.53	9.769	11.05	12.64	10.08	11.34	12.89

#### 四、微 弯 板

在实际结构中, 初始板件的中面不一定是一个完全理想平面, 可能有一定初曲率(初挠度), 或者由于工程需要事先人为地做成具有初始微曲率的板件, 这些板件总称为微弯板。我们假定所具有的初挠度 $w_0(x, y)$ 与平板厚度相比是一个小量, 而且是已知的。初挠度的存在对一般无平面力板件振动影响很小, 因此仍可看作是理想平面的中面的平板进行分析, 而不计及初挠度效应; 但当作用有中面内的平面力时, 初始挠度对平面力的平衡有显著影响而必须计入。按照一般叠加原理考虑到 $w_0$ 对平面力平衡的效应, 参照平面力板方程(8.3), 很容易直接写出基本方程

$$D\nabla^2\nabla^2w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = N_x \frac{\partial^2}{\partial x^2}(w + w_0) + 2N_{xy} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(w + w_0) + N_y \frac{\partial^2}{\partial y^2}(w + w_0) + q = N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + q + q_0 \quad (8.21a)$$

而

$$q_0 = N_x \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \quad (8.21b)$$

是已知的。从式(8.21a)可以看出, 具有平面力的微弯板的固有振动与一般平面力板一样, 而强迫振动则相当附加横向外载 $q_0$ 。因此利用本节一些结果即可分析微弯板的振动问题。

#### 五、变 分 方 程

一些复杂的平面力板的近似解法和其变分方程有关。具有均布张力 $N$ 的平面力板的变分方程在形式上仍同式(2.16), 但其中变形能需计入薄膜变形能项, 即

$$U = \frac{D}{2} \iint \left\{ \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] + \frac{N}{D} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right\} ds \quad (8.22a)$$

在极坐标系, 有

$$U = \frac{D}{2} \iint \left\{ \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right]^2 + 2(1-\nu) \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right]^2 - 2(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right] + \frac{N}{D} \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right] \right\} ds \quad (8.22b)$$

类同第二章, 利用格林公式, 由变分方程(2.16), (8.22)可推得

$$\int_{t_0}^{t_1} \iint \left[ \nabla^2 \nabla^2 w + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{N}{D} \nabla^2 w - \frac{q}{D} \right] \delta w ds dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_L M_n \delta \left( \frac{\partial w}{\partial n} \right) dL dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_L \left[ Q_n + \frac{\partial M_n}{\partial s} + N \frac{\partial w}{\partial n} \right] \delta w dL dt = 0 \quad (8.23)$$

从而给出平面力板基本方程及边界条件。有了式(8.22), (8.23), 即可应用上一章所述基于变分方程的各种近似解法。

### § 8.2 各向异性板的振动

在前面各章、节中所讨论的板件材料都假定在各个方向的弹性性能都是相同的, 称为各

向同性板，也就是表示应力-应变关系的物理方程（式（2.3））中只需用二个独立的弹性常数来表示。当材料内各个方向弹性性质不相同，称为各向异性体，其构成的板件为各向异性板[61][101][110][168]。

在许多板的实际问题中，属于各向异性板的情况很多，有的是由于组成材料本身就是各向异性的（如木材、钢筋混凝土、复合材料以及碾压过的钢材等），有的则是构造上原因引起的（如加肋板、波纹板、网架梁板、层叠板等），都必须计及板件的非各向同性性能，才能得到比较合理的结果。各向异性板的一些基本理论问题在文献[314]中有详细阐述。本章专门讨论匀质或等效为匀质的各向异性板的振动问题。对于非匀质各向异性板尚有一些特殊问题将留在§8.4讨论。

与各向同性板相比，各向异性板主要在于表示应力-应变关系的物理方程发生变化。作为基础，首先列出各向异性弹性体物理方程的一般关系式。

### 一、各向异性体的物理方程

各向异性弹性体可分为下列几类：

#### 1. 最一般情况下线弹性应力-应变关系为广义虎克定律

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (8.24a)$$

或写成矩阵表达式

$$\{\varepsilon\} = [a]\{\sigma\} \quad (8.24b)$$

或写成张量表达式

$$\varepsilon_i = a_{ij}\sigma_j \quad (i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6) \quad (8.24c)$$

其中  $a_{ji} = a_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ )，共计有21个弹性常数。

2. 具有弹性对称面情况：物体任一点存在一平面（例如， $xoy$ 面），对这一平面的对称方向就弹性性质而言是等效的。对匀质体，这些面是平行的。在这种情况下物理方程（8.24）中有

$$a_{14} = a_{15} = a_{24} = a_{25} = a_{34} = a_{35} = a_{46} = a_{56} = 0 \quad (8.25)$$

这样就剩下13个弹性常数。垂直对称面的方向称为主方向。

3. 正交各向异性体：物体任一点存在三个互相垂直的弹性对称面（设，主方向  $x, y, z$  垂直此三个面）。在这种情况下，物理方程（8.24）中弹性常数除有式（8.25）外，还有

$$a_{16} = a_{26} = a_{36} = a_{45} = 0 \quad (8.26)$$

这样就剩下9个弹性常数。这表明正应变与剪应力、剪应变与正应力间互不耦合。在工程上常改用下列符号：

$$a_{11} = \frac{1}{E_x}, \quad a_{22} = \frac{1}{E_y}, \quad a_{33} = \frac{1}{E_z}, \quad a_{44} = \frac{1}{G_{yz}}, \quad a_{55} = \frac{1}{G_{zx}}, \quad a_{66} = \frac{1}{G_{xy}}$$



$$a_{12} = -\frac{\nu_{yx}}{E_y} = -\frac{\nu_{xy}}{E_x} = a_{21}, \quad a_{13} = -\frac{\nu_{xz}}{E_x} = -\frac{\nu_{zx}}{E_z} = a_{31}, \quad a_{23} = -\frac{\nu_{zy}}{E_z} = -\frac{\nu_{yz}}{E_y} = a_{32} \quad (8.27a)$$

将式 (8.27a), (8.26), (8.25) 代入式 (8.24) 得正交各向异性体的应力-应变关系:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E_x} - \frac{\nu_{yx}}{E_y} \sigma_y - \frac{\nu_{xz}}{E_z} \sigma_z, & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G_{yz}} \\ \varepsilon_y &= -\frac{\nu_{xy}}{E_x} \sigma_x + \frac{\sigma_y}{E_y} - \frac{\nu_{yz}}{E_z} \sigma_z, & \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G_{xz}} \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu_{zx}}{E_x} \sigma_x - \frac{\nu_{zy}}{E_y} \sigma_y + \frac{\sigma_z}{E_z}, & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G_{xy}} \end{aligned} \quad (8.27b)$$

式中有12个弹性常数, 考虑到式 (8.27a), 它们之间有三个关系式

$$E_x \nu_{yx} = E_y \nu_{xy}, \quad E_y \nu_{yz} = E_z \nu_{zy}, \quad E_z \nu_{zx} = E_x \nu_{xz} \quad (8.27c)$$

因此独立的弹性常数仍是9个。正交各向异性体是各向异性体中最常见的一种。

4. 横观各向同性体: 物体任一点存在一平面 (例如,  $xoy$  面), 在这平面上的各个方向是弹性等效的。在这种情况下, 物理方程 (8.24) 中弹性常数除有式 (8.25), (8.26) 外, 还有

$$a_{23} = a_{13}, \quad a_{22} = a_{11}, \quad a_{55} = a_{44}, \quad a_{66} = 2(a_{11} - a_{12}) \quad (8.28)$$

这样就剩下5个弹性常数。在工程上除保留符号 (8.27a) 外, 还进一步采用下列符号:

$$E_x = E_y = E, \quad \nu_{xy} = \nu_{yx} = \nu, \quad G_{xy} = G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \nu_{yz} = \nu_{zx} = \nu_z, \quad G_{yz} = G_{xz} = G_z \quad (8.29a)$$

将式 (8.29a) 代入式 (8.27b) 有横观各向同性体的应力-应变关系

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) - \frac{\nu_z}{E} \sigma_z, & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G_z} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) - \frac{\nu_z}{E} \sigma_z, & \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G_z} \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu_z}{E} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{\sigma_z}{E}, & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \end{aligned} \quad (8.29b)$$

5. 各向同性体: 即物体任一点任一平面均为弹性对称面, 任一方向均为弹性主方向。在这种情况下, 物理方程 (8.24) 中弹性常数除有式 (8.25), (8.26) 外, 还有

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = \frac{1}{E}, \quad a_{23} = a_{31} = a_{12} = -\frac{\nu}{E}, \quad a_{44} = a_{55} = a_{66} = \frac{1}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \quad (8.30a)$$

因此只剩下2个独立弹性常数, 也即为式 (8.29b) 中有

$$E_x = E, \quad \nu_x = \nu, \quad G_x = G \quad (8.30b)$$

则应力-应变关系蜕化为第二章物理方程 (2.3)。

若弹性等效方向不是平行线方向, 而是沿着某一曲面方向, 称为曲线性各向异性。常用的是圆柱型各向异性, 其特点是有一各向异性轴, 各弹性等效方向沿着以此轴为轴线的圆柱坐标系的坐标方向。在各种情况下圆柱型各向异性体的物理方程在形式上同上述各式, 只是一切量的下标应以  $r$  代替  $x$ , 以  $\theta$  代替  $y$ 。

## 二、各向异性薄板振动的基本方程

各向异性板的动力方程因材料的不同各向异性性质，而具有不同形式。下面就几种最主要的情况列出有关结果

### (一) 对称异性板

若板件由具有弹性对称面的各向异性材料构成，并且此弹性对称面平行板件中面  $xoy$ ，此种板件简称为对称异性板（图2.1）。

对称异性板的基本假定和第二章各向同性板一样，有

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = \sigma_z = \rho J = 0 \quad (8.31)$$

位移、应变表达式仍同式 (2.1)，(2.2)，为

$$u = -\frac{\partial w}{\partial x} z, \quad v = -\frac{\partial w}{\partial y} z \quad (8.32a)$$

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (8.32b)$$

但应力按式 (8.24)，(8.25)，(8.31) 有张量表达式

$$\sigma_i = a_{ij} \epsilon_j \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (8.33a)$$

反之有

$$\sigma_i = e_{ij} \epsilon_j \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (8.33b)$$

其中  $e_{ij}$  为

$$[e] = [a]^{-1} \quad (8.33c)$$

的元素。由应力张量积分得内力张量

$$M_i = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_i z dz \quad (i = 1, 2, 6) \quad (8.34a)$$

代入上述各式，可算得

$$M_i = D_{ia} \frac{\partial \beta_a}{\partial x_a} \quad (i, a = 1, 2, 6) \quad (8.34b)$$

$$D_{ia} = e_{ia} \frac{h^3}{12} \quad (i, a = 1, 2, 6) \quad (8.34c)$$

$$\beta_i = -\frac{\partial w}{\partial x_i} \quad (\xi = 1, 2) \quad (8.34d)$$

$$\frac{\partial \beta_6}{\partial x_6} = \frac{\partial \beta_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \beta_2}{\partial x_1} \quad (8.34e)$$

将式 (8.34) 代入动平衡方程 (2.8)，可得对称异性板的基本方程

$$\begin{aligned} D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \\ + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q \end{aligned} \quad (8.35)$$

及剪力表达式

$$Q_i = D_{ia} \frac{\partial^2 \beta_a}{\partial x_i \partial x_a} + D_{6a} \frac{\partial^2 \beta_a}{\partial x_i \partial x_a} \quad (i = \{1, 2\}, j = \{1, 2\}, a = 1, 2, 6) \quad (8.34f)$$

边界条件同各向同性板的式 (2.11)，但其中内力表达式见式 (8.34)。

## (二) 正交异性板及横观同性板

若板件由正交各向异性材料构成, 而且弹性主方向沿着板件的坐标轴  $x, y, z$  (图2.1), 此种板件简称为正交异性板。

正交异性板的基本假定, 位移、应变表达式同对称异性板, 但由于式 (8.26), 在应力-应变关系式 (8.33b) 中有

$$e_{13} = e_{23} = 0 \quad (8.36a)$$

则按式 (8.34c) 有

$$D_{13} = D_{23} = 0 \quad (8.36b)$$

进一步改称

$$D_{11} = D_x = \frac{E_x h^3}{12(1 - \nu_{xy}\nu_{yx})}, \quad D_{22} = D_y = \frac{E_y h^3}{12(1 - \nu_{xy}\nu_{yx})} \quad (8.36c)$$

$$D_{12} = D_{21} = D_x \nu_{yx} = D_y \nu_{xy} \quad (8.36d)$$

$$D_{66} = D_k = \frac{G_{xy} h^3}{12} \quad (8.36e)$$

故基本方程由式 (8.35) 变为

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_x \nu_{yx} + 2D_k) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q \quad (8.37)$$

对于正交异性板, 考虑到式 (8.36d), 有四个独立刚度系数。

若板件由横观各向同性材料构成, 而且各向同性面平行板中面  $xoy$ , 此种板件简称为横观同性板 (图2.1)。

在这种情况下, 进一步按式 (8.29a) 有

$$D_x = D_y = D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad D_k = \frac{1 - \nu}{2} D, \quad \nu_{xy} = \nu_{yx} = \nu \quad (8.38)$$

因此由式 (8.37) 可知, 其基本方程和各向同性板一样为

$$D \nabla^2 \nabla^2 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q \quad (8.39)$$

从式 (8.29b) 可以看出, 只有当考虑剪切变形及挤压变形时 (§ 8.3), 横观同性板的基本方程才与各向同性板不同。

## (三) 一般性直角坐标系中正交异性板

如果正交异性板的材料弹性主方向与坐标轴不一致, 板中面内坐标系轴  $x', y'$  与材料弹性主方向  $x, y$  在同一平面, 但具有夹角  $\theta$ , 则在坐标系  $x' y' z$  中板件变为以  $z$  为主方向的对称异性板。其基本方程为式 (8.35), 而其中六个刚度系数与原正交异性板的刚度  $D_x, D_y, D_k, \nu_{xy}$  间关系为:

$$D_{11} = D_x \cos^4 \theta + 2(D_x \nu_{yx} + 2D_k) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + D_y \sin^4 \theta \quad (8.40a)$$

$$D_{22} = D_y \cos^4 \theta + 2(D_y \nu_{xy} + 2D_k) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + D_x \sin^4 \theta \quad (8.40b)$$

$$D_{13} = \frac{1}{2} \{ [D_x (\nu_{yx} - 1) + 2D_k] \cos^2 \theta + [D_y (1 - \nu_{xy}) - 2D_k] \sin^2 \theta \} \sin 2\theta \quad (8.40c)$$

$$D_{23} = \frac{1}{2} \{ [D_y (\nu_{xy} - 1) + 2D_k] \cos^2 \theta + [D_x (1 - \nu_{yx}) - 2D_k] \sin^2 \theta \} \sin 2\theta \quad (8.40d)$$

$$D_{12} = D_x \nu_{yx} + [D_x(1 - 2\nu_{yz}) + D_y - 4D_k] \sin^2 \theta \cos^2 \theta \quad (8.40e)$$

$$D_{66} = D_k + [D_x(1 - 2\nu_{yz}) + D_y - 4D_k] \sin^2 \theta \cos^2 \theta \quad (8.40f)$$

#### (四) 变分方程

各向异性板的变分方程仍具有各向同性板式 (2.16) 形式, 其中变形能根据各向异性体一般表达式

$$U = \iiint_V \frac{1}{2} \sigma_i \varepsilon_i dV = \iiint_V \sum_{k=1}^6 \sum_{l=1}^6 \frac{1}{2} e_{kl} \varepsilon_k \varepsilon_l dV \quad (8.41a)$$

代入相应  $e_{kl}$  及式 (8.32), 并沿厚度积分, 可得:

对于对称异性板为

$$U = \frac{1}{2} \iint_s \left[ D_{11} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{22} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{66} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + 4 \left( D_{13} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{23} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] ds \quad (8.41b)$$

对于正交异性板为

$$U = \frac{1}{2} \iint_s \left[ D_1 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + (D_x \nu_{yx} + D_y \nu_{xy}) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_x \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_k \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] ds \quad (8.41c)$$

而动能表达式仍为式 (2.15)。

#### (五) 圆柱型各向异性板

若板件由圆柱型各向异性材料构成, 而且各向异性轴和板中面垂直, 此种板件称为圆柱型各向异性板。对于圆柱型各向异性板, 若取板件的柱坐标系轴  $r, \theta, z$  与材料的弹性主方向相重, 则其基本方程为

$$D_r \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2}{r^2} D_{r\theta} \frac{\partial^4 w}{\partial r^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{r^4} D_\theta \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{2}{r} D_r \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{2}{r^3} D_{r\theta} \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} D_\theta \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{2}{r^4} (D_\theta + D_{r\theta}) \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} D_{r\theta} \frac{\partial w}{\partial r} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q \quad (8.42)$$

而内力表达式为

$$M_r = -D_r \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu_{\theta r}}{r} \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] \quad (8.43a)$$

$$M_\theta = -D_\theta \left[ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \nu_{r\theta} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right] \quad (8.43b)$$

$$M_{r\theta} = -2D_k \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \quad (8.43c)$$

$$Q_r = - \left[ D_r \left( \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) - \frac{D_\theta}{r^2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \frac{D_{r\theta}}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \right) \right] \quad (8.43d)$$

$$Q_\theta = - \left[ \frac{D_\theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \frac{D_{r\theta}}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2 \partial \theta} \right] \quad (8.43e)$$

刚度系数为

$$D_r = \frac{E_r h^3}{12(1 - \nu_{r\theta} \nu_{\theta r})}, \quad D_\theta = \frac{E_\theta h^3}{12(1 - \nu_{r\theta} \nu_{\theta r})}, \quad D_k = \frac{G_{r\theta} h^3}{12}, \quad D_{r\theta} = D_r \nu_{\theta r} + 2D_k$$

(8.44)

在轴对称情况下, 有基本方程

$$D_r \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + 2 \frac{D_r}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{D_\theta}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{D_\theta}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q \quad (8.45a)$$

而内力

$$\begin{aligned} M_r &= -D_r \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu_{\theta r}}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right], \quad M_\theta = -D_\theta \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \nu_{r\theta} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right] \\ Q_r &= -D_r \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right] + D_\theta \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial r}, \quad M_{r\theta} = Q_\theta = 0 \end{aligned} \quad (8.45b)$$

### 三、正交异性矩形板的振动

对于正交异性板, 与基本方程 (8.37) 相应的振型方程为

$$D_x \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 D_{xy} \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} - \rho h \omega^2 W = 0 \quad (8.46a)$$

其中引入符号

$$D_{xy} = D_x \nu_{yx} + 2 D_k \quad (8.46b)$$

正交异性矩形板的固有振动的求解方法完全类同第三章各向同性板, 因此下面只列出其主要公式及结果, 有关详情可参见 § 3.2—§ 3.6。

(一) 四边简支板 (图3.2)

设振型

$$W_{mn}(x, y) = A_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (8.47a)$$

代入方程 (8.46a), 可得固有频率解

$$\omega_{mn} = \frac{\pi^2}{a^2 \sqrt{\rho h}} \sqrt{D_x m^4 + 2 D_{xy} m^2 n^2 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + D_y n^4 \left(\frac{a}{b}\right)^4} \quad (8.47b)$$

因此板的频率和各向异性刚度系数以及其和两个方向半波数及跨度比配置有关。

(二) 对边简支板 (图3.5)

若  $x=0$ ,  $a$  两边为简支边界, 则设振型

$$W_m(x, y) = Y_m(y) \sin \frac{x\pi}{a} \quad (8.48a)$$

代入方程 (8.46a), 可得方程

$$D_y Y_m'''' - 2 \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 D_{xy} Y_m'' + \left( \frac{m^4 \pi^4}{a^4} D_x - \rho h \omega^2 \right) Y_m = 0 \quad (8.48b)$$

有类同式 (3.31) 的解

$$Y_m(y) = A_m \sin \beta_{1m} y + B_m \cos \beta_{1m} y + C_m \sinh \beta_{2m} y + D_m \cosh \beta_{2m} y \quad (8.49a)$$

只是

$$\frac{\beta_{1m}}{\beta_{2m}} = \frac{m\pi}{a} \left\{ \left[ \left( \frac{D_{xy}}{D_y} \right)^2 - \left( \frac{D_x}{D_y} \right) + \frac{\omega^2 \rho h a^4}{m^4 \pi^4 D_y} \right]^{\frac{1}{2}} \mp \left( \frac{D_{xy}}{D_y} \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (8.49b)$$

由  $y=0$ ,  $b$  两边四个边界条件可得四阶齐次线代方程, 从而推出相应频率方程及振型<sup>〔118〕</sup>。

例如:

对边简支对边固定板

频率方程为

$$\frac{m^2\pi^2}{a^2}\left(\frac{D_{xy}}{D_y}\right)(\operatorname{sh}\beta_{2m}b\sin\beta_{1m}b)-\beta_{1m}\beta_{2m}(1-\operatorname{ch}\beta_{2m}b\cos\beta_{1m}b)=0 \quad (8.50a)$$

振型为

$$W_{mn}(x,y)=[(\beta_{2m}\sin\beta_{1m}y-\beta_{1m}\operatorname{sh}\beta_{2m}y)+C_{mn}(\cos\beta_{1m}y-\operatorname{ch}\beta_{2m}y)]\sin\frac{m\pi}{a}x \quad (8.50b)$$

式中 $\beta_{1m}\beta_{2m}$ 为方程(8.50a)之第 $n$ 个根, 而

$$C_{mn}=\frac{\beta_{1m}\operatorname{sh}\beta_{2m}b-\beta_{2m}\sin\beta_{1m}b}{\cos\beta_{1m}b-\operatorname{ch}\beta_{2m}b} \quad (8.50c)$$

三边简支一边固定板

频率方程为

$$\beta_{2m}\operatorname{tg}\beta_{1m}b=\beta_{1m}\operatorname{th}\beta_{2m}b \quad (8.51a)$$

振型为

$$W_{mn}(x,y)=[\operatorname{sh}\beta_{2m}b\sin\beta_{1m}y-\sin\beta_{1m}b\operatorname{sh}\beta_{2m}y]\sin\frac{m\pi}{a}x \quad (8.51b)$$

三边简支一边自由板

频率方程为

$$\beta_{2m}\left(D_y\beta_{1m}^2+\frac{m^2\pi^2}{a^2}D_x\nu_{yz}\right)\operatorname{tg}\beta_{1m}b=\beta_{1m}\left(D_y\beta_{2m}^2-\frac{m^2\pi^2}{a^2}D_x\nu_{yz}\right)\operatorname{th}\beta_{2m}b \quad (8.52a)$$

振型为

$$W_{mn}(x,y)=[\operatorname{sh}\beta_{2m}y+C_{mn}\sin\beta_{1m}y]\sin\frac{m\pi}{a}x \quad (8.52b)$$

而

$$C_{mn}=\frac{\left(D_y\beta_{2m}^2-\frac{m^2\pi^2}{a^2}D_x\nu_{yz}\right)\operatorname{sh}\beta_{2m}b}{\left(D_y\beta_{1m}^2+\frac{m^2\pi^2}{a^2}D_x\nu_{yz}\right)\sin\beta_{1m}b} \quad (8.52c)$$

### (三) 四边固定板

对于四边固定正交异性矩形板, 这里采用第七章的变分解法近似求解, 为比较起见, 所取振型函数和第七章也是一样的。将坐标原点置于板的中心, 若用 §7.2 的瑞雷法, 仍取式(7.8a)为满足位移边界条件的振型解, 代入式(7.7a), 但其中变形能取式(8.41c), 则有基频系数解

$$\lambda_1^2=\omega_1 b^2\sqrt{\frac{\rho h}{D_x}}=22.45\sqrt{\left(\frac{D_y}{D_x}\right)+0.571\left(\frac{D_{xy}}{D_x}\right)\left(\frac{b}{a}\right)^2+\left(\frac{b}{a}\right)^4} \quad (8.53)$$

与各向同性板的类似公式(7.9a)相比, 显然只差别于各方向刚度系数的不同, 因为整个计算过程是一样的。

如用 §7.3 的迦辽金法, 取式(7.8b)为满足全部边界条件的振型解, 代入式(7.18a),

各向异性矩形板频率公式 (8.56) 中系数值

表8.4

边界条件				$A_m$	$B_n$	$K_{mn}$	$L_{mn}$	$m$	$n$
$x=0$	$x=a$	$y=0$	$y=b$						
S	S	S	S	$m^4 \pi^4$	$n^4 \pi^4$	$m^2 n^2 \pi^4$		1, 2, 3, ...	1, 2, 3, ...
S	S	S	C	$m^4 \pi^4$	$\left(n + \frac{1}{4}\right)^4 \pi^4$	$m^2 \left(n + \frac{1}{4}\right)^2 \pi^4 \left[1 - \frac{1}{\left(n + \frac{1}{4}\right) \pi}\right]$		1, 2, 3, ...	1, 2, 3, ...
S	C	S	S	$\left(m + \frac{1}{4}\right)^4 \pi^4$	$n^4 \pi^4$	$\left(m + \frac{1}{4}\right)^2 n^2 \pi^4 \left[1 - \frac{1}{\left(m + \frac{1}{4}\right) \pi}\right]$		1, 2, 3, ...	1, 2, 3, ...
C	C	S	S	500.5	$n^4 \pi^4$	$12.3 n^2 \pi^4$		1	1, 2, 3, ...
				$\left(m + \frac{1}{2}\right)^4 \pi^4$	$n^4 \pi^4$	$\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 n^2 \pi^4 \left[1 - \frac{2}{\left(m + \frac{1}{2}\right) \pi}\right]$		2, 3, 4, ...	1, 2, 3, ...
S	S	C	C	$n^4 \pi^4$	500.5	$12.3 m^2 \pi^4$		1, 2, 3, ...	1
				$m^4 \pi^4$	$\left(n + \frac{1}{2}\right)^4 \pi^4$	$\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 m^2 \pi^4 \left[1 - \frac{2}{\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi}\right]$		1, 2, 3, ...	2, 3, 4, ...
S	C	S	C	$\left(m + \frac{1}{4}\right)^4 \pi^4$	$\left(n + \frac{1}{4}\right)^4 \pi^4$	$\left(m + \frac{1}{4}\right)^2 \left(n + \frac{1}{4}\right)^2 \pi^4 \left[1 - \frac{1}{\left(m + \frac{1}{4}\right) \pi}\right] \cdot \left[1 - \frac{1}{\left(n + \frac{1}{4}\right) \pi}\right]$		1, 2, 3, ...	1, 2, 3, ...
C	C	C	S	500.5	$\left(n + \frac{1}{4}\right)^4 \pi^4$	$12.3 \left(n + \frac{1}{4}\right)^2 \pi^4 \left[1 - \frac{1}{\left(n + \frac{1}{4}\right) \pi}\right]$		1	1, 2, 3, ...
				$\left(m + \frac{1}{2}\right)^4 \pi^4$	$\left(n + \frac{1}{4}\right)^4 \pi^4$	$\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \left(n + \frac{1}{4}\right)^2 \pi^4 \left[1 - \frac{2}{\left(m + \frac{1}{2}\right) \pi}\right] \cdot \left[1 - \frac{1}{\left(n + \frac{1}{4}\right) \pi}\right]$		2, 3, 4, ...	1, 2, 3, ...
S	C	C	C	$\left(m + \frac{1}{4}\right)^4 \pi^4$	500.5	$12.3 \left(m + \frac{1}{4}\right)^2 \pi^4 \left[1 - \frac{1}{\left(m + \frac{1}{4}\right) \pi}\right]$		1, 2, 3, ...	1
				$\left(m + \frac{1}{4}\right)^4 \pi^4$	$\left(n + \frac{1}{2}\right)^4 \pi^4$	$\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \left(m + \frac{1}{4}\right)^2 \pi^4 \left[1 - \frac{2}{\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi}\right] \cdot \left[1 - \frac{1}{\left(m + \frac{1}{4}\right) \pi}\right]$		1, 2, 3, ...	2, 3, 4, ...
C	C	C	C	500.5	500.5	151.3		1	1
				500.5	$\left(n + \frac{1}{2}\right)^4 \pi^4$	$12.3 \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^4 \left[1 - \frac{2}{\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi}\right]$		1	2, 3, 4, ...
				$\left(m + \frac{1}{2}\right)^4 \pi^4$	500.5	$12.3 \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^4 \left[1 - \frac{2}{\left(m + \frac{1}{2}\right) \pi}\right]$		2, 3, 4, ...	1

续上表

边界条件				$A_{mn}$	$B_{mn}$	$K_{mn}$	$L_{mn}$	$m$	$n$
$x=0$	$x=a$	$y=0$	$y=b$						
C	C	C	C	$(m+\frac{1}{2})^4 \pi^4$	$(n+\frac{1}{2})^4 \pi^4$	$(m+\frac{1}{2})^2 (n+\frac{1}{2})^2 \pi^4 [1 - \frac{2}{(m+\frac{1}{2})\pi}]$ $\cdot [1 - \frac{2}{(n+\frac{1}{2})\pi}]$		2,3,4,...	2,3,4,...
S	S	S	F	97.41	0	0	29.61	1	1
F	S	S	S	0	97.41	0	29.61	1	1
C	C	C	F	500.5	12.36	-10.56	57.17	1	1
F	C	C	C	12.36	500.5	-10.56	57.17	1	1
C	F	S	S	12.36	97.41	-8.470	45.87	1	1
S	S	C	F	97.41	12.36	-8.470	45.87	1	1
S	F	C	C	0	500.5	0	36.90	1	1
C	C	S	F	500.5	0	0	36.90	1	1

注：表中边界条件字母S表示简支，C表示固定，F表示自由。

但其中基本方程应取式 (8.37)，则有基频系数解

$$\lambda_1^2 = \omega_1 b^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D_x}} = 22.79 \sqrt{\left(\frac{D_y}{D_x}\right) + 0.667 \left(\frac{D_{xy}}{D_x}\right) \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^4} \quad (8.54)$$

与各向同性板结果式 (7.9b) 也只差刚度系数不同。这些结果虽然是近似的，但可以直接、明瞭地看出各向异性性质对板件频率的影响。而一些精确公式式 (8.49) 一式 (8.52) 却比较难以做到这一点。

#### (四) 其它边界条件板 (图3.2)

在 §3.6 中曾介绍过的梁函数组合法也可用于求解各种边界条件的正交异性矩形板的固有频率。现取一项梁函数组合的振型表达式 (3.51)，即

$$W_{mn}(x, y) = A_{mn} X_m(x) Y_n(y) \quad (8.55)$$

代入正交异性板的变分方程，可求得适用于各种边界条件正交异性矩形板各阶频率的统一解析表达式

$$\omega_{mn} = \frac{1}{b^2 \sqrt{\rho h}} \sqrt{A_{mn} D_x \left(\frac{b}{a}\right)^4 + 2 \left(\frac{b}{a}\right)^2 [K_{mn} D_{xy} + 2 L_{mn} D_x] + B_{mn} D_y} \quad (8.56)$$

其中系数  $A_{mn}$ ,  $B_{mn}$ ,  $K_{mn}$ ,  $L_{mn}$  值见表8.4。

这一公式虽然比较近似 (较精确公式可参考式(3.52b)及附录 I 建立)，但十分简便、实用，可以很清楚看出板件各向异性效应，并适用于各种边界条件、各种长宽比、各种材料常数板件的各阶频率计算。

#### 四、圆柱型各向异性圆板的振动

对于圆柱型各向异性圆板<sup>[112]</sup>，与基本方程 (8.42) 相对应的振型方程为



$$D_r \frac{\partial^4 W}{\partial r^4} + \frac{2}{r^2} D_{,r} \frac{\partial^4 W}{\partial r^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{r^4} D_{,\theta} \frac{\partial^4 W}{\partial \theta^4} + \frac{2}{r} D_r \frac{\partial^3 W}{\partial r^3} - \frac{2}{r^3} D_{,r} \frac{\partial^3 W}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} D_{,\theta} \frac{\partial^3 W}{\partial r^2} + \frac{2}{r^4} (D_{,\theta} + D_{,r,\theta}) \frac{\partial^3 W}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^3} D_{,\theta} \frac{\partial W}{\partial r} - \rho h \omega^2 W = 0 \quad (8.57a)$$

类同第四章各向同性板，设振型解为分离变量函数

$$W_m(r, \theta) = R_m(r) \cos m\theta \quad (8.58a)$$

代入方程 (8.57a)， $R_m$  不再满足贝塞尔方程，而应满足方程

$$D_r R_m'''' - \frac{2m^2}{r^2} D_{,r} R_m'' + \frac{m^4}{r^4} D_{,\theta} R_m + \frac{2}{r} D_r R_m' + \frac{2m^2}{r^3} D_{,r} R_m' - \frac{1}{r^3} D_{,\theta} R_m'' - \frac{2m^2}{r^4} (D_{,\theta} + D_{,r,\theta}) R_m + \frac{1}{r^3} D_{,\theta} R_m' - \rho h \omega^2 R_m = 0 \quad (8.57b)$$

这是四阶变系数常微分方程。按通常做法，可设其幂级数解

$$R_m(r) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i r^i \quad (8.58b)$$

代入方程 (8.57b)，由  $r^i$  系数为零，得  $a_{i+4}(a_0, a_1, a_2, a_3)$  表达式 ( $i=0, 1, 2, \dots$ )，代回式 (8.58b)，则解  $R_m(r)$  只包含四个未知系数  $a_0, a_1, a_2, a_3$ 。进一步由内外两周边的四个边界条件建立  $a_0, a_1, a_2, a_3$  所满足的四阶齐次线代方程组，从而可建立频率方程，求取固有频率与振型解<sup>[2], [183]</sup>。下面仅列出几种主要圆板结果。

**简支整圆板** 根据  $r=0$  处解有限及  $r=a$  处两个边界条件 (图4.1)

$$R_m(a) = R_m''(a) + \frac{\nu_{\theta r}}{a} R_m'(a) = 0 \quad (8.59a)$$

可得轴对称 ( $m=0$ ) 振型的频率方程

$$f_2(a) \left[ f_1'(a) + \frac{\nu_{\theta r}}{a} f_1(a) \right] - f_1(a) \left[ f_2''(a) + \frac{\nu_{\theta r}}{a} f_2'(a) \right] = 0 \quad (8.60a)$$

其中

$$f_1(r) = 1 + \left[ \frac{(\omega/\xi)^2}{8(9-k^2)} \left( \frac{r}{a} \right)^4 \right] + \left[ \frac{(\omega/\xi)^2}{8(9-k^2)} \left( \frac{r}{a} \right)^4 \right] \left[ \frac{(\omega/\xi)^2}{48(49-k^2)} \left( \frac{r}{a} \right)^4 \right] + \dots$$

$$f_2(r) = r^{1+k} \left\{ 1 + \left[ \frac{(\omega/\xi)^2}{8(2+k)(3+k)(5+k)} \left( \frac{r}{a} \right)^4 \right] + \left[ \frac{(\omega/\xi)^2}{8(2+k)(3+k)(5+k)} \right] \times \left( \frac{r}{a} \right)^4 \right\} \left[ \frac{(\omega/\xi)^2}{16(4+k)(7+k)(9+k)} \left( \frac{r}{a} \right)^4 \right] + \dots \quad (8.60b)$$

而

$$\xi^2 = D_r / \rho h a^4, \quad k^2 = D_{,\theta} / D_r \quad (8.60c)$$

根据上式计算头三阶轴对称频率系数  $\lambda_{0n}^2 = \omega_{0n}^2 a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D_r}}$  结果列于表8.5

**固定整圆板** 根据  $r=0$  处解有限及  $r=a$  处两个边界条件 (图4.1)

$$R_m(a) = R_m'(a) = 0 \quad (8.59b)$$

可得轴对称 ( $m=0$ ) 振型的频率方程

$$A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21} = 0 \quad (8.61a)$$

其中

$$A_{11} = 1 + \left[ \frac{(\omega/\xi)^2}{8(9-k^2)} \right] + \left[ \frac{(\omega/\xi)^2}{8(9-k^2)} \right] \left[ \frac{(\omega/\xi)^2}{48(49-k^2)} \right] + \dots$$

圆柱型各向异性简支圆板频率系数 $\lambda_{0i}$ 

表8.5

$k$	0.75	1.00	1.25	1.25	1.50	1.75
$\nu_{01}$	0.76	0.75	1.00	0.50	0.50	0.36
$\nu_{02}$	2.183	2.349	2.544	2.436	2.573	2.681
$\lambda_{01}$	5.315	5.495	5.703	5.643	5.813	5.963
$\lambda_{02}$	8.460	8.610	8.752	8.737	8.939	9.121

$$\begin{aligned}
 A_{22} &= 1 + \sqrt{k} + \left[ -\frac{(\omega/\xi)^2}{8(2+k)(3+k)} \right] + \left[ -\frac{(\omega/\xi)^2}{8(2+k)(3+k)} \right] \\
 &\quad \times \left[ \frac{(\omega/\xi)^2}{16(4+k)(7+k)} \right] + \dots \\
 A_{12} &= 1 + \left[ \frac{(\omega/\xi)^2}{8(2+k)(3+k)(5+k)} \right] \\
 &\quad + \left[ \frac{(\omega/\xi)^2}{8(2+k)(3+k)(5+k)} \right] \left[ \frac{(\omega/\xi)^2}{16(4+k)(7+k)(9+k)} \right] + \dots \\
 A_{21} &= \left[ \frac{(\omega/\xi)^2}{2(9-k^2)} \right] + \left[ \frac{(\omega/\xi)^2}{2(9-k^2)} \right] \left[ \frac{(\omega/\xi)^2}{24(49-k^2)} \right] + \dots \quad (8.61b)
 \end{aligned}$$

而 $\xi^2$ ,  $k^2$ 见式(8.60c)。

如果式(8.60b)中保留到 $(\omega/\xi)^2$ 项, 进行计算, 可得头两阶频率近似公式

$$\omega_{01} = \sqrt{\frac{D_r}{\rho h a^4}} \sqrt{\frac{24(3+k)}{(5+k)} \left[ (4+k)(7+k) \mp \sqrt{\frac{(4+k)(7+k)(64+19k+k^2)}{3}} \right]} \quad (8.61c)$$

### § 8.3 厚板的振动

以前所有章节讨论的平板振动问题均基于第二章§2.1的基本假定, 其中主要包括忽略垂直剪切变形、挤压变形及转动惯量的假定。基于这三个假定下建立起来的平板理论通称薄板理论, 是平板分析的一种经典理论。

从以前的分析中知道, 薄板中实际是存在着产生剪变形的垂直剪应力, 产生挤压变形的法应力以及微段转动的惯性力矩的, 但在厚跨比较小(即薄板)情况下, 忽略这些因素所带来的误差不大。但当板件厚跨比较大时, 这三个因素必须加以考虑, 从而建立起的相应平板理论称为厚板理论。

这一问题研究可以追溯到十九世纪, 当时瑞雷在其名著“声的理论”<sup>[214]</sup>一书中已经指出了转动惯量对结构振动的影响。铁摩辛柯<sup>[250]</sup>于1921年在梁的问题中指出了剪变形对振动的效应。至于厚板问题, 首先由雷斯纳(Reissner)<sup>[224]</sup>提出了静力方程, 而米德林(Mindlin)完成了比较系统的厚板振动问题研究<sup>[179-181]</sup>。厚板理论实质上是抛弃了薄板理论的三个主要假定, 但它本身又是三维理论的一种简化, 因此对如何计入剪变形、挤压变形等效应又需作一些新的假定。这些假定主要是对板内位移、应变、应力沿厚度分布给予这种或那种限制, 只不过这些假定与限制比薄板理论要放松些, 因而比薄板理论要精确。由于采用这些新的假定的方法与内容不同, 又形成了各种不同的厚板理论, 它们的基本方程形式上有很大

差别, 主要有汉盖(Hencky)<sup>[104]</sup>、雷斯纳<sup>[224]</sup>、克劳姆(Klomm)<sup>[145]</sup>、帕克(Panc)<sup>[203]</sup>、符拉索夫(Власов)<sup>[280]</sup>、唐纳尔(Donnell)<sup>[68]</sup>等理论, 详情可参见[332]。不过这些理论均属于薄板理论的修正理论, 仍是二维理论(变量是中面二维坐标函数), 一般统称“中厚板”理论。另一种是基于三维弹性理论来研究平板振动问题<sup>[242]</sup>, 又称为“强厚板”理论。

厚板理论主要是计入剪变形效应。由于剪变形影响, 原直法线在变形后的位置不再与中面挠曲面发生固定关系, 因而需引进一些新的独立变量, 使其基本方程复杂化了。厚板理论中将原薄板理论的唯一未知函数  $w(x, y, t)$  变为三个独立变量, 因此基本方程由原来单独的四阶偏微分方程变为总阶数为六阶的三元联立偏微分方程组, 从而每边可以满足三个边界条件, 因此可以克服薄板理论只能每边满足二个边界条件, 不得不采用折合剪力边界的不足。

厚板理论是一种平板的非经典理论, 它不只是可用于厚跨比较大的厚板结构中, 而且还可应用于剪变形、挤压变形、转动惯量效应显著的其它情况, 例如高频振动, 点载荷、点支承、边缘效应问题, 厚径比较大的微孔板以及各种组合、复合板件等<sup>[339]</sup>。对于上述问题只需考虑具体结构与载荷, 而均可引用本节所述的厚板基本方程。

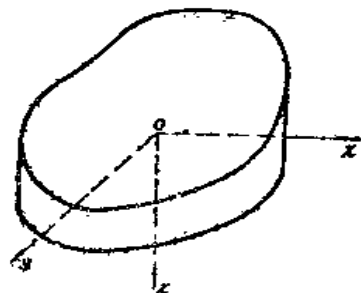


图 8.3

下面将介绍一种中厚板动力问题的一般性理论<sup>[350]</sup>。

### 一、厚板振动的基本方程

考虑一各向同性匀质等厚度的厚板, 如图8.3所示,  $xoy$ 为其中面。这里将从三维弹性动力学基本方程出发, 采用“截面变形几何相似”一般性假定, 推导厚板的基本方程。

我们采用下列二个假定:

假定一 水平位移偏离直法线部分沿各截面几何相似(面不要求是线性分布), 即

$$u = -\frac{\partial w}{\partial x}z + \psi_x(x, y, t)f(z) \quad (8.62a)$$

$$v = -\frac{\partial w}{\partial y}z + \psi_y(x, y, t)f(z) \quad (8.62b)$$

式中第一部份是原薄板理论假定的水平位移分量; 第二部份是由于剪变形引起的, 而可分离变量为  $\psi$  与  $f$  两部份;  $\psi_x, \psi_y$  为广义剪切角, 而沿厚度分布  $f(z)$  在板面各处均相似。但这种  $f(z)$  分布并不作人为假定, 这是这种一般性理论不同于其它厚板理论的一个特点。

将式(8.62)代入三维几何方程(1.1e), (1.1d), 得垂直剪应变

$$\gamma_{xz} = \psi_x f'(z), \quad \gamma_{yz} = \psi_y f'(z) \quad (8.63)$$

再代入三维物理方程(1.5d), 得垂直剪应力

$$G\psi_x f'(z) = \tau_{xz}(x, y, z, t) = Q_x(x, y, t)T(z) \quad (8.64a)$$

$$G\psi_y f'(z) = \tau_{yz}(x, y, z, t) = Q_y(x, y, t)T(z) \quad (8.64b)$$

式中

$$Q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz, \quad Q_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yz} dz \quad (8.65)$$

为截面垂直剪力, 故应满足

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} T(z) dz = 1 \quad (8.66)$$

积分式 (8.64) 有

$$f(z) = \frac{Q_x}{G\psi_x} P(z) = \frac{Q_y}{G\psi_y} P(z) \quad (8.67a)$$

其中

$$P(z) = \int_0^z T(z_1) dz_1 \quad (8.67b)$$

为偏离位移分布函数。由式 (8.66) 可知其应满足

$$P\left(\frac{h}{2}\right) - P\left(-\frac{h}{2}\right) = 1 \quad (8.67c)$$

假定二 影响弯曲应力的挤压变形沿各截面几何相似 (而不要求是三次曲线分布), 即由三维物理方程 (1.3a), (1.3b) 有

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[ (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) + \frac{\nu(1+\nu)}{E} \sigma_z \right] \\ &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[ (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) + \frac{\nu(1+\nu)}{E} q(x, y, t) B(z) \right] \end{aligned} \quad (8.68a)$$

$$\begin{aligned} \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[ (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) + \frac{\nu(1+\nu)}{E} \sigma_z \right] \\ &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[ (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) + \frac{\nu(1+\nu)}{E} q(x, y, t) B(z) \right] \end{aligned} \quad (8.68b)$$

式中第一部分是原薄板理论的弯曲应力分量, 第二部分是源于挤压变形引起的, 而可分离变量为  $q$  与  $B$  两部分:  $q$  为表面横向外载,  $B(z)$  为挤压变形分布函数, 在板面各处均相似。但这种  $B(z)$  分布并不作人为假定, 这是这种一般性理论不同于其它厚板理论的另一个特点。根据表面边界条件,  $B(z)$  应满足

$$B\left(-\frac{h}{2}\right) = -1, \quad B\left(\frac{h}{2}\right) = 0 \quad (8.69)$$

有了上述基本假定后, 进一步推导就类同 §2.1 的薄板方程建立过程。将式 (8.67a) 代入式 (8.62a), 求得水平位移分量

$$u = -\frac{\partial w}{\partial x} z + \frac{Q_x}{G} P(z) \quad (8.70a)$$

$$v = -\frac{\partial w}{\partial y} z + \frac{Q_y}{G} P(z) \quad (8.70b)$$

再代入三维几何方程另两个表达式 (1.1a), (1.1b), (1.1f), 得应变分量

$$\varepsilon_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z + \frac{\partial Q_x}{G \partial x} P(z) \quad (8.71a)$$

$$\varepsilon_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} z + \frac{\partial Q_y}{G \partial y} P(z) \quad (8.71b)$$

$$\gamma_{xy} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z + \left( \frac{\partial Q_x}{G \partial y} + \frac{\partial Q_y}{G \partial x} \right) P(z) \quad (8.71c)$$

再代入式 (8.68) 及物理方程 (1.5d) 得应力分量

$$\sigma_x = -\frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) z + \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial Q_x}{G \partial x} + \nu \frac{\partial Q_y}{G \partial y} \right) P(z)$$

$$+ \frac{\nu}{1-\nu} q B(z) \quad (8.72a)$$

$$\sigma_y = -\frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) z + \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial Q_y}{G \partial y} + \nu \frac{\partial Q_x}{G \partial x} \right) P(z) + \frac{\nu}{1-\nu} q B(z) \quad (8.72b)$$

$$\tau_{xy} = -2G \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z + \left( \frac{\partial Q_x}{\partial y} + \frac{\partial Q_y}{\partial x} \right) P(z) \quad (8.72c)$$

显然上述各分量中第一部分为薄板理论部分，含  $P(z)$  项由剪变形引起，含  $B(z)$  项由挤压变形引起。进一步沿厚度积分应力得内力分量

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz = D \left[ \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \right) + \frac{k_o}{c h} q \right] \quad (8.73a)$$

$$M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z dz = D \left[ \left( \frac{\partial \beta_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \right) + \frac{k_o}{c h} q \right] \quad (8.73b)$$

$$M_{xy} = \frac{1-\nu}{2} D \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) \quad (8.73c)$$

式中引入广义转角

$$\beta_x = -\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{k_r Q_x}{G h}, \quad \beta_y = -\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{k_r Q_y}{G h} \quad (8.74)$$

式中第一部分为薄板理论的直法线转角，第二部分是与平均剪切角  $\left(\frac{Q_x}{G h}\right)$ 、 $\left(\frac{Q_y}{G h}\right)$  有关的广义剪切角，其中折合系数从这里可推出为

$$k_r = \frac{12}{h^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} P(z) z dz \quad (8.75a)$$

许多厚板理论认为  $\beta_x$  是原直法线在中面的转角，而人为地规定中面处剪切角与截面平均剪切角间折合系数  $k_r$  值为 1， $\frac{6}{5}$ ， $\frac{12}{\pi^2}$  等。这里  $\beta_x$ 、 $\beta_y$  及  $k_r$  具有更严格的一般性意义。这是这种一般性理论不同于其它厚板理论的第三个特点。

内力表达式 (8.73) 中第一部分为薄板理论的弯曲内力分量；第二部分由挤压变形引起，它与平均附加弯矩  $\left(\frac{D q}{c h}\right)$  有关，其中折合系数从这里可推出为

$$k_o = \frac{12}{h^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} B(z) z dz \quad (8.75b)$$

而

$$c = \frac{E}{\nu(1+\nu)} \quad (8.75c)$$

为挤压模量。许多计入挤压变形的厚板理论人为地规定  $k_o$  值为 1， $\frac{6}{5}$  等。这里  $k_o$  具有更严格的一般性意义。这是这种一般性理论不同于其它厚板理论的第四个特点。

将三维动平衡方程 (1.7) 沿厚度积分，并注意到式 (8.74)，(8.75)，有内力动平衡方程

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (8.76a)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = \rho J \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial t^2} \quad (8.76b)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = \rho J \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial t^2} \quad (8.76c)$$

式 (8.76b) (8.76c) 中右端即为惯性力矩项。将内力表达式 (8.73), (8.74) 代入方程 (8.76), 可得厚板理论的基本动力方程

$$\frac{Gh}{k_s} \left( \nabla^2 w + \frac{\partial \beta_x}{\partial x} + \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \right) - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q = 0 \quad (8.77a)$$

$$D \left( \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial x \partial y} + \frac{k_s}{ch} \frac{\partial q}{\partial x} \right) - \frac{Gh}{k_s} \left( \beta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \rho J \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial t^2} = 0 \quad (8.77b)$$

$$D \left( \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial x \partial y} + \frac{k_s}{ch} \frac{\partial q}{\partial y} \right) - \frac{Gh}{k_s} \left( \beta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \rho J \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial t^2} = 0 \quad (8.77c)$$

式中含有三个未知变量:  $w, \beta_x, \beta_y$ , 由上述三个方程求解。再利用上述各式可求取各内力、应力、应变、位移分量。

也可在上述三个方程中消去未知数  $\beta_x, \beta_y$ , 求得<sup>[83]</sup>关于  $w$  的独立方程

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 w - \left( \frac{k_s \rho h}{Gh} + \frac{\rho J}{D} \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 w + \frac{k_s \rho h}{Gh} \times \frac{\rho J}{D} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ = \frac{q}{D} + \frac{k_s}{Gh} \left( \frac{\rho J}{D} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \nabla^2 q \right) + \frac{k_s}{ch} \nabla^2 q \end{aligned} \quad (8.78)$$

如果我们不考虑剪变形、挤压变形、转动惯量, 即取  $G \rightarrow \infty, C \rightarrow \infty, \rho J \rightarrow 0$ , 则方程 (8.78) 回复到熟悉的薄板理论基本动力方程

$$D \nabla^2 \nabla^2 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q \quad (8.79)$$

方程 (8.78) 是一种比较完整反映三种厚板效应的基本方程形式, 从中可以清晰看到厚板理论与薄板理论间的区别与联系。这里也顺便指出, 有些厚板理论只计入三种厚板效应中一、二种,  $k_s, k_c$  取值也不同。读者可以通过上述一般性理论公式来建立其它厚板理论的相应方程。

基本方程 (8.77) 总的阶次为六阶, 可以每边满足三个边界条件, 一般有

$$\beta_n = \bar{\beta}_n \text{ 或 } M_n = \bar{M}_n \quad (8.80a)$$

$$\beta_s = \bar{\beta}_s \text{ 或 } M_{ns} = \bar{M}_{ns} \quad (8.80b)$$

$$w = \bar{w} \text{ 或 } Q_n = \bar{Q}_n \quad (8.80c)$$

具体的边界条件有

$$\text{第一类简支: } w = M_n = \beta_s = 0 \quad (8.81a)$$

$$\text{第二类简支: } w = M_n = M_{ns} = 0 \quad (8.81b)$$

$$\text{第三类简支: } w = \beta_n = M_{ns} = 0 \quad (8.81c)$$

$$\text{固定: } w = \beta_n = \beta_s = 0 \quad (8.81d)$$

自由:

$$Q_x = M_x = M_{xy} = 0 \quad (8.81e)$$

从上式可以看到, 自由边界可以精确满足三个边界内力分量为零, 由于三个边界条件的不同组合, 简支边界也有三种。这些都是由于引入直法线假定的薄板理论所不能达到的。

厚板的变分方程具有第二章薄板同样的形式, 即式 (2.16), 但其中变形能必须计入剪切变形能 (一般忽略挤压变形能) 为

$$U = \frac{D}{2} \iint \left[ \left( -\frac{\partial \beta_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \right)^2 + 2\nu \left( -\frac{\partial \beta_x}{\partial x} \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \right) + \frac{1-\nu}{2} \left( -\frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right)^2 \right] ds \\ + \frac{Gh}{2k_r} \iint \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \beta_x \right)^2 + \left( -\frac{\partial w}{\partial y} + \beta_y \right)^2 \right] ds \quad (8.82a)$$

动能必须计入转动动能为

$$T = \frac{\rho h}{2} \iint \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 ds + \frac{\rho J}{2} \iint \left[ \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \beta_y}{\partial t} \right)^2 \right] ds \quad (8.82b)$$

可以看出, 式 (8.82a) 的第二项为剪切变形能; 式 (8.82b) 的第二项为转动动能。如果忽略这两项, 并注意到薄板的转角公式, 式 (8.82) 即转化为薄板理论的变形能与动能结果。

## 二、单向厚板

和 §3.1 单向薄板一样, 单向厚板 (图3.1) 的基本方程相当于上述方程中  $\beta_x = M_x = M_{xy} = Q_x = 0$ , 而且任何量对  $x$  的偏导数为零, 则由式 (8.78) 及式 (8.77a), (8.77b) 得方程

$$w'''' - \left( \frac{k_r \rho h}{Gh} + \frac{\rho J}{D} \right) \ddot{w}'' + \frac{k_r \rho h}{Gh} \times \frac{\rho J}{D} \dot{w} + \frac{\rho h}{D} \ddot{w} = \frac{q}{D} + \frac{k_r}{Gh} \left( \frac{\rho J}{D} \ddot{q} - q' \right) \quad (8.83a)$$

$$\frac{Gh}{k_r} (w'' + \beta_y') - \rho h \ddot{w} + q = 0 \quad (8.84a)$$

$$D\beta_y'' - \frac{Gh}{k_r} (\beta_y + w') - \rho J \ddot{\beta}_y = 0 \quad (8.84b)$$

式中, 上角撇 (') 为对空间坐标  $y$  的偏导数, 字顶的圆点 (•) 为对时间坐标  $t$  的偏导数。将式 (8.84a) 求对  $y$  的一次偏导数, 代入式 (8.84) 得方程

$$\frac{Gh}{k_r} \beta_y + \rho J \ddot{\beta}_y = \frac{k_r \rho h}{Gh} D \ddot{w}' - D w'' - \frac{Gh}{k_r} w' - \frac{k_r D}{Gh} q' \quad (8.83b)$$

单向厚板基本方程 (8.83a), (8.83b) 相应的振型方程为  $w, \beta_y$  的振型  $W(y), \Phi(y)$  所满足的方程:

$$W'''' + \left( \frac{k_r \rho h}{Gh} + \frac{\rho J}{D} \right) \omega^2 W'' + \frac{k_r \rho h}{Gh} \times \frac{\rho J}{D} \omega^4 W - \frac{\rho h}{D} \omega^2 W = 0 \quad (8.85a)$$

$$\left( \frac{\rho J}{D} \omega^2 - \frac{Gh}{k_r D} \right) \Phi = W'' + \frac{k_r \rho h}{Gh} \omega^2 W' + \frac{Gh}{k_r D} W' \quad (8.85b)$$

方程 (8.85a) 是一关于  $W$  的常系数常微分方程, 有一般解

$$W(y) = A \cosh \alpha_1 y + B \sinh \alpha_1 y + C \cos \alpha_0 y + D \sin \alpha_0 y \quad (8.86a)$$

若

$$\alpha_1 = \frac{\omega}{\sqrt{2}} \sqrt{\mp \left( \frac{k_r \rho h}{Gh} + \frac{\rho J}{D} \right) + \sqrt{\left( \frac{k_r \rho h}{Gh} - \frac{\rho J}{D} \right)^2 + \left( \frac{4\rho h}{\omega^2 D} \right)}} \quad (8.86b)$$

为两个正实根。由式 (8.85b) 可简单求取  $\Phi(y)$ 。振型  $W(y)$ ,  $\Phi(y)$  解中包含四个待定系数, 由单向厚板两边的每边两个边界确定为四阶线性方程组, 由系数行列式为零求取频率方程及相应频率与振型。对于六种简单边界条件的单向厚板振型函数及频率方程列于附录 II。

### 三、矩形厚板

对于四边均为第一类简支的矩形板 (图 3.2), 可设满足全部边界条件的  $w, \beta_x, \beta_y$  的振型解

$$W(x, y) = A_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (8.87a)$$

$$\bar{\Psi}_x(x, y) = B_{mn} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (8.87b)$$

$$\bar{\Psi}_y(x, y) = C_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \quad (8.87c)$$

代入基本方程 (8.77) 相应的振型方程, 得关于  $A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}$  的齐次线性方程组, 由系数行列式为零给出频率方程:

$$\begin{vmatrix} \frac{Gh}{k_s} \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] - \rho h \omega^2 & \frac{Gh}{k_s} \left( \frac{m\pi}{a} \right) & \frac{Gh}{k_s} \left( \frac{n\pi}{b} \right) \\ \frac{Gh}{k_s} \left( \frac{m\pi}{a} \right) & D \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] + \frac{Gh}{k_s} - \rho J \omega^2 & D \frac{1+\nu}{2} \left( \frac{m\pi}{a} \right) \left( \frac{n\pi}{b} \right) \\ \frac{Gh}{k_s} \left( \frac{n\pi}{b} \right) & D \frac{1+\nu}{2} \left( \frac{m\pi}{a} \right) \left( \frac{n\pi}{b} \right) & D \left[ \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 + \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \right] + \frac{Gh}{k_s} - \rho J \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (8.88)$$

这是关于  $\omega^2$  的三次代数方程。对于同一  $(m, n)$ , 厚板有一组三个频率  $\omega_{mn}^{(p)}$  ( $p=1, 2, 3$ ), 其中低频与薄板结果相对应, 相应于  $W$  较大; 另两个频率为厚板所特有, 相应于  $\bar{\Psi}_x, \bar{\Psi}_y$  较大。对于低频  $\omega_{mn}^{(1)}$  的近似计算, 可以忽略式 (8.88) 中  $\omega^6, \omega^4$  项以及剪变形、转动惯量效应的高阶项, 有四边简支矩形厚板低频的简化公式:

$$\omega_{mn}^{(1)} \approx \bar{\omega}_{mn} \left[ 1 + (I_G + I_\rho) \pi^2 \left( m^2 \frac{b^2}{a^2} + n^2 \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (8.89a)$$

式中

薄板频率

$$\bar{\omega}_{mn} = \sqrt{\frac{D}{\rho h} \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]} \quad (8.89b)$$

相对剪切刚度

$$I_G = \frac{k_s D}{G h b^2} \quad (8.89c)$$

相对转动惯量

$$I_\rho = \frac{\rho J}{\rho h b^2} \quad (8.89d)$$

从式 (8.89) 可以看出, 厚板的频率比同阶薄板频率低, 这主要由于附加剪变形降低刚



度及附加转动惯量增加质量效应结果, 而变化程度主要取决于相对剪切刚度  $I_c$  及相对转动惯量  $I_0$ 。对于匀质板, 这两个量均与  $\left(\frac{h}{b}\right)^2$  成正比, 因此厚跨比越大, 厚板效应 (剪变形、转动惯量等) 越显著。另外, 从式 (8.89a) 还可以看出, 阶次越高, 即  $(m, n)$  越大, 也就是高阶频率, 厚板效应也越显著。在 § 8.4 还要说明, 对于大多数组合与复合板件, 厚板效应也十分明显, 虽然这些板件的厚跨比不一定很大。

对于其它边界条件的矩形厚板均可采用单向厚板振型函数的组合, 利用里兹法原理求解。其一般过程是这样的。设满足位移边界条件的振型函数解

$$W(x, y) = \sum_{m=1}^p \sum_{n=1}^q A_{mn} W_m(x) W_n(y) \quad (8.90a)$$

$$\bar{\Psi}_x(x, y) = \sum_{m=1}^p \sum_{n=1}^q B_{mn} \Phi_m(x) W_n(y) \quad (8.90b)$$

$$\bar{\Psi}_y(x, y) = \sum_{m=1}^p \sum_{n=1}^q C_{mn} W_m(x) \Phi_n(y) \quad (8.90c)$$

式中  $W_m(x)$ ,  $W_n(y)$  及  $\Phi_m(x)$ ,  $\Phi_n(y)$  为与  $x$ ,  $y$  向边界条件相应的单向厚板振型函数 (附录 II)。代入第六章的振型变分方程, 但其中变形能、动能按式 (8.82) 计算。用 § 7.2 里兹法过程, 求得关于  $A_{mn}$ ,  $B_{mn}$ ,  $C_{mn}$  的联立线代方程组, 从而求取频率方程、固有频率及振型。作为近似, 可以在式 (8.90) 中均取一项, 给出类似式 (8.88) 的  $\omega^2$  之三次代数方程。对于各种边界条件的矩形厚板数值结果可参见 [332], 其数值解法可参见 [286], [353]。

#### 四、圆 厚 板

对基本方程 (8.77) 相应的振型方程作如下变换: (178)

$$W = W_1 + W_2 \quad (8.91a)$$

$$\Psi_x = (\sigma_1 - 1) \frac{\partial W_1}{\partial x} + (\sigma_2 - 1) \frac{\partial W_2}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} \quad (8.91b)$$

$$\Psi_y = (\sigma_1 - 1) \frac{\partial W_1}{\partial y} + (\sigma_2 - 1) \frac{\partial W_2}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial x} \quad (8.91c)$$

得方程

$$\nabla^2 W_1 + \delta_1^2 W_1 = 0 \quad (8.92a)$$

$$\nabla^2 W_2 + \delta_2^2 W_2 = 0 \quad (8.92b)$$

$$\nabla^2 H + \delta_H^2 H = 0 \quad (8.92c)$$

其中

$$\delta_1^2 = \frac{1}{2} \delta_0^4 \{ (R + S) + [(R - S)^2 + 4\delta_0^{-4}]^{\frac{1}{2}} \} \quad (8.93a)$$

$$\delta_2^2 = \frac{1}{2} \delta_0^4 \{ (R + S) - [(R - S)^2 + 4\delta_0^{-4}]^{\frac{1}{2}} \} \quad (8.93b)$$

$$\delta_H^2 = \frac{2(R\delta_0^4 - S^{-1})}{1 - \nu} \quad (8.93c)$$

$$\sigma_1 = \delta_1^2 (R\delta_0^4 - S^{-1})^{-1} \quad (8.93d)$$

$$\sigma_2 = \delta_2^2 (R\delta_0^4 - S^{-1})^{-1} \quad (8.93e)$$

$$R = \frac{\rho J}{\rho h}, \quad S = -\frac{k_r D}{G h}, \quad \delta_0^4 = \frac{\rho h}{D} \omega^2 \quad (8.93f)$$

对于极坐标系, 基本振型方程 (8.92) 变为

$$\frac{\partial^2 W_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W_1}{\partial \theta^2} + \delta_1^2 W_1 = 0 \quad (8.94a)$$

$$\frac{\partial^2 W_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W_2}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W_2}{\partial \theta^2} + \delta_2^2 W_2 = 0 \quad (8.94b)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2} + \delta_H^2 H = 0 \quad (8.94c)$$

而按式 (8.91) 振型为

$$W = W_1 + W_2 \quad (8.95a)$$

$$\Psi_r = (\sigma_1 - 1) \frac{\partial W_1}{\partial r} + (\sigma_2 - 1) \frac{\partial W_2}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial \theta} \quad (8.95b)$$

$$\Psi_\theta = (\sigma_1 - 1) \frac{1}{r} \frac{\partial W_1}{\partial \theta} + (\sigma_2 - 1) \frac{1}{r} \frac{\partial W_2}{\partial \theta} - \frac{\partial H}{\partial r} \quad (8.95c)$$

设方程 (8.94) 的分离变量解

$$W_i(r, \theta) = W_i(r) W_i(\theta) \quad (i = 1, 2) \quad (8.96a)$$

$$H(r, \theta) = H(r) H(\theta) \quad (8.96b)$$

代入可得各独立方程

$$\frac{d^2 W_i(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dW_i(r)}{dr} + \left( \delta_i^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) W_i(r) = 0 \quad (8.97a)$$

$$\frac{d^2 W_i(\theta)}{d\theta^2} + m^2 W_i(\theta) = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (8.98a)$$

$$\frac{d^2 H(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dH(r)}{dr} + \left( \delta_H^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) H(r) = 0 \quad (8.97b)$$

$$\frac{d^2 H(\theta)}{d\theta^2} + m^2 H(\theta) = 0 \quad (8.98b)$$

式 (8.97) 是贝塞尔方程, 式 (8.98) 是二阶常系数常微分方程, 故  $W_i$  及  $H$  的一般解有

$$W_{im}(r, \theta) = [A_i^{(m)} J_m(\delta_i, r) + B_i^{(m)} Y_m(\delta_i, r)] \cos m\theta \quad (i = 1, 2) \quad (8.99a)$$

$$H_m(r, \theta) = [A_H^{(m)} J_m(\delta_H, r) + B_H^{(m)} Y_m(\delta_H, r)] \sin m\theta \quad (8.99b)$$

式中  $J_m, Y_m$  分别为第一、二类贝塞尔函数, 而六个待定系数  $A_i^{(m)}, B_i^{(m)} (i = 1, 2), A_H^{(m)}, B_H^{(m)}$  由二个周边共六个边界条件确定。

对于整圆厚板<sup>[325]</sup>, 考虑到  $r = 0$  处有限, 有  $B_1^{(m)} = B_2^{(m)} = B_H^{(m)} = 0$ , 则由外周边三个边界条件确定齐次线性方程组, 建立相应频率方程, 其一般形式有

$$\begin{vmatrix} D_{11}^{(m)} & D_{12}^{(m)} & D_{13}^{(m)} \\ D_{21}^{(m)} & D_{22}^{(m)} & D_{23}^{(m)} \\ D_{31}^{(m)} & D_{32}^{(m)} & D_{33}^{(m)} \end{vmatrix} = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (8.100)$$

其中  $D_{ij}^{(m)} (i, j = 1, 2, 3)$  对于不同边界条件圆厚板有

简支 (第一类) 圆厚板

$$D_{11}^{(m)} = J_m(\delta_1, a), \quad D_{12}^{(m)} = J_m(\delta_2, a), \quad D_{13}^{(m)} = 0$$

$$\begin{aligned}
D_{21}^{(m)} &= (\sigma_1 - 1) \left[ J_m''(\delta_1, a) + \frac{\nu}{a} J_m'(\delta_1, a) - \nu \frac{m^2}{a^2} J_m(\delta_1, a) \right] \\
D_{22}^{(m)} &= (\sigma_2 - 1) \left[ J_m''(\delta_2, a) + \frac{\nu}{a} J_m'(\delta_2, a) - \nu \frac{m^2}{a^2} J_m(\delta_2, a) \right] \\
D_{23}^{(m)} &= (1 - \nu) \left[ \frac{m}{a} J_m'(\delta_H, a) - \frac{m}{a^2} J_m(\delta_H, a) \right] \\
D_{31}^{(m)} &= (\sigma_1 - 1) \frac{m}{a} J_m(\delta_1, a) \\
D_{32}^{(m)} &= (\sigma_2 - 1) \frac{m}{a} J_m(\delta_2, a) \\
D_{33}^{(m)} &= J_m(\delta_H, a)
\end{aligned} \tag{8.101a}$$

固定圆板

$$\begin{aligned}
D_{11}^{(m)} &= J_m(\delta_1, a), \quad D_{12}^{(m)} = J_m(\delta_2, a), \quad D_{13}^{(m)} = 0 \\
D_{21}^{(m)} &= (\sigma_1 - 1) J_m'(\delta_1, a), \quad D_{22}^{(m)} = (\sigma_2 - 1) J_m'(\delta_2, a), \quad D_{23}^{(m)} = \frac{m}{a} J_m(\delta_H, a) \\
D_{31}^{(m)} &= (\sigma_1 - 1) \frac{m}{a} J_m(\delta_1, a), \quad D_{32}^{(m)} = (\sigma_2 - 1) \frac{m}{a} J_m(\delta_2, a), \\
D_{33}^{(m)} &= J_m'(\delta_H, a)
\end{aligned} \tag{8.101b}$$

自由圆厚板

$$\begin{aligned}
D_{11}^{(m)} &= (\sigma_1 - 1) \left[ J_m''(\delta_1, a) + \frac{\nu}{a} J_m'(\delta_1, a) - \nu \frac{m^2}{a^2} J_m(\delta_1, a) \right] \\
D_{12}^{(m)} &= (\sigma_2 - 1) \left[ J_m''(\delta_2, a) + \frac{\nu}{a} J_m'(\delta_2, a) - \nu \frac{m^2}{a^2} J_m(\delta_2, a) \right] \\
D_{13}^{(m)} &= (1 - \nu) \left[ \frac{m}{a} J_m'(\delta_H, a) - \frac{m}{a^2} J_m(\delta_H, a) \right] \\
D_{21}^{(m)} &= (\sigma_1 - 1) \left[ -\frac{m}{a} J_m'(\delta_1, a) + \frac{m}{a^2} J_m(\delta_1, a) \right] \\
D_{22}^{(m)} &= (\sigma_2 - 1) \left[ -\frac{m}{a} J_m'(\delta_2, a) + \frac{m}{a^2} J_m(\delta_2, a) \right] \\
D_{23}^{(m)} &= -\frac{1}{2} J_m''(\delta_H, a) + \frac{1}{2a} J_m'(\delta_H, a) - \frac{m^2}{2a^2} J_m(\delta_H, a) \\
D_{31}^{(m)} &= \sigma_1 J_m'(\delta_1, a), \quad D_{32}^{(m)} = \sigma_2 J_m'(\delta_2, a), \quad D_{33}^{(m)} = \frac{m}{a} J_m(\delta_H, a)
\end{aligned} \tag{8.101c}$$

对于圆环厚板，利用解 (8.99) 及内外周边六个边界条件可确立六阶齐次线代方程组以及类似式 (8.100) 的用六阶行列式表达的频率方程，求取相应的固有频率与振型。表 8.6 给出厚径比  $\frac{h}{a} = 0.2$  的九种简单边界条件圆环厚板的基频系数<sup>〔21〕</sup>  $\lambda_1^2 = \omega_1 a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}}$ ，其中简支是指第一类简支。

圆环厚板基频系数  $\lambda_1$  ( $\frac{h}{a} = 0.2, \nu = 0.3$ )

表8.6

边 界 条 件		内 外 径 之 比			
外 边 界	内 边 界	0.1	0.3	0.5	0.7
固 定	固 定	4.711	6.306	9.344	15.42
固 定	简 支	3.637	5.733	7.644	12.89
固 定	自 由	2.876	2.683	2.958	6.462
简 支	固 定	4.002	4.819	7.517	12.70
简 支	简 支	3.552	3.569	6.109	9.716
简 支	自 由	2.130	1.534	2.184	2.151
自 由	固 定	2.029	2.543	3.151	4.819
自 由	简 支	1.824	1.833	1.976	2.276
自 由	自 由	2.203	2.075	1.775	1.372

## § 8.4 组合与复合板的振动

本节将讨论非匀质板件振动问题。组合与复合板件是两类最常见的非匀质板件<sup>[706] [256] [284] [810] [341]</sup>。凡由于构造上原因形成非匀质，一般称为组合板件；凡由于材料上原因形成非匀质，一般称为复合板件。它们虽然组成上差别甚大，但力学分析方法是同样的<sup>[336]</sup>，故集中在一节加以讨论。

组合板件是由多个杆、梁、轴、肋、墙、板组成，而起整体承弯板件作用的结构，包括各种空间桁架、框架、剪力墙结构，加肋板，槽形板，波纹板，网格板，箱式板，管式板，充气板，与平板网架等。

复合板件是由不同材料层沿厚度层叠而成，起整体承弯板件作用的结构，包括夹层板、层叠板、复合材料板等几类。夹层板由强而硬的薄表板和轻而柔的厚心层组成，包括蜂窝、波纹、双曲抛物面、轻质心层等多种构造；层叠板则由多个同形状、不同材料性质的匀质薄板沿厚度叠合而成；复合材料板的组成层是由高强度骨架材料与低模量基体材料结合而成的复合材料层。

与一般匀质薄板相比，组合与复合板件在振动分析上有五个特点：非匀质、各向异性、剪变形效应、转动惯量效应及拉-弯耦合现象。上述各点对不同类型组合与复合板件影响程度也不一样。一般来说，非匀质与各向异性为各组合与复合材料所共有；对于主要刚度材料位于板件两侧面以及由抗弯刚度很高材料承弯、抗剪刚度很低材料承剪的板件，则必须计入剪变形与转动惯量效应<sup>[330]</sup>；至于弯-拉耦合效应主要发生在沿厚度材料非对称成层的板件<sup>[228] [281]</sup>。

由于不同组合与复合板件所需要考虑的因素不一样，其振动分析理论也是多种多样的。总的可归纳为：等效经典理论，等效非经典理论以及耦合理论。下而将分别加以叙述。

### 一、组合与复合板件的等效经典理论

这一理论忽略剪变形与转动惯量效应，不考虑耦合效应，只是在一般薄板（经典）理论

基础上计入板件各向异性特性,而沿厚度非匀质特性则用截面组合刚度、质量系数加以反映。这种理论比较简单,便于工程实用,对于某些类型的组合与复合板件或工程上实用分析还是合适的。

等效经典理论将组合与复合板件看成为等效匀质各向异性薄板进行分析,所有基本方程及其解法可参见 § 8.2。因此应用 § 8.2 结果来分析实际组合与复合板件主要工作是建立截面等效组合(刚度、质量)系数。

组合系数的原则性公式在 § 8.2 由应力积分为内力过程中已经给出:

对于对称异性板为

$$D_{11} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} e_{11}(z) z^2 dz, \quad \rho h = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) dz \quad (8.102a)$$

对于正交异性板为

$$\begin{aligned} D_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E_x}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}}(z) z^2 dz, \quad D_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E_y}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}}(z) z^2 dz \\ \nu_{yx} &= \frac{D_y}{D_x} \nu_{xy} = \frac{1}{D_x} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E_x \nu_{yx}}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}}(z) z^2 dz \\ D_{11} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} G_{xy}(z) z^2 dz, \quad \rho h = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) dz \end{aligned} \quad (8.102b)$$

对于横观同性板为

$$\begin{aligned} D &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E}{1 - \nu^2}(z) z^2 dz, \quad \nu = \frac{1}{D} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E \nu}{1 - \nu^2}(z) z^2 dz \\ \rho h &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) dz \end{aligned} \quad (8.102c)$$

工程实际板件的组合系数公式可参见有关结构的专门文献 [240], [244], [312], [314], [335], [336], [352] 等。例如常见的有:

**网格梁板** 由两组互相垂直的,相当密集的,等间距、平行排列的梁系构成(图8.4),有的一侧还具有用以传递分布荷载(但忽略刚度作用)的薄板。则作为正交异性板的组合系数有

$$\begin{aligned} D_x &= \frac{E_a J_a}{a}, \quad D_y = \frac{E_b J_b}{b}, \quad D_{xy} = \frac{G_a J_{pa}}{2a} + \frac{G_b J_{pb}}{2b} \\ \rho h &= \frac{\rho_a F_a}{a} + \frac{\rho_b F_b}{b} \end{aligned} \quad (8.103a)$$

式中  $E, G, J, J_p, F, \rho$  分别为梁的弹性模量、剪切模量、惯性矩、极惯性矩、截面积与质量密度。

**波纹板** 由匀质薄板沿一个方向褶皱而成(图8.5)。若褶皱波长远小于板跨,则可看成正交异性板,其组合系数有

$$D_x = \frac{E_0 h^3}{12(1 - \nu^2) \left( 1 + \frac{\pi^2 I^2}{4 l^2} \right)}$$

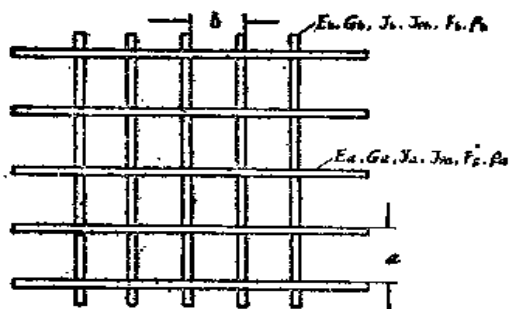


图 8.4

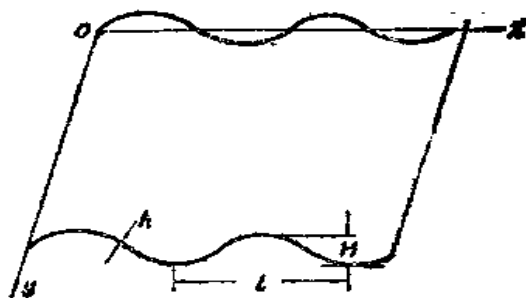


图 8.5

$$D_v = \frac{E_0 H^2 h}{2} \left[ 1 - \frac{0.81}{1 + \frac{5}{2} \left( \frac{H}{2l} \right)^2} \right]$$

$$D_{sv} = \frac{E_0 h^3}{12(1+\nu_0)} \left( 1 + \frac{\pi^2 H^2}{4l^2} \right)$$

$$\rho h = \rho_0 h \left( 1 + \frac{\pi^2 H^2}{4l^2} \right) \quad (8.103b)$$

**加肋板** 匀质板的一侧或两侧，单向或双向布有加强肋杆时（图8.6），若加强肋较密，则可看成正交异性板，其组合系数有

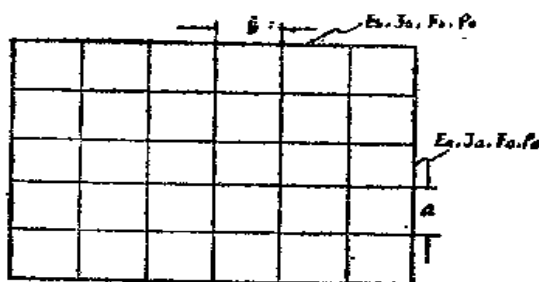


图 8.6

$$D_x = \frac{E_0 h^3}{12(1-\nu_0^2)} + \frac{E_v J_v}{a}$$

$$D_y = \frac{E_0 h^3}{12(1-\nu^2)} + \frac{E_h J_h}{b}$$

$$D_{xy} = \frac{E_0 h^3}{12(1-\nu_0^2)}$$

$$\rho h = \rho_0 h + \frac{\rho_v F_v}{a} + \frac{\rho_h F_h}{b} \quad (8.103c)$$

式中  $E_0$ ,  $\nu_0$ ,  $h$ ,  $\rho$ , 分别为原匀质板的弹性模量、泊松比、厚度与质量密度，其它符号意义见网格梁板说明。

## 二、组合与复合板件的等效非经典理论

在 § 8.2 中已经指出过，对板件是否采用区别于薄板理论的厚板理论进行分析，主要取决于剪变形效应与转动惯量效应系数， $I_G = \frac{k_r D}{G h b^2}$ ,  $I_\rho = \frac{\rho J}{\rho h b^2}$  的值的大小。对于匀质板，这两个量随厚跨比平方  $\left(\frac{h}{b}\right)^2$  增加而增长。但对于组合与复合板等非均质板，即使厚跨比不太大，这两个系数也相当大。其原因在于：大部份组合板件的主要刚度材料在板的两侧，中部架空；大部份复合板件抗弯材料刚强，抗剪材料柔软，因此与一般匀质板相比，都是抗剪刚度相对变小、转动惯量相对变大，造成  $I_G$ ,  $I_\rho$  有相当大的值，因此必须采用厚板理论方程。例如，对于匀质板有

$$I_G = \frac{k_r E}{12(1-\nu^2)G} \left(\frac{h}{b}\right)^2 = \frac{k_r}{6(1-\nu)} \left(\frac{h}{b}\right)^2 = (0.2 \sim 0.4) \left(\frac{h}{b}\right)^2 \quad (8.104a)$$

而许多组合与复合板件则有

$$I_G = (1 \sim 5) \left( \frac{h}{b} \right)^2 \quad (8.104b)$$

所以从广义来说, 厚板理论不只是用于厚板结构, 尚需用于其它类型板件, 诸如组合与复合板, 因此它是一种区别于经典的薄板理论的板件普遍理论, 通称为板件的非经典理论; 而剪变形、转动惯量等因素又称为非经典理论效应;  $I_G$ ,  $I_\rho$  为非经典理论效应系数。

组合与复合板件的等效非经典理论, 就是将组合与复合板件看成为等效匀质各向异性板, 用计入剪变形、转动惯量效应 (挤压变形影响较小, 一般忽略) 的板件非经典理论进行分析。这对大多数组合与复合板件来说很有必要, 有的甚为重要。

当然, 用非经典理论比用经典理论复杂得多。在可能的情况下尽量应用经典理论进行分析可给计算带来很大方便。因此如何判别应用经典理论还是非经典理论比较恰当是至关重要的。根据大量计算分析归纳, 我们建议, 在工程误差范围内, 当

$$I_{G\rho} = I_G + I_\rho = \frac{k_r D}{G h b^2} + \frac{\rho J}{\rho h b^2} \leq 0.003 \quad (8.104c)$$

则可应用经典理论, 超出这个范围则应采用非经典理论为宜。式 (8.104c) 中,  $D$ ,  $G h$ ,  $\rho h$ ,  $\rho J$  分别为板件各方向抗弯、抗剪刚度与移动、转动惯量的平均值, 而  $b$  为板件特征长度 (矩形板的短跨、圆板的半径、椭圆板的短径等)。

如果我们在式 (8.104a), (8.104b) 中均取平均系数。对匀质板,  $I_G \approx 0.3 \left( \frac{h}{b} \right)^2$ , 按准则 (8.104c), 厚跨比为  $\frac{1}{10}$  板件仍可用经典理论; 对组合与复合板,  $I_G \approx 3 \left( \frac{h}{b} \right)^2$ , 按准则 (8.104c) 则厚跨比为  $\frac{1}{30}$  板件就要用非经典理论 (一般,  $I_\rho$  要比  $I_G$  小一个量级)。工程上结构的厚跨比往往处于上述范围, 因此有必要在分析以前先判别一下采用哪种理论比较合适。

综上所述, 组合与复合板件的等效非经典理论的基本方程相当于各向异性厚板方程, 只要和上一小节的等效经典理论一样, 其中刚度、质量系数采用截面组合刚度、质量系数即可。

采用 § 8.3 完全类似的推导过程, 只要计入 § 8.2 的各向异性体应力-应变关系, 即可求得各向异性厚板方程即组合与复合板件的等效非经典理论的基本方程。这也可分为下列几种情况:

#### 对称异性组合板与复合板

$$\begin{aligned} & \frac{h}{k_r} \left\{ e_{55} \frac{\partial}{\partial x} \left( \beta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + e_{45} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \beta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \beta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \right. \\ & \quad \left. + e_{44} \frac{\partial}{\partial y} \left( \beta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right\} - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q = 0 \\ & D_{11} \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial x^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial y^2} + D_{16} \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial x \partial y} \\ & \quad + D_{26} \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial y^2} - \frac{h}{k_r} \left\{ e_{55} \left( \beta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + e_{45} \left( \beta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right\} + \frac{k_r}{h} \left( \frac{D_{11}}{C_1} \frac{\partial q}{\partial x} \right. \\ & \quad \left. + \frac{D_{66}}{C_6} \frac{\partial q}{\partial y} \right) - \rho J \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial t^2} = 0 \end{aligned}$$

$$D_{22} \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial y^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial y^2} + (D_{21} + D_{66}) \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial x \partial y} + D_{16} \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial x^2} - \frac{h}{k_r} \left[ e_{64} \left( \beta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + e_{44} \left( \beta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \frac{k_o}{h} \left( \frac{D_{22}}{C_2} \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{D_{66}}{C_6} \frac{\partial q}{\partial x} \right) - \rho J \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial t^2} = 0 \quad (8.105a)$$

正交异性组合板与复合板

$$\begin{aligned} & -\frac{h}{k_r} \left[ G_{xz} \frac{\partial}{\partial x} \left( \beta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + G_{xy} \frac{\partial}{\partial y} \left( \beta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q = 0 \\ & D_x \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial y^2} + (D_{xy} \nu_{yx} + D_{xy}) \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial x \partial y} - \frac{G_{xz} h}{k_r} \left( \beta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ & + \frac{k_o D_x}{C_{xx} h} \frac{\partial q}{\partial x} - \rho J \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial t^2} = 0 \\ & D_y \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial y^2} + D_x \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial x^2} + (D_{xy} \nu_{xy} + D_{xy}) \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial x \partial y} - \frac{G_{xy} h}{k_r} \left( \beta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ & + \frac{k_o D_y}{C_{yy} h} \frac{\partial q}{\partial y} - \rho J \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (8.105b)$$

横观同性组合与复合板

$$\begin{aligned} & \frac{G_x h}{k_r} \left( \nabla^2 w + \frac{\partial \beta_x}{\partial x} + \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \right) - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q = 0 \\ & D \left( \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial x \partial y} + \frac{k_o}{C_x h} \frac{\partial q}{\partial x} \right) - \frac{G_x h}{k_r} \left( \beta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \rho J \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial t^2} = 0 \\ & D \left( \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial x \partial y} + \frac{k_o}{C_y h} \frac{\partial q}{\partial y} \right) - \frac{G_y h}{k_r} \left( \beta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \rho J \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (8.105c)$$

各种夹层板, 层叠板, 复合材料板, 箱式、管式板, 空间桁架、框架-剪力墙结构以及平板网架等大都需用等效非经典理论, 其组合刚度、质量系数可参见上一小节所列文献。

上述方程的求解可参照 § 8.3 各向同性厚板进行, 其中要注意组合参数发生变化。

### 三、组合与复合板件的耦合理论

当非匀质板的材料沿厚度非对称分布 (成层) 时, 板件的弯曲振动与平面振动将发生耦合。下面推导耦合理论的基本方程。

对于非匀质板 (图 8.3), 我们采用汉盖理论<sup>[104]</sup>假定 ( $k_r = 1$ ), 有位移分量

$$u(x, y, z, t) = u^0(x, y, t) + z \psi_x(x, y, t) \quad (8.106a)$$

$$v(x, y, z, t) = v^0(x, y, t) + z \psi_y(x, y, t) \quad (8.106b)$$

$$w(x, y, z, t) = w^0(x, y, t) \quad (8.106c)$$

凡右上角带“0”者均为相应量在中面值。

代入三维几何方程 (1.1), 忽略挤压变形, 有应变分量

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + z \chi_x, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_y^0 + z \chi_y, \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xy}^0 + z \chi_{xy} \quad (8.107a)$$

$$\varepsilon_z = 0, \quad \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{xz}^0 = \frac{\partial w^0}{\partial y} + \psi_x, \quad \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{yz}^0 = \frac{\partial w^0}{\partial x} + \psi_y \quad (8.107b)$$

其中, 中面应变分量



$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u^0}{\partial x}, \quad \varepsilon_y^0 = \frac{\partial v^0}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy}^0 = \frac{\partial u^0}{\partial y} + \frac{\partial v^0}{\partial x} \quad (8.107c)$$

$$\chi_x = \frac{\partial \psi_x}{\partial x}, \quad \chi_y = \frac{\partial \psi_y}{\partial y}, \quad \chi_{xy} = \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \quad (8.107d)$$

应力分量按各向异性体一般性物理方程 (8.24), 有张量表达式

$$\sigma_i = e_{ij} \varepsilon_j \quad (8.108a)$$

内力分量由应力分量积分为

$$\text{薄膜力: } N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dz, \quad N_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y dz, \quad N_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} dz \quad (8.108b)$$

$$\text{弯曲力: } M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz, \quad M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z dz, \quad M_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz \quad (8.108c)$$

$$\text{剪力: } Q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz, \quad Q_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yz} dz \quad (8.108d)$$

将式 (8.107) 代入式 (8.108), 可得内力表达式

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [A] [B]^T \\ [B] [D] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{e^0\} \\ \{\chi\} \end{Bmatrix} \quad (8.109a)$$

其中

$$\begin{aligned} \{N\} &= [N_x, N_y, Q_x, Q_y, N_{xy}]^T, \quad \{M\} = [M_x, M_y, M_{xy}]^T \\ \{e^0\} &= [\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \varepsilon_{xy}^0, \varepsilon_{yx}^0, \varepsilon_{xz}^0, \varepsilon_{yz}^0]^T, \quad \{\chi\} = [\chi_x, \chi_y, \chi_{xy}]^T \end{aligned} \quad (8.109b)$$

而

$$\begin{aligned} [A] &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{14} & A_{15} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{24} & A_{25} & A_{26} \\ A_{41} & A_{42} & A_{44} & A_{45} & A_{46} \\ A_{51} & A_{52} & A_{54} & A_{55} & A_{56} \\ A_{61} & A_{62} & A_{64} & A_{65} & A_{66} \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{14} & B_{15} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{24} & B_{25} & B_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{64} & B_{65} & B_{66} \end{bmatrix} \\ [D] &= \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8.109c)$$

式中各系数由下列积分式确定:

对于连续非匀质板,

$$A_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} e_{ij} dz, \quad B_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} e_{ij} z dz, \quad D_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} e_{ij} z^2 dz \quad (8.110a)$$

(i, j = 1, 2, 4, 5, 6)

对于层板,

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} e_{ij}^{(k)} dz, \quad B_{ij} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} e_{ij}^{(k)} z dz, \quad D_{ij} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} e_{ij}^{(k)} z^2 dz$$

(i, j = 1, 2, 4, 5, 6) \quad (8.110b)

式中  $e_{ij}^{(k)}$  为第  $k$  层材料常数,  $h_k, h_{k-1}$  为第  $k$  层上下表面的  $z$  向坐标。

将应变表达式 (8.107) 代入上式, 则有用位移分量表示的内力表达式

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A^*] & [AB^*] \\ [B^*] & [BD^*] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u^0\} \\ \{\psi\} \end{Bmatrix} \quad (8.111a)$$

其中

$$\{u^0\} = [u^0 v^0 w^0]^T, \quad \{\psi\} = [\psi_x \psi_y]^T \quad (8.111b)$$

而

$$\begin{aligned} [A^*] &= \begin{bmatrix} A_{11}^* & A_{12}^* & A_{13}^* \\ A_{21}^* & A_{22}^* & A_{23}^* \\ A_{31}^* & A_{32}^* & A_{33}^* \\ A_{41}^* & A_{42}^* & A_{43}^* \\ A_{51}^* & A_{52}^* & A_{53}^* \\ A_{61}^* & A_{62}^* & A_{63}^* \end{bmatrix}, \quad [B^*] = \begin{bmatrix} B_{11}^* & B_{12}^* & B_{13}^* \\ B_{21}^* & B_{22}^* & B_{23}^* \\ B_{31}^* & B_{32}^* & B_{33}^* \end{bmatrix} \\ [AB^*] &= \begin{bmatrix} A_{15} + B_{11}^* & A_{14} + B_{12}^* \\ A_{25} + B_{21}^* & A_{24} + B_{22}^* \\ A_{35} + B_{31}^* & A_{34} + B_{32}^* \\ A_{45} + B_{41}^* & A_{44} + B_{42}^* \\ A_{55} + B_{51}^* & A_{54} + B_{52}^* \\ A_{65} + B_{61}^* & A_{64} + B_{62}^* \end{bmatrix}, \quad [BD^*] = \begin{bmatrix} B_{15} + D_{11}^* & B_{14} + D_{12}^* \\ B_{25} + D_{21}^* & B_{24} + D_{22}^* \\ B_{35} + D_{31}^* & B_{34} + D_{32}^* \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8.111c)$$

在代入过程中可以列出系数  $A_{ij}^*$ ,  $B_{ij}^*$ ,  $D_{ij}^*$  的算式。

将三维动平衡方程 (1.7a)(1.7b)(1.7c) 沿厚度积分及式 (1.7a), (1.7b) 乘  $z$  沿厚度积分 (不计体积力), 并代入上述诸式, 可得板件动平衡方程为

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = R_0 \frac{\partial^2 u^0}{\partial t^2} + R_1 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} \quad (8.112a)$$

$$\frac{\partial N_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = R_0 \frac{\partial^2 v^0}{\partial t^2} + R_1 \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} \quad (8.112b)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = R_0 \frac{\partial^2 w^0}{\partial t^2} \quad (8.112c)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = R_1 \frac{\partial^2 u^0}{\partial t^2} + R_2 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} \quad (8.112d)$$

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = R_1 \frac{\partial^2 v^0}{\partial t^2} + R_2 \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} \quad (8.112e)$$

其中惯性常数有:

对于连续非匀质板,

$$R_0 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) dz, \quad R_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) z dz, \quad R_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) z^2 dz \quad (8.113a)$$

对于层叠板,

$$\begin{aligned} R_0 &= \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \rho_k(z) dz, \quad R_1 = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \rho_k(z) z dz, \\ R_2 &= \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \rho_k(z) z^2 dz \end{aligned} \quad (8.113b)$$

式中  $\rho_k$  为第  $K$  层材料的质量密度。

将式 (8.111) 代入式 (8.112), 得关于位移分量的基本动力方程组

$$[L]\{u\} + \{q\} = \{0\} \quad (8.114a)$$

其中,

$$\{u\} = [u^0 v^0 w^0 \psi_x \psi_y]^T \quad (8.114b)$$

$$\{q\} = [0 \ 0 \ q \ 0 \ 0] \quad (8.114c)$$

$[L]$ 为  $5 \times 5$  阶算子矩阵, 其元素

$$\begin{aligned} L_{11} &= A_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - R_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \\ L_{12} &= L_{21} = A_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ L_{13} &= L_{31} = A_{15} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (A_{14} + A_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + A_{46} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ L_{41}^1 &= \pm A_{16} \frac{\partial}{\partial x} \pm A_{66} \frac{\partial}{\partial y} + B_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - R_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \\ L_{61}^1 &= \pm A_{14} \frac{\partial}{\partial x} \pm A_{46} \frac{\partial}{\partial y} + B_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ L_{22} &= A_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - R_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \\ L_{23} &= L_{32} = A_{56} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (A_{26} + A_{46}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + A_{24} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ L_{42}^2 &= \pm A_{56} \frac{\partial}{\partial x} + A_{26} \frac{\partial}{\partial y} + B_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ L_{62}^2 &= \pm A_{46} \frac{\partial}{\partial x} \pm A_{24} \frac{\partial}{\partial y} + B_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2B_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - R_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \\ L_{33} &= A_{55} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2A_{45} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + A_{44} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - R_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \\ L_{43}^3 &= \pm A_{56} \frac{\partial}{\partial x} \pm A_{46} \frac{\partial}{\partial y} + B_{61} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (B_{14} + B_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + B_{46} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ L_{63}^3 &= \pm A_{46} \frac{\partial}{\partial x} + A_{44} \frac{\partial}{\partial y} + B_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (B_{26} + B_{46}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + B_{24} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ L_{44} &= (-A_{55} + D_{11}) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - R_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \\ L_{64}^4 &= [-A_{46} \pm (B_{14} - B_{66})] \frac{\partial}{\partial x} \pm (B_{46} - B_{26}) \frac{\partial}{\partial y} \\ &\quad + D_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ L_{66} &= (-A_{44} + D_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - R_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (8.114d)$$

方程 (8.114) 即为组合与复合板件振动一般性耦合理论关于弯曲分量  $w^0$ ,  $\psi_x$ ,  $\psi_y$  与平面分量  $u^0$ ,  $v^0$  的十阶联立偏微分方程组。

求解此方程时需满足

初始条件:

$$u^0(0) = u_0^0, \quad v^0(0) = v_0^0, \quad w^0(0) = w_0^0, \quad \psi_x(0) = \psi_{x0}, \quad \psi_y(0) = \psi_{y0} \quad (8.115a)$$

$$\frac{\partial u^0}{\partial t}(0) = \dot{u}_0^0, \quad \frac{\partial v^0}{\partial t}(0) = \dot{v}_0^0, \quad \frac{\partial w^0}{\partial t}(0) = \dot{w}_0^0, \quad \frac{\partial \psi_x}{\partial t}(0) = \dot{\psi}_{x0}, \quad \frac{\partial \psi_y}{\partial t}(0) = \dot{\psi}_{y0} \quad (8.115b)$$

边界条件：一般每边有五个，

$$u_n^0 = \bar{u}_n^0 \text{ 或 } N_n = \bar{N}_n \quad (8.116a)$$

$$u_n^0 = \bar{u}_n^0 \text{ 或 } N_{nn} = \bar{N}_{nn} \quad (8.116b)$$

$$w^0 = \bar{w}^0 \text{ 或 } Q_n = \bar{Q}_n \quad (8.116c)$$

$$\psi_n = \bar{\psi}_n \text{ 或 } M_n = \bar{M}_n \quad (8.116d)$$

$$\psi_n = \bar{\psi}_n \text{ 或 } M_{nn} = \bar{M}_{nn} \quad (8.116e)$$

如果我们仍采用经典薄板理论假定，即取

$$\psi_x = -\frac{\partial w^0}{\partial x}, \quad \psi_y = -\frac{\partial w^0}{\partial y}, \quad \rho J = 0 \quad (8.117)$$

则上述方程就变为经典耦合理论，它是经典弯曲分量 $w^0$ 与平面分量 $u^0, v^0$ 耦合的八阶联立偏微分方程组。

如果板件沿厚度材料对称分布（成层），则有

$$e_{ij}(x, y, -z) = e_{ij}(x, y, z) \quad (8.118a)$$

根据式 (8.25) 有

$$e_{14} = e_{15} = e_{24} = e_{25} = e_{34} = e_{35} = e_{46} = e_{56} = 0 \quad (8.118b)$$

按上面诸式可以推得

$$B_{ij} = R_i = 0, \quad L_{ij} = L_j \quad (8.118c)$$

$$L_{13} = L_{14} = L_{15} = L_{23} = L_{24} = L_{25} = 0 \quad (8.118d)$$

因此基本方程 (8.114) 解耦为两组互相独立方程：

平面振动方程组：

$$\begin{Bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u^0 \\ v^0 \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (8.119a)$$

弯曲振动方程组：

$$\begin{Bmatrix} L_{33} & L_{34} & L_{35} \\ L_{43} & L_{44} & L_{45} \\ L_{53} & L_{54} & L_{55} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} w^0 \\ \psi_x \\ \psi_y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} q \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (8.119b)$$

基本方程 (8.114) 的求解在大多数情况下只能采取变分或数值解法，[344][337] 只有在极少数情况下才有精确解析解。例如：

对十字型反对称交叉布层的复合材料板，有

$$A_{16} = A_{26} = A_{45} = B_{16} = B_{26} = D_{16} = D_{26} = 0 \quad (8.120a)$$

对于四边均为下列简支边界条件的矩形板：

$$\begin{aligned} x=0, \quad a: \quad w^0 &= M_x = \psi_y = v^0 = N_x = 0 \\ y=0, \quad b: \quad w^0 &= M_y = \psi_x = u^0 = N_y = 0 \end{aligned} \quad (8.120b)$$

则可设满足上述全部边界条件的 $u^0, v^0, w^0, \psi_x, \psi_y$ 的振型为

$$\begin{aligned} U &= A_{mn} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y, \quad V = B_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y, \\ W &= C_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \end{aligned}$$

$$\bar{\psi}_x = D_{xx} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y, \quad \bar{\psi}_y = E_{xx} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \quad (8.120c)$$

然后代入基本方程，求得五阶线代方程组及相应频率方程与固有频率、振型。

## § 8.5 变厚度板的振动

在第二章建立板件基本方程 (2.10) 时，已经引入了关于刚度沿板中面是一个常数的前提，因此只适用于等厚度板。对于实际工程中变厚度板的振动分析，只要考虑到  $h = h(x, y)$ ， $D = D(x, y)$ ，即可建立相应基本动力方程。

### 一、基本方程

按式 (2.6)，在变厚度情况下，有弯矩、扭矩表达式

$$M_x = -D(x, y) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_y = -D(x, y) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right),$$

$$M_{xy} = -D(x, y) (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (8.121a)$$

代入式 (2.8a)，(2.8b)，有剪力表达式

$$Q_x = -\frac{\partial}{\partial x} (D \nabla^2 w) - (1 - \nu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial D}{\partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial D}{\partial x} \right) \quad (8.121b)$$

$$Q_y = -\frac{\partial}{\partial y} (D \nabla^2 w) - (1 - \nu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial D}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial D}{\partial y} \right) \quad (8.121c)$$

再代入式 (2.8c)，得变厚度板振动的基本方程

$$\nabla^2 (D \nabla^2 w) - (1 - \nu) \left[ \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q \quad (8.122)$$

边界条件不变，只是其中内力表达式取式 (8.121)。

变厚度板的变形能、动能、变分方程、积分方程的形式不变，只是要注意  $h(x, y)$ ， $D(x, y)$  放在积分号里面。

按 § 2.4 公式，用类似方法可求得在板坐标系中变厚度板的内力表达式

$$M_r = -D(r, \theta) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] \quad (8.123a)$$

$$M_\theta = -D(r, \theta) \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right] \quad (8.123b)$$

$$M_{r\theta} = -D(r, \theta) (1 - \nu) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \quad (8.123c)$$

及轴对称情况下基本方程

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \left[ D \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{\partial D}{\partial r} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right] \right\} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q \quad (8.124)$$

其它处理方法类同直角坐标系。

显然，式 (8.122) 或式 (8.124) 为变系数偏微分方程，大部份将要用第六章的变分或数值方法求解，只有在少数情况下能求取解析解<sup>[7][12][49][214]</sup>，下面将给出其几种典型结果。

## 二、厚度线性变化的悬臂单向板

对于单向板(图3.1), 基本方程(8.122)对应的振型方程为

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[ D \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right] - \rho h \omega^2 W = 0 \quad (8.125)$$

现讨论厚度线性变化的悬臂板(图8.7), 有

$$h(y) = \frac{H}{b} y, \quad D(y) = \frac{EH^3}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{y}{b} \right)^3 \quad (8.126)$$

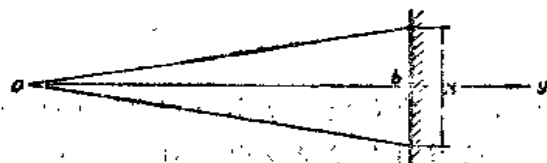


图 8.7

故振型方程为

$$[y^3 W'']'' - k^4 y W = 0 \quad (8.127a)$$

而

$$k^4 = \frac{12\rho b^2(1-\nu^2)}{EH^3} \omega^2 \quad (8.127b)$$

作如下改写:

$$[y^3 W'']'' = \left\{ y^2 \left[ \frac{1}{y} (y^2 W')' \right]' \right\}' = k^4 y W \quad (8.127c)$$

若有

$$\frac{1}{y} (y^2 W')' = \pm k^2 W \quad (8.128a)$$

则方程(8.127c)就得以满足, 也即

$$y^2 W'' + 2y W' \pm k^2 y W = 0 \quad (8.128b)$$

作变量置换

$$t = 2k\sqrt{y}, \quad u = W\sqrt{y} \quad (8.128c)$$

则方程变为

$$t^2 u'' + t u' \pm (t^2 \mp 1) u = 0 \quad (8.128d)$$

这是一阶贝塞尔方程, 故有一般解

$$u(t) = AJ_1(t) + BY_1(t) + CI_1(t) + DK_1(t) \quad (8.129a)$$

其中 $J_1$ ,  $Y_1$ ,  $I_1$ ,  $K_1$ 分别为一阶一类、二类贝塞尔函数及修正贝塞尔函数。再代回式(8.128c), 有振型解

$$W(y) = \frac{1}{\sqrt{y}} [AJ_1(2k\sqrt{y}) + BY_1(2k\sqrt{y}) + CI_1(2k\sqrt{y}) + DK_1(2k\sqrt{y})] \quad (8.129b)$$

考虑到 $y=0$ 处解有限,  $y=b$ 处 $W=W'=0$ , 得二阶线代方程组及相应频率方程

$$J_1(2k\sqrt{b})I_0(2k\sqrt{b}) - I_1(2k\sqrt{b})J_0(2k\sqrt{b}) = 0 \quad (8.130a)$$

解得第一个根及基频

$$2k_1\sqrt{b} = 4.61, \quad f_1 = \frac{0.8459}{b^2} \sqrt{\frac{D(H)}{\rho H}} \quad (8.130b)$$

### 三、厚度单向线性变化的矩形板

对于一般性变厚度矩形板 (图3.2) 均可应用 §3.6 的梁函数组合法。假设振型函数为式 (3.47)，它满足位移边界条件，利用变厚度板的变分方程，同样可以求得类似式 (3.48) 的线代方程组，从而求取固有频率与振型。

若厚度只沿单向 ( $x$  向) 线性变化，即

$$h(x, y) = h_0 \left( 1 + \alpha \frac{x}{a} \right) \quad (8.131)$$

则可求取不同边界条件变厚度板的基频系数

$\lambda_1^2 = \omega_1^2 a^2 \sqrt{\frac{\rho h_0}{D_0}}$  分别列于表8.7, 表8.8, 表8.9。

( $x$  向) 对边固定 ( $y$  向) 对边简支变厚度矩形板基频系数  $\lambda_1$  表8.8

$a/b$	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
0.5	5.114	5.329	5.530	5.721	5.900
1.0	5.639	5.876	6.098	6.309	6.508
2.0	7.753	8.077	8.379	8.663	8.933

四边简支变厚度矩形板基频系数  $\lambda_1$  表8.7

$a/b$	0.2	0.4	0.6	0.8
0.25	3.393	3.533	3.663	3.787
0.50	3.681	3.838	3.984	4.123
0.75	4.117	4.294	4.461	4.621
1.00	4.657	4.859	5.049	5.229
1.25	5.271	5.498	5.712	5.916
1.50	5.935	6.188	6.427	6.652

四边固定变厚度矩形板基频系数  $\lambda_1$  表8.9

$a/b$	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
0.5	5.196	5.415	5.619	5.822	5.997
1.0	6.286	6.552	6.800	7.033	7.255
2.0	10.38	10.79	11.17	11.53	11.85

### 四、刚度径向幂函数变化的轴对称圆板

如果圆板厚度只沿径向变化，即  $h = h(r)$ ，并只讨论轴对称振动，则有基本方程 (8.124)。现讨论刚度沿径向具有

$$D(r) = D_0 r^m \quad (8.132a)$$

分布情况，其中

$$D_0 = \frac{E h_0^3}{12(1-\nu^2)}, \quad h(r) = h_0 r^{\frac{m}{3}} \quad (8.132b)$$

代入方程 (8.124) 相应的振型方程，有

$$r^4 W^{(4)} + (2m+2)r^2 W^{(3)} + [m^2 + m(1+\nu) - 1]r^2 W'' + [\nu m^2 + m(1+\nu) + 1]r W' - \frac{\rho h_0}{D_0} \omega^2 r^{\frac{2}{3}(6-m)} W = 0 \quad (8.133a)$$

这是四阶变系数常微分方程，难于求得一般解，但如果  $m$  与  $\nu$  间具有关系式

$$\nu = \frac{1}{9}(2m-3) \quad (8.134a)$$

并取符号

$$a = -\frac{m}{3}, \quad c = 1 - \frac{m}{6}, \quad d = \frac{2m}{m-6} \quad (8.134b)$$

$$b^4 = \frac{\rho h_0}{D_0} \omega^2 / \left(1 - \frac{m}{6}\right)^4 \quad (8.134c)$$

则方程 (8.133a) 可变为标准的卡姆克 (Kamke) 方程<sup>[130]</sup>

$$r^4 W^{(4)} + C_1 r^3 W''' + C_2 r^2 W'' + C_3 r W' + C_4 W = 0 \quad (8.133b)$$

其中  $C_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) 满足条件:

$$\begin{aligned} C_1 &= 6 - 4(a + c) \\ C_2 &= 2(a^2 - c^2 d^2) + 4(a + c - 1)^2 + 4(a - 1)(c - 1) - 1 \\ C_3 &= [2(a + c) - 1][2(c^2 d^2 - a^2) - (2a - 1)(2c - 1)] \\ C_4 &= [(a + 2c)^2 - c^2 d^2](a^2 - c^2 d^2) - b^4 c^4 r^{4a} \end{aligned} \quad (8.133c)$$

则有解

$$W(r) = r^a [AJ_d(u) + BY_d(u) + CI_d(u) + DK_d(u)] \quad (8.135a)$$

及

$$u = br^c \quad (8.135b)$$

式中,  $J_d, Y_d, I_d, K_d$  分别为  $d$  阶第一、二类贝塞尔函数及修正贝塞尔函数。而四个系数由两周边四个边界条件确定, 如果是整圆板, 有  $B = D = 0$ 。

解 (8.135) 可用于解决一大类变厚度圆板及圆环板, 只要  $\nu$  与  $m$  间满足关系式 (8.134a), 例如:  $\nu = 0, m = 1.5$ ;  $\nu = \frac{1}{9}, m = 2$ ;  $\nu = \frac{2}{9}, m = 2.5$ ;  $\nu = \frac{1}{3}, m = 3$ ;  $\nu = \frac{4}{9}, m = 3.5$  等等。实际上由于  $\nu$  值对结果影响不是很大, 因此  $\nu$  与  $m$  间关系不是精确满足等式 (8.134a), 其结果也可近似应用。

例如,  $m = 3, \nu = \frac{1}{3}$ , 相当于厚度  $h(r) = h_0 r$ , 沿径向线性变化情况。则按式 (8.134) 有

$$a = -1, c = \frac{1}{2}, d = -2 \quad (8.136a)$$

$$b^4 = 16 \frac{\rho h_0}{D} \omega^2 \quad (8.136b)$$

按式 (8.135) 有解

$$W(r) = r^{-1} [AJ_{-2}(u) + BY_{-2}(u) + CI_{-2}(u) + DK_{-2}(u)] \quad (8.136c)$$

$$u = b\sqrt{r} = 2\sqrt{\frac{\rho h_0 \omega^2}{D}} \sqrt{r} \quad (8.136d)$$

如果是在周边  $r = r_0$  处固定的整圆板, 则有

$$B = D = 0, W(r_0) = W'(r_0) = 0 \quad (8.137a)$$

得频率方程

$$J_2(u_0)I_1(u_0) - J_1(u_0)I_2(u_0) = 0 \quad (8.137b)$$

而

$$u_0 = 2\sqrt{\frac{\rho h_0 \omega^2}{D}} \sqrt{r_0} \quad (8.137c)$$

从而解得

$$u_0 = 5.900, 9.197, 12.40 \quad (8.137d)$$

及头三阶频率系数



$$\lambda_n^2 = \omega_n r_0 \sqrt{\frac{\rho h_0}{D_0}} = 8.703, 21.15, 38.45 \quad (8.137e)$$

## § 8.6 加肋板的振动

由于加肋板具有刚度大、材料省的特点，广泛应用于工程结构中。加肋板的分析方法通常分为三种：对于加强肋较密的平板（一般在振型半波长中有四、五个以上加强肋），可以等效为匀质各向异性板进行分析；对于加强肋较疏的平板，可以用瑞雷-里兹法分析，而计入肋的变形能和动能，其位移函数近似取无肋平板的相应解析解；<sup>[252]</sup>也可以作为板-梁耦合系统精确求解。<sup>[329]</sup>第一种方法已在 § 8.4 中介绍过，后两种方法将在本节中加以叙述，具体推导针对简支板，有关原理也可用于其它有关边界条件的板件。

### 一、对边简支单向加肋板

如果  $x$  方向对边简支的矩形板上沿  $x$  向布有一系列平行加强肋（图 8.8）。对于板件与梁系动力耦合问题的求解，可采用 § 3.8 第六小节所述等效外荷法原理。对于板来说，梁是一种附加质量与刚度，在等效外荷法中均可化为附加外载进行求解。

现仅研究第  $i$  根加强肋，其位置坐标是  $y = \eta_i$ 。由于这根肋的存在，板件在  $y = \eta_i$  处受有一线布载荷。根据式 (3.77)，板的振型应满足方程

$$\nabla^2 \nabla^2 W - \alpha^4 W = -\frac{P(x)}{D} \delta(y - \eta_i) \quad (8.138a)$$

而  $P(x)$  为肋给板的载荷，也为板给梁的载荷。因此根据梁的振动方程，有

$$P(x) = \left[ EJ \frac{d^4 W_B(x)}{dx^4} - \rho F \omega^2 W_B(x) \right] \quad (8.138b)$$

根据板梁间协调有

$$W_B(x) = W(x, y)|_{y=\eta_i} \quad (8.138c)$$

故

$$P(x) = \left[ EJ \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - \rho F \omega^2 W \right]_{y=\eta_i} \quad (8.138d)$$

根据式 (3.78)，(3.79)，方程有解

$$\begin{aligned} W(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} [Y_n(y) + \Phi_n(y)] \sin \frac{n\pi}{a} x \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} [a_n Y_{1n}(y) + b_n Y_{2n}(y) + c_n Y_{3n}(y) + d_n Y_{4n}(y) + \Phi_n(y)] \\ &\quad \cdot \sin \frac{n\pi}{a} x \end{aligned} \quad (8.139)$$

而  $Y_{in}(y)$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ) 见式 (3.80)。代入到式 (8.138d) 有

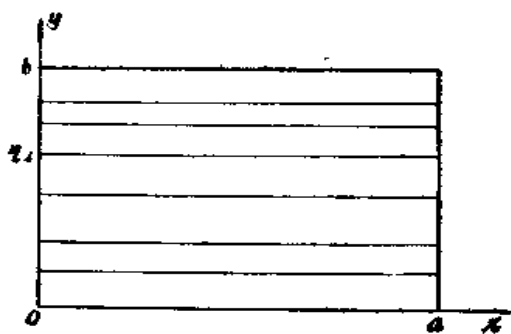


图 8.8

$$P(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[ EJ \frac{m^4 \pi^4}{a^4} - \rho F \omega^2 \right] [Y_m(\eta_i) + \Phi_m(\eta_i)] \sin \frac{m\pi}{a} x \quad (8.138e)$$

将式(8.139), (8.138e) 代回方程 (8.138a), 并考虑到  $Y_m(y)$  是方程 (8.138a) 的齐次解, 故得  $\Phi_m$  方程

$$\Phi_m''''(y) - 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \Phi_m''(y) + \left( \frac{m^4 \pi^4}{a^4} - \alpha^4 \right) \Phi_m(y) = \frac{1}{D} \left[ \rho F \omega^2 - EJ \frac{m^4 \pi^4}{a^4} \right] \cdot [Y_m(\eta_i) + \Phi_m(\eta_i)] \delta(y - \eta_i) \quad (8.140a)$$

类似式 (3.83), 有方程特解

$$\Phi_m(y) = \begin{cases} 0, & 0 \leq y \leq \eta_i \\ \frac{\alpha^3}{D} \left[ \rho F \omega^2 - EJ \frac{m^4 \pi^4}{a^4} \right] [Y_m(\eta_i) + \Phi_m(\eta_i)] Y_{4m}(y - \eta_i), & \eta_i < y \leq b \end{cases} \quad (8.140b)$$

将式 (8.140b) 代回式 (8.139) 得振型  $W$  解, 其中四个待定系数  $a_m, b_m, c_m, d_m$  由另两对边四个边界条件确定为齐次线代方程组, 求得频率方程及相应固有频率与振型。

## 二、四边简支双向加肋板

设双向加肋四边简支板 (图8.9) 有  $r$  根平行  $x$  轴的肋, 刚度均为  $EJ_x$ , 质量均为  $m_x = \rho a F_{x_0}$ ; 有  $s$  根平行  $y$  轴的肋, 刚度均为  $EJ_y$ , 质量均为  $m_y = \rho b F_{y_0}$ 。

设满足四边简支边界条件的板之振型解

$$W(x, y) = \sum_{m=1}^r \sum_{n=1}^s a_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (8.141a)$$

则在  $x = x_i$  处肋之振型为

$$W(x_i, y) = \sum_{n=1}^s A_{i,n} \sin \frac{n\pi}{b} y, \quad A_{i,n} = \sum_{m=1}^r a_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x_i \quad (8.141b)$$

在  $y = y_j$  处肋之振型为

$$W(x, y_j) = \sum_{m=1}^r A_{m,j} \sin \frac{m\pi}{a} x, \quad A_{m,j} = \sum_{n=1}^s a_{mn} \sin \frac{n\pi}{b} y_j \quad (8.141c)$$

用振型表示的全部肋的变形能为

$$U_{mr} = \frac{EJ_x}{2} \sum_{i=1}^r \int_0^b \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 dy + \frac{EJ_y}{2} \sum_{j=1}^s \int_0^a \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 dx \\ = \frac{\pi^4 EJ_x}{4a^3} \sum_{i=1}^r \sum_{m=1}^r A_{m,i}^2 m^4 + \frac{\pi^4 EJ_y}{4b^3} \sum_{j=1}^s \sum_{n=1}^s A_{j,n}^2 n^4 \quad (8.142a)$$

用振型表示的全部肋的动能为

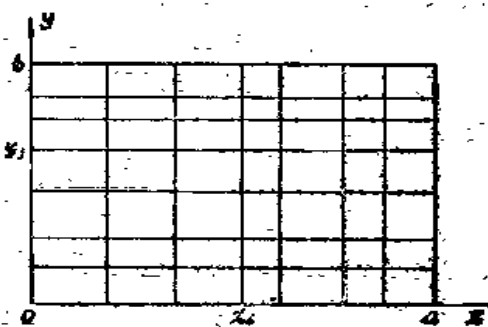


图 8.9

$$\begin{aligned}
 T_{mr} &= \frac{\rho F_x}{2} \sum_{i=1}^r \int_0^b W^2(x, y_i) dx + \frac{\rho F_y}{2} \sum_{i=1}^s \int_0^a W^2(x, y) dy \\
 &= \frac{m_x}{4} \sum_{i=1}^r \sum_{n=1}^p A_{ni}^2 + \frac{m_y}{4} \sum_{i=1}^s \sum_{n=1}^q A_{in}^2
 \end{aligned} \quad (8.142b)$$

相应板的变形能与动能为

$$U_{mp} = \frac{\pi^4 ab}{8} D a_{mn}^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \quad (8.142c)$$

$$T_{mp} = \frac{\rho hab}{8} a_{mn}^2 \quad (8.142d)$$

根据平板固有振动的变分方程 (7.1), 代入上述各式, 按里兹法有

$$\frac{\partial}{\partial a_{mn}} [(U_{mr} + U_{mp}) - \omega^2 (T_{mr} + T_{mp})] = 0 \quad (8.143a)$$

从而推出关于  $a_{mn}$  的齐次线代方程组

$$\begin{aligned}
 &\frac{\pi^4 E J_x}{2a^3} m^4 \sum_{i=1}^r A_{ni} \sin \frac{n\pi}{b} y_i + \frac{\pi^4 E J_y}{2b^3} n^4 \sum_{i=1}^s A_{in} \sin \frac{m\pi}{a} x_i \\
 &+ \frac{\pi^4 ab}{4} D a_{mn} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - \omega^2 \left[ \frac{m_x}{2} \sum_{i=1}^r A_{ni} \sin \frac{n\pi}{b} y_i \right. \\
 &\left. + \frac{m_y}{2} \sum_{i=1}^s A_{in} \sin \frac{m\pi}{a} x_i + \frac{\rho hab}{4} a_{mn} \right] = 0 \quad (m, n = 1, 2, 3, \dots)
 \end{aligned} \quad (8.143b)$$

由其系数行列式为零给出频率方程。

对于均布加肋板, 且取  $(m+n)$  的项数小于  $2(r+1)$  及  $2(s+1)$ , 则利用三角函数关系式, 可以解耦, 即得  $a_{mn}$  的独立代数方程, 从而解得频率<sup>[252]</sup>

$$\omega_{mn}^2 = \frac{\pi^4 E J_y}{b^3 m_y} \times \frac{n^4 + \frac{r+1}{s+1} \left( \frac{b}{a} \right) \frac{m^4}{J_x} + \frac{aD}{E J_y (s+1)} \left\{ m^2 \left( \frac{b}{a} \right)^2 + n^2 \right\}}{1 + \frac{r+1}{s+1} \frac{m_x}{m_y} + \frac{\rho hab}{m_y (s+1)}} \quad (8.144a)$$

对于单  $(x)$  向加肋板则有

$$\omega_{mn}^2 = \frac{\pi^4 E J_x}{a^3 m_x} \times \frac{m^4 + \frac{aD}{(r+1) \left( \frac{b}{a} \right)^3 E J_y} \left\{ m^2 \left( \frac{b}{a} \right)^2 + n^2 \right\}}{1 + \frac{\rho hab}{m_x (r+1) \left( \frac{b}{a} \right)^3}} \quad (8.144b)$$

## §8.7 连续板的振动

以上章节所讨论的内容均属于单一板件问题。实际工程中往往会遇到板系结构的振动分析问题, 主要包括连续板与折板 (包括箱形结构) 等。连续板是指各板中面在同一平面上, 但板间具有一定支承条件; 折板是指各板中面不在同一平面内, 板间存在或不存在支承条件。连续板与折板结构在工程上均具有较大实用价值。后者是平壳结构, 详见壳体振动有关

章节。本节主要讨论连续板的振动分析。

板系结构振动分析实质上是一个板与板之间动力耦合问题。每个板必须满足板的基本方程，而它们的边界条件之间又是耦合的。这是就分析方法的一般原则而言，实际上根据具体结构可采用一系列相应处理方法，以便给分析带来方便，下面将分别给以介绍。由于板系结构所包含的构件很多，全部罗列详细公式将十分繁复，而一些主要内容又在单板分析中已经介绍过了，因此这里将主要给出方法的原理。

还应指出，这里介绍的方法仅限于解析方法；至于在第六章中介绍过的各种变分法与数值解法在实际板系结构分析中是十分常用的；另外还有将要在第十四章中介绍的有限平壳条法，只要注意到具体结构的边界与支承条件，应用到各种连续板振动分析中去是十分有效的。由于这些方法在原理上都可直接应用到各种板系结构分析中去，所以在这里就不再重复了。

### 一、连续板的整板分析

如果一个连续板有  $r$  个中间支座，侧边  $x = 0$ ， $a$  简支（图8.10）。可以将全部板件作为一个整体板，而中间支承看成板的中间条件来处理，其解法同 § 3.8 第六小节。板件振型满足方程

$$\nabla^2 \nabla^2 W - a^4 W = - \sum_{K=1}^r \frac{P_K(x)}{D} \delta(y - \eta_K) \quad (8.145a)$$

其满足两侧边边界条件的解为

$$W(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} [Y_n(y) + \Phi_n(y)] \sin \frac{m\pi}{a} x \quad (8.146a)$$

式中， $Y_n(y)$  为齐次方程一般解，见式 (3.79)，(3.80)，含有四个待定系数  $a_n, b_n, c_n, d_n$ ； $\Phi_n(y)$  为特解，对于每一个未知  $P_K(x)$  展开为

$$P_K(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{Kn} \sin \frac{m\pi}{a} x \quad (8.145b)$$

则有其相应特解

$$\Phi_{Kn}(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq y \leq \eta_K \\ \frac{a^2}{D} P_{Kn} Y_{4n}(y - \eta_K), & \eta_K < y \leq b \end{cases} \quad (8.146b)$$

解中  $(r+4)$  个未知系数： $P_{Kn} (K=1, 2, 3, \dots, r)$  及  $a_n, b_n, c_n, d_n$  由  $(r+4)$  个条件确定：两端每端二个边界条件及  $r$  个支座振型为零条件。从而由  $(r+4)$  阶齐次线代方程组给出频率方程及固有频率与振型。

### 二、连续板的板系分析

上述连续板（图8.10）也可处理为板系，每个跨为一板件。对于第  $K$  块板，按对边简支

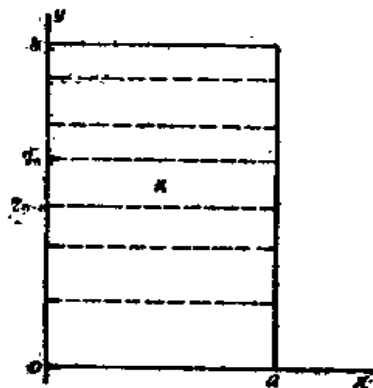


图 8.10

板的一般解 (3.32a), 有振型分量

$$W_K(x, y) = [A_{mK} \sin \beta_{1m}(y - \eta_{K-1}) + B_{mK} \cos \beta_{1m}(y - \eta_{K-1}) \\ + C_{mK} \sinh \beta_{2m}(y - \eta_{K-1}) + D_{mK} \cosh \beta_{2m}(y - \eta_{K-1})] \sin \frac{m\pi}{a} x \\ (K = 1, 2, 3, \dots, r+1) \quad (8.147a)$$

因此解中共有  $4(r+1)$  个未知系数:  $A_{mK}, B_{mK}, C_{mK}, D_{mK}$  ( $K = 1, 2, 3, \dots, r+1$ ), 它们由  $y = 0, b$  的四个边界条件及  $4r$  个连续条件

$$W_K(\eta_K) = W_{K+1}(\eta_K), W'_K(\eta_K) = W'_{K+1}(\eta_K) \\ W''_K(\eta_K) = W''_{K+1}(\eta_K), W'''_K(\eta_K) = W'''_{K+1}(\eta_K) \quad (K = 1, 2, 3, \dots, r) \quad (8.147b)$$

确定为  $4(r+1)$  阶齐次线代方程组, 从而求解。

### 三、连续板分析的初始参数法及动力三弯矩方程

如果连续板 (图8.10) 两侧边  $x = 0, a$  为自由边界, 则可按单向板系处理。按单向板振型解 (3.5b), 有每块板的振型解

$$W(y) = AY_1(\alpha y) + BY_2(\alpha y) + CY_3(\alpha y) + DY_4(\alpha y) \quad (8.148)$$

式中  $Y_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) 见式 (3.6)。利用其特点, 式 (3.7), 代入  $x = 0$ , 可求出

$$W(0) = W_0 = A \quad (8.149a)$$

$$\frac{dW}{dx}(0) = \Phi(0) = \Phi_0 = B \quad (8.149b)$$

$$\frac{d^2W}{dx^2}(0) = -\frac{M^*(0)}{D} = -\frac{M_0}{D} = -\bar{M}_0 = C \quad (8.149c)$$

$$\frac{d^3W}{dx^3}(0) = -\frac{Q^*(0)}{D} = -\frac{Q_0}{D} = -\bar{Q}_0 = D \quad (8.149d)$$

代回式 (8.148), 并求导, 可建立下列振型表达式

$$\begin{Bmatrix} W(x) \\ \Phi(x) \\ M^*(x) \\ Q^*(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} W_0 & \Phi_0 & -\bar{M}_0 & -\bar{Q}_0 \\ \Phi_0 & -\bar{M}_0 & -\bar{Q}_0 & \alpha^4 W_0 \\ M_0 & Q_0 & -D\alpha^4 W_0 & -D\alpha^4 \Phi_0 \\ Q_0 & -D\alpha^4 W_0 & -D\alpha^4 \Phi_0 & \alpha^4 M_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1(\alpha x) \\ Y_2(\alpha x) \\ Y_3(\alpha x) \\ Y_4(\alpha x) \end{Bmatrix} \quad (8.150)$$

设想将连续板在支座处断开, 外加未知弯矩  $M_1, M_2, \dots, M_K, \dots, M_r$ , 使各跨间板再保持连续 (图8.11)。现研究第  $K$  跨板, 其第  $K$  跨右端作用有  $M_K$  (图8.12), 则用  $W_0 = 0$ ,  $M_0 = M_K$  代入式 (8.150), 再用条件  $W(L) = M^*(L) = 0$  立二个方程, 可解出  $\Phi_{0,K}(M_K)$  及  $Q_{0,K}(M_K)$  表达式; 再用式 (8.150) 解  $\Phi(L) = \Phi_{L,K}(\Phi_{0,K}, M_K, Q_0) = \Phi_{L,K}(M_K)$ 。同样方法可求得左端作用有  $M_{K+1}$  (图8.12) 时的  $\Phi_{0,K+1}(M_{K+1})$ ,  $\Phi_{L,K+1}(M_{K+1})$ 。然后叠加, 在  $M_K$  及  $M_{K+1}$  共同作用下的  $\Phi_0, \Phi_L$  (图8.12) 表达式为

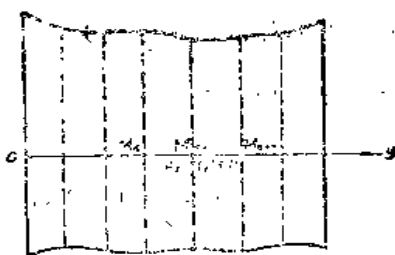


图 8.11

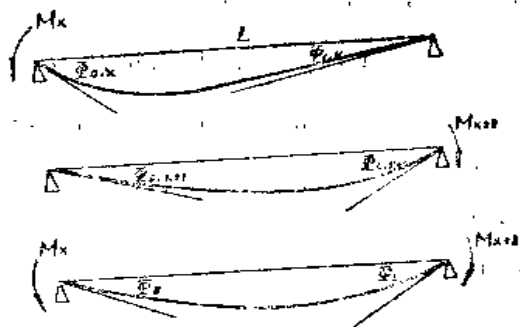


图 8.12

$$\begin{cases} \Phi_0 \\ \Phi_L \end{cases} = \begin{bmatrix} \frac{Y_2(\alpha L)Y_3(\alpha L) - Y_1(\alpha L)Y_4(\alpha L)}{D[Y_2^2(\alpha L) - \alpha^4 Y_1^2(\alpha L)]} & \frac{Y_4(\alpha L)}{D[Y_2^2(\alpha L) - \alpha^4 Y_1^2(\alpha L)]} \\ -\frac{Y_4(\alpha L)}{D[Y_2^2(\alpha L) - \alpha^4 Y_1^2(\alpha L)]} & -\frac{Y_2(\alpha L)Y_3(\alpha L) - Y_1(\alpha L)Y_4(\alpha L)}{D[Y_2^2(\alpha L) - \alpha^4 Y_1^2(\alpha L)]} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_K \\ M_{K+1} \end{Bmatrix} \quad (8.151)$$

将上式中 $\Phi_L$ 用于连续板第 $K$ 跨右端，上式中 $\Phi_0$ 用于第 $K+1$ 跨左端（图8.11），并使之相等，即可建立动力三弯矩方程

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{Y_4(\alpha_K L_K)}{D_K[Y_2^2(\alpha_K L_K) - \alpha_K^4 Y_1^2(\alpha_K L_K)]} \right\} M_K \\ & + \left\{ \frac{Y_2(\alpha_K L_K)Y_3(\alpha_K L_K) - Y_1(\alpha_K L_K)Y_4(\alpha_K L_K)}{D_K[Y_2^2(\alpha_K L_K) - \alpha_K^4 Y_1^2(\alpha_K L_K)]} \right. \\ & + \left. \frac{Y_2(\alpha_{K+1} L_{K+1})Y_3(\alpha_{K+1} L_{K+1}) - Y_1(\alpha_{K+1} L_{K+1})Y_4(\alpha_{K+1} L_{K+1})}{D_{K+1}[Y_2^2(\alpha_{K+1} L_{K+1}) - \alpha_{K+1}^4 Y_1^2(\alpha_{K+1} L_{K+1})]} \right\} M_{K+1} \\ & + \left\{ \frac{Y_4(\alpha_{K+1} L_{K+1})}{D_{K+1}[Y_2^2(\alpha_{K+1} L_{K+1}) - \alpha_{K+1}^4 Y_1^2(\alpha_{K+1} L_{K+1})]} \right\} M_{K+2} = 0 \end{aligned} \quad (8.152a)$$

式中

$$\alpha_K^4 = \frac{\rho h_K \omega^2}{D_K} \quad (8.152b)$$

而 $h_K$ ,  $L_K$ ,  $D_K$ 分别为第 $K$ 跨板的厚度、跨度、刚度。

对于每个跨间支座可建立一个三弯矩方程，故 $r$ 跨连续板可建立 $(r-1)$ 个三弯矩方程。另外两端有二个关于弯矩或转角方程（若是转角条件，可用式（8.151）化为弯矩方程），故可解 $(r+1)$ 个未知弯矩： $M_1, M_2, \dots, M_{r+1}$ ，从而建立 $(r+1)$ 阶齐次线性方程组，求取固有频率与振型。这里可以看出，这种方法与前两种方法相比，自由度是降低了，尤其对于工程上跨数不多的连续板，很容易直接给出频率方程。

【例】两跨不等跨连续板，各跨刚度一样，长分别为 $L_1$ 及 $L_2$ ，两端简支。按上述三弯矩方程，对于中间支座建立一个三弯矩方程，并利用两端弯矩为零，即给出频率方程

$$\text{cth}(\alpha L_1) - \text{ctg}(\alpha L_1) + \text{cth}(\alpha L_2) - \text{ctg}(\alpha L_2) = 0 \quad (8.153)$$

若 $L_2 = 2L_1$ ，则可解得基频系数

$$\lambda_1^2 = \omega_1^2 L_1^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}} = 3.159 \quad (8.154)$$

## § 8.8 弹性地基上板的振动

### 一、动力弹性地基的处理方法

实际工程中许多板的振动问题是和弹性地基有关,例如,土建工程中的基础底板、公路路面、挡土墙、地下结构等。弹性地基上板的振动问题实质是板件与三维无限弹性介质的动力相互作用,所以问题是相当复杂的。由于工程上需要,近百年来经过大量研究分析,已经形成各种工程简化计算方法。有些方法虽然离开弹性地基实际模型还是有一段相当大的距离,但作为工程实用计算,还是被普遍接受与采用;有些方法比较精确,其具体计算相当困难与繁琐,但作为简化模型的校核与重要部件的设计计算还是值得研究的。动力弹性地基的处理方法归纳起来有下列几类。

最为广泛应用的是大家熟知的温克尔 (Winkler) 地基模型。这一模型认为土体是一种匀质、各向同性、线弹性材料,地基的反力和板在该点的挠曲成正比,而且比例系数 (基床系数) 只和土体材料特性有关,在板的各处是一常值。这一模型实质上认为三维无限弹性体可以简单用一系列具有相同弹簧系数的离散、垂直线弹簧所代替。当然,这种模型和实际连续的土体介质是有相当差别的。最明显的一点是,在板的边缘处沉陷将发生不连续现象。因为在板边缘的内侧土体将随板件有一定沉陷,但在板边缘的外侧,由于是自由边界不受载,因而沉陷就突然降为零。事实上,弹性地基是不会出现这样现象的,在板边缘的外侧土体虽无垂直应力也仍有一定沉陷。但由于这一模型的采用对实际板件的分析计算带来极大方便,因此这一古老模型在工程上仍然广为采用。目前主要工作在于如何根据实际土体材料,能更全面、确切、统计地用单一基床系数来加以反映。关于这一问题的详细研究可参见文献 [108], [362]。

对于动力问题的温克尔模型的应用还应注意的是,基床系数只计及地基对板件的刚度作用,而没有反映土体的质量效应 (这两种因素对板的频率起着相反的作用),因此在采用基床系数时必须另外附加一定土体质量到板件上去。至于附加质量应该取多少,更是一个困难的问题。其根本原因在于“附加质量”的概念本来就十分粗糙,很难同实际无限土体质量用一个简单质量数来加以联系。附加质量确定的根本办法只有在对无限三维连续土体模型加以研究、分析与归纳的基础上才能得出比较正确的结论,而且应该对不同情况分别对待。目前作为工程上的简化、近似分析,可以粗略地在板件中计入  $\frac{1}{3} \sim \frac{1}{2}$  跨度厚土体质量。但无论附加土体质量取多少,只是改变板件质量密度代入的具体数值,而不影响弹性地基板振动分析的实际过程。因此下面具体推导中,认为板件的  $\rho h$  已经计入了土体附加质量,而在基本方程中只需计及土体刚度影响就可以了。

温克尔地基模型不完善原因之一是将连续介质简化为离散弹簧,因此抗力只取决于本位置挠度,而与挠度沿板而变化率无关,这是离散模型的一个主要缺点。为了弥补这一不足,适当考虑土体连续性质,曾发展过许多温克尔修正模型,即双线弹性地基模型。这种模型认为地基抗力不但和板件挠度有关,而且还和挠度沿板面的导数 (斜率、曲率等) 有关。由于引入了这一因素,原温克尔模型得到了改善,而具体分析工作将不会带来太大困难。下面我们将介绍其中一种方法。这类方法和原始温克尔地基模型一样,抗力和挠度、挠度的导数间比例系数的确定仍是一个比较困难和近似的因素。至于附加质量,仍和温克尔地基模型一

样,对于动力问题,仍然要附加到原板件中去。

弹性地基上结构振动研究表明,地基抗力不但取决于土体材料性质,而且还和振动频率有关,因为不同频率相应的土体(三维分布)振型不一,因此反映到板件与地基接触面处抗力不一。而上述两种模型中均认为抗力与频率无关,是一个固定常数的做法需要改进,这就形成一种阻抗函数法。这种方法认为地基仍简化为离散线性弹簧,但弹簧系数是频率的函数,则可同时反映地基的刚度与质量效应,用统一的阻抗函数来表示。阻抗函数是表示为频率函数的地基抗力。计入阻抗函数的弹性地基上板的振动方程形式,类同于温克尔地基上板,但求解必须在频域内进行,这已超出本书范围,就不再具体介绍了。进一步研究还表明,地基抗力还和板的形状、板土相对刚度、板的埋深、可变形地基深度、地基分层特性、地貌、地形、地下岩洞和地下结构等因素有关,并且沿板面各处也还是变化的。关于这些方面的深入探讨目前正在进行中。

对于动力问题,弹性地基特性描述的另一特点是地基阻尼,也就是地基对板件的效应不只是刚度、质量,而且还有阻尼。地基阻尼有两类因素:一类是地基材料的内摩擦(参见§6.5)引起的材料阻尼,这种阻尼可以用一般结构阻尼相类似的处理方法;另一类是地基所特有的,由于能量弥散引起的几何阻尼。位于弹性地基上结构的自由振动,即使没有结构与地基的材料阻尼,也会由于振动能量向无限延伸的外空间扩展、弥散,而使自由振动逐渐衰减。这种几何阻尼现象已为理论研究(参见[303])所证实。具体做法中,对于温克尔地基模型,可以将地基简化为离散线弹簧同时附加离散阻尼器;对于阻抗函数模型,则将地基简化为随频率变化的线弹簧和随频率变化的阻尼器。至于阻尼系数的具体确定将是更为复杂的事情,好在阻尼在大部分情况下对结构振动影响不大,所以可采用比较粗略的办法。[319]

弹性地基上板的振动分析的精确模型则是板件与三维无限连续介质的耦合分析。这一原始模型的基本方程即为第二章的板方程与第一章三维弹性动力学方程的联立,并引入在接触面上变形与应力的协调。另外,对于介质,也可用积分方程和板件的微分方程联立。可以想象这类方程组的求解,数学上困难是很大的,只有在极少数情况下可以求得解析解。除了板是刚性情况[319]外,无限大柔性板的自由振动则是其中一个典型例子,这将在§8.14中介绍。这类模型的有效分析大多采用第六章介绍的变分与数值近似方法。关于瑞雷-里兹法的一些结果将在下面介绍。有关数值解法的处理技术可参见[166], [255]。但无限地基的纯离散解法所需自由度、内存、工作量十分可观,而且无限边界难于正确模拟,因此最近又发展边界元法与无限元法来处理地基介质[33], [345], 就能较好克服这方面不足。

## 二、温克尔地基上的板

温克尔地基模型认为地基反力正比于板在该点的挠度,因此弹性地基上板振动的基本方程即为无地基板方程(2.10)附加地基反力项,为

$$D\nabla^2\nabla^2w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k_s w = q \quad (8.155 a)$$

式中 $k_s$ 为基床系数。相应振型方程为

$$\nabla^2\nabla^2W - \alpha^4 W = 0 \quad (8.155 b)$$

式中

$$\alpha^4 = \omega^2 \frac{\rho h}{D} - \frac{k_s}{D} \quad (8.155 c)$$



边界条件仍同无地基板。因此弹性地基板的振型方程 (8.155 b) 在形式上与无地基板振型方程 (3.23) 完全相同, 加上边界条件也是相同的 (如果边界条件与地基存在无关), 因此以前各章节中的频率系数  $\lambda_{mn} = (\alpha a)_{mn}$  结果都可加以应用, 只是由  $\lambda_{mn}$  值求固有频率  $\omega_{mn}$  的公式按式 (8.155 c) 应为

$$\omega_{mn} = \sqrt{\alpha_{mn}^4 + \frac{k_s}{D}} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} = \frac{1}{a^2} \sqrt{\lambda_{mn}^4 + \frac{k_s a^4}{D}} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad (8.156 a)$$

式中  $a$  为板件的特征长度。和无地基板的公式 (3.26) 相比, 多了一项含  $k_s$  项。上式也可改写为

$$\omega_{mn}^2 = \sqrt{\frac{\lambda_{mn}^4 D}{a^4 \rho h} + \frac{k_s}{\rho h}} = \sqrt{\bar{\omega}_{mn}^2 + \frac{k_s}{\rho h}} \quad (8.156 b)$$

式中  $\bar{\omega}_{mn}$  为无地基板频率。式 (8.156 b) 是温克尔地基上板的固有频率的一般性公式, 可根据以前各章所求得的固有频率  $\bar{\omega}_{mn}$ , 即很容易算得弹性地基上板的固有频率。很明显, 计入了地基反力  $k_s$  项, 固有频率是增加的, 增加值和基床系数  $k_s$  与板的质量密度  $\rho h$  比值有关。但应注意的是, 如果计入附加质量, 增大  $\rho h$  值, 则  $\bar{\omega}_{mn}$  值比无地基板频率要低, 因此两种效应叠加结果, 有地基板频率比无地基板低还是高就不一定了。

作为一个例子, 根据式 (8.156 b) 及四边简支矩形板频率解 (3.26 a), 有弹性地基上四边简支矩形板固有频率公式

$$\omega_{mn} = \sqrt{\frac{\pi^4 D}{\rho h} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 + \frac{k_s}{\rho h}} \quad (8.156 c)$$

因此, 应用温克尔地基模型求解弹性地基上板的振动问题是十分方便, 受到普遍欢迎。由于振型方程及边界条件不变, 因此温克尔地基上板的振型也完全同无地基板。

温克尔模型的弹性地基上板件的变分方程仍具有式 (2.16) 形式, 只是变形能应为

$$U = U_p + U_s \quad (8.157 a)$$

其中  $U_p$  为无地基板的变形能, 见前;  $U_s$  为弹性地基变形能, 为

$$U_s = \iint \frac{k_s}{2} w^2 ds \quad (8.157 b)$$

如果具有地基附加质量的话, 动能表达式 (2.15) 中  $\rho h$  应理解为计入了地基附加质量的板件综合质量密度。

### 三、双线弹性地基上的板

这里讨论一种双线弹性地基模型, 认为地基反力由两部分组成, 分别正比于板的挠度与曲率, 因此有基本方程

$$D \nabla^2 \nabla^2 w + k_1 w - k_2 \nabla^2 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q \quad (8.158 a)$$

式中  $k_1, k_2$  为两种不同的基床系数。其相应振型方程为

$$\nabla^2 \nabla^2 W - k \nabla^2 W - \alpha^4 W = 0 \quad (8.158 b)$$

式中

$$\alpha^4 = \omega^2 \frac{\rho h}{D} - \frac{k_1}{D}, \quad k = \frac{k_2}{D} \quad (8.158 c)$$

边界条件仍同无地基板。

上述方程的求解方法可以参照以前各章相应方法进行。如对边简支矩形板, 仍可设满足

对边简支边界条件的振型解

$$W(x, y) = Y_m(y) \sin \frac{m\pi}{a} x \quad (8.159 a)$$

代入振型方程 (8.158 b) 有  $Y_m(y)$  应满足的常微分方程

$$Y_m''''(y) - \left[ 2 \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + k \right] Y_m''(y) + \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^4 + k \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 - \alpha^4 \right] Y_m = 0 \quad (8.159 b)$$

仍有解

$$Y_m(y) = A_m \sin \beta_{1m} y + B_m \cos \beta_{1m} y + C_m \sinh \beta_{2m} y + D_m \cosh \beta_{2m} y \quad (8.159 c)$$

因此振型解具有与无地基板相同形式, 因此 § 3.3 中推得的一系列频率方程 (3.33) 均成立, 只是求解时要代入

$$\begin{aligned} \beta_{1m} &= \sqrt{\sqrt{\frac{k^2}{4} + \alpha^4} \mp \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \frac{k}{2} \right]} \\ \beta_{2m} &= \sqrt{\sqrt{\frac{k^2}{4} - \frac{k_1}{D} + \omega^2 \frac{\rho h}{D}} \mp \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \frac{k_2}{2D} \right]} \end{aligned} \quad (8.159 d)$$

而其振型又完全与相应无地基板相同。

#### 四、计入弹性半空间刚度的圆板

对于地基的弹性半空间理论模型, 往往采用变分方法求取近似解, 其中瑞雷-里兹法得到广泛应用。在应用瑞雷-里兹法时所设板件振型函数一般和同边界无地基板相同, 而地基中振型函数在与板接触面上和板的振型函数保持协调, 而沿径向、垂向又以一定规律衰减为零, 从而可以用 § 7.2 同样原理进行变分求解, 只是变形能与动能项应包括对无限半空间积分 (具体算式可参见 § 1.3)。这样, 地基的变形能与动能项分别反映了地基对板件振动的附加刚度与质量效应, 就有可能反映三维无限连续介质体的影响。当然是否能得以完善、确切地反映这一模型的真实影响, 还在于地基振型函数分布规律的选取, 这需要更为严格的理论分析或数值计算结果作为依据。

下面是按上述方法给出某些弹性地基上圆板频率系数结果, 考虑到地基的影响以刚度为主, 所以忽略了动能中地基项, 详细推导可参见 [32]。

弹性半空间上固定整圆板 设板件振型

$$W(r) = A \left[ 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right]^2 \quad (8.160 a)$$

则基频系数

$$\lambda_1^2 = \omega_1 a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}} = \sqrt{106.7 + \frac{4.37 G (\lambda + G) a^3}{D (\lambda + 2G)}} \quad (8.160 b)$$

其中地基介质的弹性常数

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (8.160 c)$$

弹性半空间上简支整圆板 设振型

$$W(r) = A J_0 \left( \alpha_1 \frac{r}{a} \right) \quad (8.161 a)$$

其中  $\alpha_1$  是  $J_0(\alpha) = 0$  的最小的根。则基频系数

$$\lambda_1^2 = \omega_1 a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}} = \sqrt{21.7 + 11.25\nu + \frac{7.46G(\lambda + G)a^3}{D(\lambda + 2G)}} \quad (8.16b)$$

弹性半空间上的自由圆板 设振型

$$W(r) = A_1 + A_2 J_0\left(a, \frac{r}{a}\right) \quad (8.162a)$$

用里兹法求得头二个频率系数为

$$\lambda_i^2 = \omega_i a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}} = \sqrt{\frac{c_1 \varepsilon^2 + c_2 \varepsilon + c_3}{\varepsilon^2 + 3.196\varepsilon + 3.69}} \quad (i=1, 2) \quad (8.162b)$$

而

$$c_1 = 21.64 + 11.25\nu + 3.735\beta \quad (8.162c)$$

$$c_2 = 5.281\beta \quad (8.162d)$$

$$c_3 = 9.397\beta \quad (8.162e)$$

$$\varepsilon = [\pm \sqrt{21.2 + 5.68\nu^2 + 0.298\beta^2 + 22\nu + 4.76\beta + 2.48\beta\nu} - (4.61 + 2.39\nu + 0.255\beta)] + (3.98 + 2.07\nu + 0.383\beta) \quad (8.162f)$$

$$\beta = \frac{G(\lambda + G)a^3}{D(\lambda + 2G)} \quad (8.162g)$$

## § 8.9 平板的大挠度振动

到目前为止, 所研究的平板振动问题均属于线性理论范围, 即其相应的基本微分方程是线性的。从这节开始的几节中将研究平板振动的非线性问题。平板的非线性振动产生原因主要可分为三种: 一是由于非线性几何关系引起的, 一般称为大挠度振动<sup>[42][259][280]</sup>; 另一种是由于非线性物理关系引起的, 包括有非线性弹性、弹塑性、刚塑性等<sup>[57][804]</sup>; 还有一种非线性接触问题, 指平板与刚性或弹性的基床或结构的接触与脱离。此外还有非线性惯性、非线性阻尼、非线性地基等问题。

非线性振动类型很多, 这里只介绍其中两种常见的平板非线性振动问题, 即几何非线性与物理非线性问题。另外, 考虑到非线性振动问题的解法和以前各章节的线性振动有很大差别, 所以还给出非线性动力方程几种一般性解法, 可作为进一步研究的基础。

### 一、直角坐标系的基本微分方程

平板大挠度问题仍采用 § 2.1 薄板理论的前三个假定, 但假定 (d) 不再成立, 而计入中面位移  $u_0, v_0$ , 有位移关系式

$$u = u_0 - z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad v = v_0 - z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (8.163)$$

在弹性理论中, 忽略  $u, v$  一阶导数非线性项, 而保留  $w$  一阶导数非线性项, 有非线性位移-应变关系

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (8.164a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \quad (8.164b)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (8.164c)$$

应力-应变关系仍是线性的, 按式 (2.3) 有

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_x + \nu\epsilon_y) \quad (8.165a)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_y + \nu\epsilon_x) \quad (8.165b)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad (8.165c)$$

按内力定义, 有

薄膜力:

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dz, \quad N_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y dz, \quad N_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} dz \quad (8.166a)$$

弯曲力:

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz, \quad M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z dz, \quad M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz \quad (8.166b)$$

将式 (8.163) 代入式 (8.164), 再代入式 (8.165), 再代入式 (8.166a), 可以求出弯曲内力表达式仍同式 (2.6), 即只是与  $w$  有关, 而与中面位移  $u_0, v_0$  无关。 $u_0, v_0$  只影响薄膜力, 但下面分析是用薄膜力相应的应力函数直接进行, 因此在变量中也不出现  $u_0, v_0$ , 问题的变量归结为挠度与应力函数的两个量。

计入薄膜力的板的动平衡方程在 § 8.1 已经研究过为式 (8.1), 有

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \quad (8.167a)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0, \quad \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0 \quad (8.167b)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + q - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (8.167c)$$

现在, 和平面力板情况不一样处在于, 式 (8.167c) 中  $N_x, N_y, N_{xy}$  不再是已知的, 要通过这几个方程联立求解给出, 因此弯曲与薄膜振动耦合了。

现引入应力函数  $\phi$ , 使

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (8.168a)$$

按式 (8.166a) 有

$$N_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} h, \quad N_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} h, \quad N_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} h \quad (8.168b)$$

则式 (8.167a) 的两个方程已得到满足。三个变量满足了二个方程, 则还需满足另一个, 即协调方程, 由式 (8.164) 应为

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (8.169)$$

将式 (8.165) 及式 (8.168a) 代入此式, 即给出关于  $\phi, w$  的第一个基本方程

$$\nabla^2 \nabla^2 \phi = E \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (8.170a)$$

将式 (2.6) 代入式 (8.167 b), 再代入式 (8.167 c), 并注意到式 (8.168 b), 则给出关于  $\phi, w$  的第二个基本方程

$$D\nabla^2\nabla^2w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = h \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right] + q \quad (8.170 b)$$

也可简写为

$$\nabla^2\nabla^2\phi = -\frac{E}{2}L(w, w) \quad (8.171 a)$$

$$D\nabla^2\nabla^2w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = hL(w, \phi) + q \quad (8.171 b)$$

其中算子

$$L(\alpha, \beta) = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x \partial y} \quad (8.171 c)$$

式 (8.170) 或式 (8.171) 为直角坐标系平板大挠度振动的基本方程, 在每边应满足四个边界条件, 一般性为

$$u_n = 0 \text{ 或 } N_n = 0 \quad (8.172 a)$$

$$u_s = 0 \text{ 或 } N_{ns} = 0 \quad (8.172 b)$$

$$w = 0 \text{ 或 } V_n = 0 \quad (8.172 c)$$

$$\frac{\partial w}{\partial n} = 0 \text{ 或 } M_n = 0 \quad (8.172 d)$$

下面再列出几种特殊情况下的方程:

#### 1. 静力问题。

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2\nabla^2\phi &= -\frac{E}{2}L(w, w) \\ D\nabla^2\nabla^2w &= hL(w, \phi) + q \end{aligned} \right\} \quad (8.173 a)$$

即为著名的冯·卡门 (Von Kármán) 方程。

#### 2. 无矩板。 $D = 0$ , 有

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2\nabla^2\phi &= -\frac{E}{2}L(w, w) \\ hL(w, \phi) + q - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.173 b)$$

#### 3. 微弯板。 $w^* = w_0 + w$ , 有

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2\nabla^2\phi &= -\frac{E}{2}L(w, w) \\ D\nabla^2\nabla^2w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= hL(w^*, \phi) + q \end{aligned} \right\} \quad (8.173 c)$$

#### 4. 正交异性板

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{E_x} \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + \left( \frac{1}{G_{xy}} - \frac{\nu_{xy}}{E_x} - \frac{\nu_{yx}}{E_y} \right) \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{E_y} \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} &= -\frac{1}{2}L(w, w) \\ D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_{xy} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= hL(w, \phi) + q \end{aligned} \right\} \quad (8.173 d)$$

## 二、极坐标系的基本微分方程

在极坐标系中轴对称情况下与上述直角坐标系各式相对应的方程或关系式，有非线性位移-应变关系式：

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2, \quad \epsilon_\theta = \frac{u}{r} \quad (8.174a)$$

应变协调方程：

$$\frac{\partial(r\epsilon_\theta)}{\partial r} - \epsilon_r = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \quad (8.174b)$$

动平衡方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial(rN_r)}{\partial r} - N_\theta &= 0 \\ \frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{M_r}{r} - \frac{M_\theta}{r} - Q_r &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rQ_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( rN_r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + q &= \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (8.174c)$$

引入应力函数 $\phi$ ，使

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \quad (8.174d)$$

则类似直角坐标系过程，得基本方程组

$$\nabla^2 \nabla^2 \phi = -\frac{E}{2} L(w, w) \quad (8.175a)$$

$$D \nabla^2 \nabla^2 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = h L(w, \phi) + q \quad (8.175b)$$

其中算子

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} \quad (8.176a)$$

$$L(\alpha, \beta) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial r} \frac{\partial \beta}{\partial r} \right) \quad (8.176b)$$

对于非轴对称情况，类似可以推得基本方程组，形式上同(8.175)，只是其中算子

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \theta^2} \\ L(\alpha, \beta) &= \frac{\partial^2 \alpha}{\partial r^2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \beta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\partial^2 \beta}{\partial r^2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \alpha}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \theta^2} \right) \\ &\quad - 2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \beta}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (8.176d)$$

## 三、变分方程

平板大挠度振动的变分方程在形式上仍同小挠度方程为

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt + \int_{t_0}^{t_1} \iint q \delta w ds dt = 0 \quad (8.177a)$$

只是其中变形能包括弯曲和薄膜变形能两部分

$$U = U_b + U_m \quad (8.177b)$$

而其中  $U_0$  仍同小挠度公式 (2.14), (2.35), (2.36);  $U_m$  为薄膜力产生的变形能, 在直角坐标系中有

$$U_m = \frac{h}{2E} \iint \left\{ \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1+\nu) \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} ds \quad (8.177c)$$

在极坐标系中轴对称情况下有

$$U_m = \frac{h}{2E} \iint \left[ \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2 - 2\nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \right] ds \quad (8.177d)$$

#### 四、布勃诺夫-迦辽金法

在大挠度振动问题中常用一种布勃诺夫-迦辽金 (Попнов-Галёркин) 法。这一方法特点是在大挠度问题的联立方程中一个是精确求解, 另一个是积分满足, 解法相当简便、实用。其一般过程如下。

设满足边界条件 (8.172c), (8.172d) 的解

$$w = AT(t)w_0(x, y) \quad (8.178a)$$

$$\varphi = \varphi(x, y)T^2(t) \quad (8.178b)$$

其中  $w_0(x, y)$  为给定已知函数,  $\varphi(x, y)$ ,  $T(t)$  为待求函数。此解代入基本方程之一, 式 (8.171a), 有方程

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = -\frac{E}{2} A^2 L(w_0, w_0) \quad (8.179a)$$

解得

$$\varphi(x, y) = \varphi^0(c_i) + \varphi^* \quad (8.178c)$$

其中,  $\varphi^*$  为方程 (8.179a) 的特解,  $\varphi^0$  为其一般解, 包含待定系数  $c_i$  由边界条件 (8.172a), (8.172b) 确定, 将解 (8.178) 代入另一个基本方程 (8.171b), 用迦辽金法满足之, 得

$$\iint [D \nabla^2 \nabla^2 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - h L(w, \varphi) - q(x, y, t)] w_0(x, y) ds = 0 \quad (8.179b)$$

它是关于  $T(t)$  的非线性常微分方程, 一般有

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \alpha_0^2 T + f(T) = F(t) \quad (8.180)$$

关于这一方程的解法将集中在下一节讨论。而应用布勃诺夫-迦辽金法的具体例子在下面几个小节中介绍。

#### 五、轴对称圆板

用上述布勃诺夫-迦辽金法求解圆板的轴对称自由振动, 其基本方程为式 (8.175), (8.176)。周边  $x = a$  的边界条件取为

$$\text{横向简支, 平面自由: } w = M_r = N_r = 0 \quad (8.181a)$$

$$\text{横向简支, 平面约束: } w = M_r = u = 0 \quad (8.181b)$$

$$\text{横向固定, 平面自由: } w = \frac{\partial w}{\partial r} = N_r = 0 \quad (8.181c)$$

$$\text{横向固定, 平面约束: } w = \frac{\partial w}{\partial r} = u = 0 \quad (8.181 d)$$

设解为式 (8.178), 其中取

$$w_0(x, y) = 1 + c_1 \left(\frac{r}{a}\right)^2 + c_2 \left(\frac{r}{a}\right)^4 \quad (8.182 a)$$

式中, 为满足式 (8.181) 中头二个边界条件, 应

对横向简支边界, 取

$$c_1 = -\frac{6+2\nu}{5+\nu}, \quad c_2 = \frac{1+\nu}{5+\nu} \quad (8.182 b)$$

对横向固定边界, 取

$$c_1 = -2, \quad c_2 = 1 \quad (8.182 c)$$

将解 (8.182 a) 代入方程 (8.179 a), 得

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = -\frac{EA^2}{r} \left[ \frac{2c_1}{a} \left(\frac{r}{a}\right) + \frac{4c_2}{a} \left(\frac{r}{a}\right)^3 \right] \left[ \frac{2c_1}{a^2} + \frac{12c_2}{a^2} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \right] \quad (8.183 a)$$

解得

$$\varphi(x, y) = -EA^2 \left[ c \left(\frac{r}{a}\right)^2 + \frac{c_1^2}{16} \left(\frac{r}{a}\right)^4 + \frac{c_1 c_2}{18} \left(\frac{r}{a}\right)^6 + \frac{c_2^2}{48} \left(\frac{r}{a}\right)^8 \right] \quad (8.183 b)$$

式中,  $c$  为满足式 (8.181) 中第三个边界条件,

对平面自由边界, 应

$$c = -\frac{1}{24} (3c_1^2 + 4c_1 c_2 + 2c_2^2) \quad (8.183 c)$$

对平面约束边界, 应

$$c = -\frac{1}{24(1-\nu)} [3(3-\nu)c_1^2 + 4(5-\nu)c_1 c_2 + 2(7-\nu)c_2^2] \quad (8.183 d)$$

将解 (8.178 a), (8.178 b), (8.182 a), (8.183 b) 一起代入方程 (8.179 b), 对于自由振动 ( $q=0$ ), 有方程

$$\frac{\rho h a^4}{EA^3} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \alpha_0^2 T(t) + \beta_0^2 T^3(t) = 0 \quad (8.184 a)$$

式中对于不同边界条件有 ( $\nu=0.3$ )

横向简支, 平面自由:  $\alpha_0^2 = 2.242$ ,  $\beta_0^2 = 0.591$

横向简支, 平面约束:  $\alpha_0^2 = 2.242$ ,  $\beta_0^2 = 4.148$

横向固定, 平面自由:  $\alpha_0^2 = 9.768$ ,  $\beta_0^2 = 1.429$

横向固定, 平面约束:  $\alpha_0^2 = 9.768$ ,  $\beta_0^2 = 4.602$

(8.184 b)

圆板轴对称大挠度振动相对频率  $\omega_N/\omega_L$  ( $\nu=0.3$ )

表 8.10

边 界		$w_m/h$					
横 向	平 面	0	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0
简 支	自 由	1	1.019	1.065	1.124	1.214	1.337
简 支	约 束	1	1.122	1.372	1.689	2.123	2.525
固 定	自 由	1	1.014	1.040	1.079	1.135	1.193
固 定	约 束	1	1.028	1.101	1.220	1.374	1.531



方程 (8.184 a) 和方程 (8.180 a) 具有类似形式, 其解法也集中在下一节中讨论。文献[280]求解了方程 (8.184), 给出圆板轴对称大挠度振动相对频率 (非线性频率  $\omega_N$ ; 线性频率  $\omega_L$ ) 和相对幅值 (最大振幅  $w_m$ ; 板厚  $h$ ) 间关系见表 8.10。

表 8.10 中数据表明, 考虑大挠度振动效应后频率是提高了, 这正如一开始所介绍那样, 计及中面薄膜变形后, 使弯曲振动刚化; 平面约束边界的这一效应显著; 而且随挠度变化是非线性的。

## 六、四边简支矩形板

矩形板的基本方程为式 (8.171), 四边简支的边界条件为 (图 8.13)

$$x = \pm \frac{a}{2}, \quad w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (8.185 a)$$

$$u = N_{xy} = 0 \quad (8.185 b)$$

$$y = \pm \frac{b}{2}, \quad w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (8.185 c)$$

$$v = N_{xy} = 0 \quad (8.185 d)$$

在布勃诺夫-迦辽金法解 (8.178) 中, 取满足边界 (8.185 a), (8.185 c) 的

$$w = hT(t) \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \quad (8.186)$$

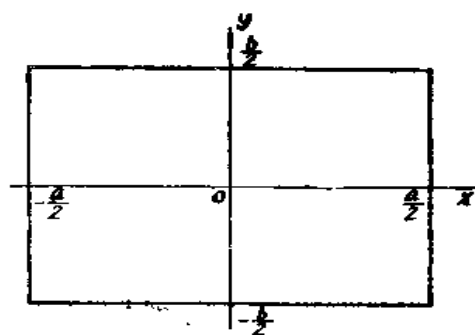


图 8.13

代入方程 (8.179 a), 其满足边界条件 (8.185 b), (8.185 d) 的解

$$\varphi = \varphi^0 + \varphi^*$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\pi^2 E h^2}{16 a^2} \left[ \frac{1 + \nu \left( \frac{a}{b} \right)^2}{1 - \nu^2} y^2 + \frac{\left( \frac{a}{b} \right)^2 + \nu}{1 - \nu^2} x^2 \right] \\ &\quad - \frac{E h^2}{32} \left[ \frac{b^2}{a^2} \cos \frac{2\pi}{b} y + \frac{a^2}{b^2} \cos \frac{2\pi}{a} x \right] \end{aligned} \quad (8.187)$$

将解 (8.186), (8.187) 一起代入方程 (8.179 b), 对于自由振动 ( $q = 0$ ), 有方程

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \alpha_0^2 T(t) + \beta_0^2 T^3(t) = 0 \quad (8.188)$$

式中,

$$\alpha_0^2 = \frac{\pi^4 D}{\rho h a^4} \left[ 1 + \left( \frac{a}{b} \right)^2 \right]^2 \quad (8.189 a)$$

$$\beta_0^2 = \frac{\pi^4 E h^2}{8 \rho a^4 (1 - \nu^2)} \left[ 1 + 2\nu \left( \frac{a}{b} \right)^2 + \left( \frac{a}{b} \right)^4 \right] + \frac{\pi^4 E h^2}{16 \rho a^2 b^2} \left[ \left( \frac{a}{b} \right)^2 + \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right] \quad (8.189 b)$$

方程 (8.188) 和方程 (8.180 a) 具有类似形式, 其解法也集中在下一节讨论。文献[42]求解了方程 (8.188), 给出四边简支矩形板大挠度振动相对频率 (非线性频率  $\omega_N$ ; 线性频率  $\omega_L$ ) 和相对幅值 (最大振幅  $w_m$ ; 板厚  $h$ ) 间关系见表 8.11。

对于其它边界矩形板大挠度振动, 均可用布勃诺夫-迦辽金法类似求解, 例如可参见 [42], [259], [280] 等文献, 其方板相应结果列于表 8.12。其中固定边界条件为

$$x = \pm \frac{a}{2}, \quad w = \frac{\partial w}{\partial x} = u = N_{xy} = 0 \quad (8.190 a)$$

$$y = \pm \frac{b}{2}; \quad w = \frac{\partial w}{\partial y} = v = N_{xy} = 0 \quad (8.190b)$$

四边简支矩形板大挠度振动相对频率 $\omega_N/\omega_L$  ( $\nu = 0.318$ )

表8.11

$a/b \backslash w_m/h$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
1.00	1	1.025	1.080	1.171	1.292	1.408
0.75	1	1.028	1.083	1.185	1.302	1.426
0.50	1	1.030	1.098	1.212	1.348	1.479
0.25	1	1.035	1.117	1.245	1.406	1.585
0	1	1.037	1.126	1.271	1.433	1.623

各种边界方板大挠度振动相对频率 $\omega_N/\omega_L$  ( $\nu = 0.3$ )

表8.12

边界类型 $w_m/h$	0	0.5	1.0	1.5	2.0
四边固定	1	1.052	1.123	1.368	1.567
对边简支对边固定	1	1.064	1.267	1.511	1.792
三边简支一边固定	1	1.095	1.346	1.667	2.053

从以上结果也可以看出, 考虑几何非线性效应后, 频率是提高的; 随挠度变化是非线性的; 而且简支边数较多, 频率也提高较多。

## § 8.10 平板的非线性弹性振动

平板振动的物理非线性问题中较为简单的一种是非线性弹性振动, 即材料的应力-应变关系是非线性的, 但与应变速度方向无关, 也即应力与应变有一一对应关系, 而和应变的历史无关。

### 一、基本方程

在这种情况下, 第二章薄板理论中的几何关系式 (2.1), (2.2) 仍成立, 但应力-应变关系不再遵循一般虎克定律给出的式 (2.3), 而有一般性非线性关系, 对于单向应力状态为

$$\sigma = f(\varepsilon) \quad (8.191a)$$

对于许多常用材料有

$$\sigma = E(\varepsilon - B\varepsilon^3) \quad (8.191b)$$

其中  $E$  为初始弹性模量,  $B$  为另一个新的材料常数, 其值为正值。在薄板情况下有应力-应变关系

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}[(\varepsilon_x - B\varepsilon_x^3) + \nu(\varepsilon_y - B\varepsilon_y^3)] \quad (8.192a)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}[(\varepsilon_y - B\varepsilon_y^3) + \nu(\varepsilon_x - B\varepsilon_x^3)] \quad (8.192b)$$

$$\tau_{xy} = G[\gamma_{xy} - B\gamma_{xy}^3] \quad (8.192c)$$

将式 (2.2) 代入上式, 并积分得内力表达式

$$M_x = -D \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \bar{B} \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] \right\} \quad (8.193 a)$$

$$M_y = -D \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \bar{B} \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right] \right\} \quad (8.193 b)$$

$$M_{xy} = -D(1-\nu) \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \bar{B} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \quad (8.193 c)$$

代入动平衡方程, 即式 (2.8)

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q = 0 \quad (8.194)$$

得平板的非线性振动基本方程

$$\begin{aligned} & D \left\{ \nabla^2 \nabla^2 w - 3 \bar{B} \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) + 2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \left( \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \nu \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 - 2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \right] \right\} \\ & + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = L(w) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q \end{aligned} \quad (8.195)$$

其边界条件形式上同式 (2.11), 只是内力表达式要用本节非线性关系式。

对于这类非线性偏微分方程要解析求解是相当困难的, 目前大都采用第六章的各种近似解法, 特别是迦辽金法。可以取满足边界条件解

$$w(x, y, t) = T(t) w_0(x, y) \quad (8.196 a)$$

按迦辽金法原理 (§ 7.3), 有算式

$$\iint [L(T w_0) + \rho h w_0 \frac{d^2 T}{dt^2} - q] w_0(x, y) ds = 0 \quad (8.196 b)$$

给出关于  $T(t)$  的非线性常微分方程

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \alpha_0^2 T(t) + \beta_0^2 T^3(t) = F(t) \quad (8.197 a)$$

按方程 (8.195), 有

$$\alpha_0^2 = \frac{D}{\rho h} \frac{\iint (\nabla^2 \nabla^2 w_0) w_0 ds}{\iint w_0^2 ds} \quad (8.197 b)$$

$$\begin{aligned} \beta_0^2 = & -\frac{3 \bar{B} D}{\rho h} \iint \left\{ \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 \left( \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} \right) + 2 \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 \left( \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \right. \\ & \left. + \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 \left( \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \right) + \nu \left[ \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 - 2 \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 \right] \left( \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \right\} w_0 ds + \iint w_0^2 ds \end{aligned} \quad (8.197 c)$$

这一方程和前述一些非线性情况一样, 也具有一般非线性动力方程形式。下面将专门列一小

节来讨论它的求解方法。

## 二、非线性动力方程的近似解析解

综上所述,板件的各种非线性振动(包括本书未曾介绍的其它情况)最后可归纳为关于时间函数的广义坐标 $T(t)$ 所应满足的非线性常微分方程,一般形式为

$$M\ddot{T} + C\dot{T} + f(T, \dot{T}, \ddot{T}) = F(t) \quad (8.198a)$$

上面讲到的几何非线性、物理非线性以及非线性地基等均属于刚度非线性,方程中非线性函数 $f$ 只包含 $T$ 项<sup>[249][366]</sup>;如果具有惯性、阻尼非线性情况,则 $f$ 中相应含有 $\ddot{T}$ ,  $\dot{T}$ 项。这里只讨论刚度非线性问题的解法,并不计入阻尼,即方程具有一般形式

$$M\ddot{T} + R(T) = F(t) \quad (8.198b)$$

式中 $R$ 为 $T$ 的非线性函数。

### (一) 直接积分法

方程(8.198b)中抗力函数 $R(T)$ 一般为多项式,即

$$R(T) = a_1 T + a_2 T^2 + a_3 T^3 + \dots = a_1 \left[ T + \sum_{i=2}^n \frac{a_i}{a_1} T^i \right] = a_1 f(T) \quad (8.199a)$$

$$R'(T) = a_1 + \sum_{i=2}^n i a_i T^{i-1} \quad (8.199b)$$

$$R'(0) = a_1 \quad (8.199c)$$

所以 $a_1$ 为抗力函数的初始斜率(刚度)。将方程(8.198b)改写为

$$\ddot{T} + \frac{a_1}{M} f(T) = \ddot{T} + \omega_0^2 f(T) = \frac{F(t)}{M} \quad (8.198c)$$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{a_1}{M}}$ 为初始阶段相当弹性频率。下面将讨论有初始位移 $T_0$ , 无初始速度 $\dot{T}_0 = 0$ 的自由振动问题。其方程为

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \omega_0^2 f(T) = 0$$

考虑到

$$\frac{d^2 T}{dt^2} = \frac{d\dot{T}}{dt} = \frac{d\dot{T}}{dT} \cdot \frac{dT}{dt} = \dot{T} \frac{d\dot{T}}{dT} = \frac{1}{2} \frac{d(\dot{T}^2)}{dT} \quad (a)$$

则方程可改成

$$\frac{1}{2} \frac{d(\dot{T}^2)}{dT} + \omega_0^2 f(T) = 0 \quad (b)$$

即

$$\frac{1}{2} d(\dot{T}^2) = -\omega_0^2 f(T) dT \quad (c)$$

将此式从 $t=0$ 到 $t=t$ 积分二次,并考虑到该阶段运动的 $\dot{T} < 0$ 和初始 $\dot{T}_0 = 0$ ,则有

$$t = - \int_{T_0}^{T(t)} \frac{dT_1}{\sqrt{2\omega_0^2 \int_{T_1}^{T_0} f(T_2) dT_2}} \quad (d)$$

取 $T(t) = 0$ ,上述积分值代表从初位移 $T_0$ 到位移 $T=0$ 所需要的时间,即 $\frac{1}{4}$ 周期,也即

$\frac{1}{4f_N}$ , 所以非线性振动的频率为

$$f_N = \left[ 4 \int_0^{T_0} \frac{dT_1}{\sqrt{2\omega_0^2 \int_{T_1}^{T_0} f(T_2) dT_2}} \right]^{-1} \quad (8.200)$$

【例】如果有

$$R(T) = k(T + aT^3) \quad (8.201a)$$

即

$$f(T) = T + aT^3, \quad \omega_0^2 = \sqrt{\frac{k}{M}} \quad (e)$$

代入解 (8.200) 有

$$f_N = \frac{\frac{\omega_0}{4} \sqrt{\frac{\theta}{2}}}{\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)\left(\frac{2+\theta}{\theta} + u^2\right)}}} \quad (f)$$

其中引入了

$$u = \frac{T}{T_0}, \quad \theta = aT_0^2 \quad (g)$$

根据第一类完全椭圆积分

$$F\left(\frac{a}{c}, \phi\right) = c \int_0^x \frac{du}{\sqrt{(a^2 - u^2)(b^2 + u^2)}} \quad (h)$$

其中

$$c^2 = a^2 + b^2, \quad \sin^2 \phi = \frac{c^2 x^2}{a^2(b^2 + x^2)} \quad (i)$$

若取

$$a^2 = 1, \quad b^2 = \frac{2+\theta}{\theta}, \quad x = 1, \quad c^2 = \frac{2(1+\theta)}{\theta} \quad (j)$$

有

$$\sin^2 \phi = 1, \quad \phi = \frac{\pi}{2} \quad (k)$$

则可用椭圆积分表示上述频率 (f) 为

$$f_N = \frac{\omega \sqrt{1+\theta}}{4F\left(\sqrt{\frac{\theta}{2(1+\theta)}}, \frac{\pi}{2}\right)} \quad (8.201b)$$

若

$$R(T) = kT^3 \quad (8.201c)$$

则可算得

$$f_N = 0.1348 \omega_0 T_0 \quad (8.201d)$$

这结果表明, 随幅值  $T_0$  增加, 频率  $f_N$  是增加的。这是非线性振动的一个特点。

(二) 小参数法

例如, 取非线性动力方程为

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \omega_0^2 T + \mu T^3 = 0 \quad (8.202)$$

在一般情况下非线性参数 $\mu$ 较小, 则非线性振动频率 $\omega_N$ 与初始频率 $\omega_0$ 之差可用小参数 $\mu$ 的多项式展开为

$$\omega_0^2 = \omega_N^2 + c_1 \mu + c_2 \mu^2 + c_3 \mu^3 + \dots \quad (8.203 a)$$

解 $T(t)$ 也可展开为 $\mu$ 的多项式为

$$T(t) = \varphi_0(t) + \varphi_1(t)\mu + \varphi_2(t)\mu^2 + \varphi_3(t)\mu^3 + \dots \quad (8.203 b)$$

其中 $c_1, c_2, c_3, \dots$ 为待定系数,  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ 为待定函数。将式(8.203) (例如, 各取四项) 代入方程(8.202) (略去高阶小量 $\mu^4, \mu^5, \dots$ 项), 由 $\mu^0, \mu^1, \mu^2, \mu^3$ 项的系数为零, 得一系列微分方程:

$$\ddot{\varphi}_0 + \omega_N^2 \varphi_0 = 0 \quad (8.204 a)$$

$$\ddot{\varphi}_1 + \omega_N^2 \varphi_1 = -c_1 \varphi_0 - \varphi_0^3 \quad (8.204 b)$$

$$\ddot{\varphi}_2 + \omega_N^2 \varphi_2 = -c_2 \varphi_0 - c_1 \varphi_1 - 3\varphi_0^2 \varphi_1 \quad (8.204 c)$$

$$\ddot{\varphi}_3 + \omega_N^2 \varphi_3 = -c_3 \varphi_0 - c_2 \varphi_1 - c_1 \varphi_2 - 3\varphi_0^2 \varphi_2 - 3\varphi_0 \varphi_1^2 \quad (8.204 d)$$

设有初位移 $T_0$ , 而初速度 $\dot{T}_0 = 0$ , 也展开为 $\mu$ 的多项式

$$T(0) = \varphi_0(0) + \varphi_1(0)\mu + \varphi_2(0)\mu^2 + \varphi_3(0)\mu^3 + \dots = T_0 \quad (l)$$

$$\dot{T}(0) = \dot{\varphi}_0(0) + \dot{\varphi}_1(0)\mu + \dot{\varphi}_2(0)\mu^2 + \dot{\varphi}_3(0)\mu^3 + \dots = 0 \quad (m)$$

得初始条件组:

$$\varphi_0(0) = T_0, \quad \dot{\varphi}_0(0) = 0 \quad (8.205 a)$$

$$\varphi_1(0) = 0, \quad \dot{\varphi}_1(0) = 0 \quad (8.205 b)$$

$$\varphi_2(0) = 0, \quad \dot{\varphi}_2(0) = 0 \quad (8.205 c)$$

$$\varphi_3(0) = 0, \quad \dot{\varphi}_3(0) = 0 \quad (8.205 d)$$

方程组(8.204)在初始条件(8.205)下求解。由第一组方程(8.204 a)及条件(8.205 a)得解

$$\varphi_0(t) = T_0 \cos \omega_N t \quad (8.206 a)$$

代入方程(8.204 b), 得方程

$$\ddot{\varphi}_1 + \omega_N^2 \varphi_1 = -(c_1 T_0 + \frac{3}{4} T_0^3) \cos \omega_N t - \frac{T_0^3}{4} \cos 3\omega_N t \quad (n)$$

这是强迫振动方程, 力函数 $\cos \omega_N t$ 的频率与方程固有频率 $\omega_N$ 相重, 解为无限大, 是不可能的, 因此只有取此力函数的系数为零, 从而给出

$$c_1 = -\frac{3}{4} T_0^3 \quad (8.207 a)$$

则在初始条件(8.205 b)下解方程(8.204 b), 有解

$$\varphi_1(t) = \frac{T_0^3}{32\omega_N^2} (\cos 3\omega_N t - \cos \omega_N t) \quad (8.206 b)$$

类似, 由方程(8.204 c)及条件(8.205 c)得

$$c_2 = \frac{3T_0^4}{128\omega_N^2} \quad (8.207 b)$$

$$\varphi_2(t) = \frac{T_0^5}{1024\omega_N^4} (\cos 5\omega_N t - \cos \omega_N t) \quad (8.206 c)$$

由方程(8.204 d)及条件(8.205 d)得

$$c_3 = -\frac{9T_0^4}{512\omega_N^4} \quad (8.207c)$$

$$\varphi_3(t) = \frac{T_0^7}{32768\omega_N^8} (\cos 7\omega_N t - 6\cos 3\omega_N t + 5\cos \omega_N t) \quad (8.206d)$$

代回式 (8.203), 给出解

$$\omega_N^2 = \omega_0^2 + \frac{3}{4}T_0^2\mu - \frac{3T_0^4}{128\omega_N^2}\mu^2 + \frac{9T_0^6}{512\omega_N^4}\mu^3 + \dots \quad (8.208a)$$

$$\begin{aligned} T(t) = & T_0 \cos \omega_N t + \frac{T_0^3}{32\omega_N^2} \mu (\cos 3\omega_N t - \cos \omega_N t) + \frac{T_0^5}{1024\omega_N^4} \mu^2 \\ & \times (\cos 5\omega_N t - \cos \omega_N t) + \frac{T_0^7}{32768\omega_N^6} \mu^3 (\cos 7\omega_N t \\ & - 6\cos 3\omega_N t + 5\cos \omega_N t) + \dots \end{aligned} \quad (8.208b)$$

### (三) 分段线性化法

对于基本方程 (8.198b) 中抗力函数  $R(T)$  总可用分段线性化代替来加以近似 (图 8.14)。若初始条件为  $T(0) = T_0 = 0$ ,  $\dot{T}(0) = \dot{T}_0 > \omega_1 T_1$ , 则在第一阶段内 ( $0 \leq t \leq t_1$ ) 满足初始条件的线性解为

$$T = \frac{\dot{T}_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t, \quad \dot{T} = \dot{T}_0 \cos \omega_1 t \quad (8.209a)$$

其中

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{M}} \quad (8.209b)$$

第一阶段的结束时刻  $t_1$  由  $T = T_1$  解得

$$t_1 = \frac{1}{\omega_1} \sin^{-1} \left( \frac{\omega_1 T_1}{\dot{T}_0} \right) \quad (8.209c)$$

求出  $t_1$  时刻速度

$$\dot{T}(t_1) = \dot{T}_1 = \dot{T}_0 \cos \omega_1 t_1 = \dot{T}_0 \sqrt{1 - \left( \frac{\omega_1 T_1}{\dot{T}_0} \right)^2} \quad (8.209d)$$

在第二阶段的运动方程为

$$M\ddot{T} + k_1 T + (k_2 - k_1)(T - T_1) = 0 \quad (8.210a)$$

或

$$M\ddot{T} + k_2 T = (k_2 - k_1)T_1 \quad (8.210b)$$

根据  $t_1$  时刻条件  $T_1$  及  $\dot{T}_1$ , 可求解方程 (8.210b), 得

$$T = \left( 1 - \frac{k_1}{k_2} \right) T_1 + \frac{k_1}{k_2} T_1 \cos \omega_2 (t - t_1) + \frac{\dot{T}_1}{\omega_2} \sin \omega_2 (t - t_1) \quad (8.210c)$$

$$\dot{T} = -\frac{k_1}{k_2} \omega_2 T_1 \sin \omega_2 (t - t_1) + \dot{T}_1 \cos \omega_2 (t - t_1) \quad (8.210d)$$

式中

$$\omega_2 = \sqrt{k_2/M} \quad (8.210e)$$

依此类推, 可以一直算下去。若最大值时刻  $t_m$  位于某个 (例如, 在第二) 阶段, 则可由  $\dot{T}(t_m) = 0$  给出

$$t_m = t_1 + \frac{1}{\omega_2} \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{k_2 \dot{T}_1}{k_1 \omega_2 T_1} \right) \quad (8.211a)$$

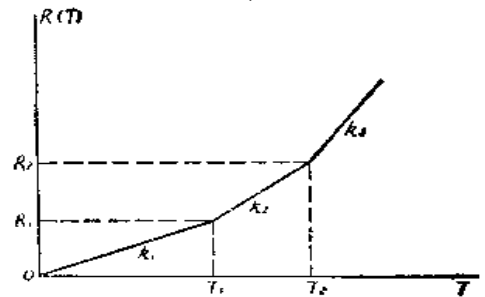


图 4.14

则非线性频率为

$$f_N = \frac{1}{4t_m} = \left[ 4t_1 + \frac{4}{\omega_2} \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{k_2 \dot{T}_1}{k_1 \omega_2 T_1} \right) \right]^{-1} \quad (8.211 b)$$

最大幅值为

$$T_m = T(t_m) = \left( 1 - \frac{k_1}{k_2} \right) T_1 + \sqrt{\left( \frac{k_1}{k_2} T_1 \right)^2 + \left( \frac{\dot{T}_1}{\omega_2} \right)^2} \quad (8.211 c)$$

#### (四) 强迫振动解

上面各节分析表明, 板件动力非线性问题的强迫振动将归结为求解非齐次非线性常微分方程, 通常为

$$M\ddot{T} + C\dot{T} + k(T + aT^3) = F(t) \quad (8.212 a)$$

可改写为

$$\ddot{T} + 2\nu\dot{T} + \omega_0^2 T + a\omega_0^2 T^3 = P(t) \quad (8.212 b)$$

现讨论外载为

$$P(t) = P_0 \cos pt \quad (8.212 c)$$

可设其一次近似解为

$$T(t) = A \cos(pt - \varphi) \quad (8.213 a)$$

代回方程 (8.212 b), 可求得  $A$  应满足的非线性代数方程

$$a\omega_0^2 A^3 + (\omega_0^2 - p^2)A \pm P_0 \sqrt{1 - \frac{4\nu^2}{P_0^2} p^2 A^2} = 0 \quad (8.213 b)$$

及  $\varphi$  值

$$\rho = \arcsin \frac{2\nu p}{P_0} A \quad (8.213 c)$$

从而求解。

## § 8.11 平板的动力弹塑性分析

物理非线性问题中另一种常遇的是塑性问题, 即应力-应变关系不但是非线性的, 而且与应变速度方向及循环次数有关, 也即加载和卸载的应力-应变曲线是不一致的情况 [360][105]。

动力塑性变形与静力塑性变形不一样。在动力分析中, 由于惯性力作用, 在载荷还没上升到静力极限载荷之前, 在弹塑性物体内部已可能有“无限制”的塑性变形; 而另一方面在静态时物体在静力极限载荷作用下可以发生“无限制”塑性变形, 载荷不能再行增加, 而在动态时考虑了惯性力, 则载荷尚可超过静力极限载荷, 并与一定最大变形相对应; 在卸载后, 结构达到变形最大值后再行减小, 并由于惯性力作用结构变形仍继续进行, 直到静止; 最后将保留有一部分残余变形; 另外, 在动载情况下, 塑性铰(线、区)在变形过程中有可能发生移动、合并、变形等现象, 从而可分为稳态、非稳态等不同情况。

严格来说, 平板动塑性问题全部微分方程包括运动方程、几何关系、边界条件、初始条件、屈服条件、流动法则和连续性条件。在数学上要精确满足全部方程往往是相当困难的, 尤其是弹塑性分析。只有极少数在规定条件限制下才有严格解析解(如[57])。

在动塑性分析中广泛应用各种变分原理, 其中包括位移变分原理、应力变分原理等 [304]。位移变分原理是指在满足速度边界条件、连续条件、不可压缩条件的运动可能速度场中真正



解,使泛函取最小值;应力变分原理是指满足力边界条件、屈服条件、流动法则的动力可能应力场中真正解,使泛函取最小值。

板件的塑性分析模型包括有刚塑性、弹塑性等,塑性条件包括有理想塑性、强化塑性等。

板件动力塑性分析方法包括有基本微分方程完全解和各种数值解法,而比较实用的有等效单自由度体系解和基于变分原理的近似解。本节将主要介绍后两种方法,可用于一般性板件的弹塑性分析,具体推导将针对具有明显塑性铰线的板件(如钢板、钢筋混凝土板)。

### 一、等效单自由度弹塑性体系解

对于各种边界、各种形状的板件均可按动能、变形能以及外载作功等效准则,将原板件简化为仅包括等效质量、等效外载及具有非线性抗力的等效弹簧的单自由度弹塑性体系,而再精确解析求解〔338〕。

一般,抗力函数 $R(w)$ 在弹性阶段是具有一定刚度 $k_e$ 的线性函数。从产生塑性铰线开始至达到静力极限状态过程中,由于塑性铰线不断扩展,板件整体刚度逐渐变化,而具有某种曲线形状(图8.15),最后出现理想塑性变形阶段。整个过程是非线性的,但作为最大弹塑性动挠度及动力极限载荷计算,可以近似用双折线替代(图8.15)。而这种抗力函数也就只需用二个数值: $k_e$ 及 $R_m$ 来表示,它们与板件形状、边界条件等具体情况有关,已在静力弹塑性分析中给出。

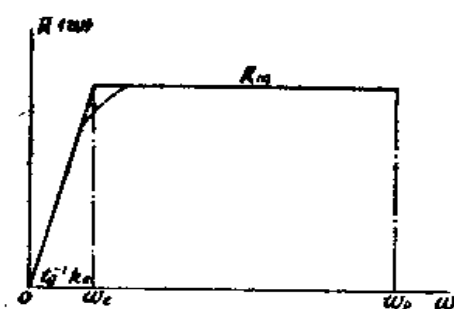


图 8.15

#### (一) 基本方程

等效单自由度体系的挠度 $w$ 所满足的基本方程为

$$M \frac{d^2 w(t)}{dt^2} + R(w) = P(t) \quad (8.214)$$

其中,按动能等效分别有弹性与塑性阶段的等效质量

$$M_e = \frac{\iint \rho h W_e^2 ds}{W_{e,m}^2}, \quad M_p = \frac{\iint \rho h W_p^2 ds}{W_{p,m}^2} \quad (8.215)$$

式中, $W_e(x,y)$ ,  $W_p(x,y)$ 为假设的弹性、塑性阶段挠曲变形分布函数, $W_{e,m}$ 与 $W_{p,m}$ 分别为它们某参考点(一般取最大值点)值。

按外载作功等效,对于板上外载 $q(x,y,t) = p(x,y)q(t)$ 有等效外载

$$P(t) = q(t)K_e \quad (8.216a)$$

对于弹性、塑性阶段,分别有

$$K_{qe} = \frac{\iint p(x,y) W_e ds}{W_{e,m}}, \quad K_{qp} = \frac{\iint p(x,y) W_p ds}{W_{p,m}} \quad (8.216b)$$

等效抗力 $R(w)$ 见图8.15,其中

$$k_e = k_0 K_{qe}, \quad R_m = q_s K_{qp} \quad (8.217a)$$

利用变形能等效, 可以证明<sup>[70]</sup>有

$$K_{R_s} = K_{q_s}, \quad K_{R_p} = K_{q_p} \quad (8.217 b)$$

而 $k_0$ 为板件参考点产生单位静力弹性挠度所需总载,  $q_s$ 为板件静力极限总载荷。

由图8.15知,

$$w_s = R_m / k_s \quad (8.218 a)$$

而有

$$w_p = \nu w_s \quad (8.218 b)$$

式中 $w_p$ 为极限挠度,  $\nu$ 为延伸率。

## (二) 弹性阶段分析

基本方程 (8.214) 现为

$$\frac{d^2 w_1}{dt^2} + \omega^2 w_1 = \frac{P_s(t)}{M_s}, \quad \omega = \sqrt{\frac{k_s}{M_s}} \quad (8.219)$$

这是一般单自由度弹性体系方程, 有解

$$w_1(t) = \frac{1}{M_s \omega} \int_0^t p_s(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau = \frac{p_0}{M_s \omega^2} K_{q_s} T(t) \quad (8.220 a)$$

其中 $p_0$ 为 $q(t)$ 的特征值, 而

$$T(t) = \frac{\omega}{p_0} \int_0^t q(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau \quad (8.220 b)$$

其解根据具体 $q(t)$ 可详见 § 6.3。由解 (8.220) 可求出最大值时刻 $t_m$ 及最大值 $w_{1max}$ 。当恰好 $w_{1max} = w_1(t_m) = w_s$ 时求出的相应外载 $p_0$ 即为动力屈服载荷, 代入式 (8.220), (8.218), (8.217), 可得其值为

$$q_d = \frac{q_s}{T(t_m)} \quad (8.221)$$

在外载超过动力屈服载荷 $q_d$ 情况下, 最大动挠度将超过 $w_s$ , 我们称到达 $w_s$ 之时刻为 $t_s$ , 其定义为:  $w_1(t_s) = w_s$ , 代入式 (8.220), (8.218), (8.217), 可求得 $t_s$ 所满足的方程

$$T(t_s) = \frac{q_s}{p_0} \quad (8.222)$$

其中 $p_0$ 为实际所加外载特征值。在 $t = t_s$ 时刻之速度

$$\dot{w}_1(t_s) = \dot{w}_s = \frac{p_0}{M_s \omega^2} K_{q_s} \dot{T}(t_s) \quad (8.223)$$

## (三) 塑性阶段分析

基本方程 (8.214) 现为

$$\frac{d^2 w_2}{dt^2} = \frac{P_p(t) - R_m}{M_p} = \frac{K_{q_p}}{M_p} [q(t) - q_s] \quad (8.224)$$

在初始条件 $w_2(t_s) = w_s$ ,  $\dot{w}_2(t_s) = \dot{w}_s$ 下其解为

$$w_2(t) = \frac{K_{q_p}}{M_p} \left[ \varphi(t) - \frac{q_s}{2} (t^2 - 2t_s t + t_s^2) \right] + \dot{w}_s (t - t_s) + w_s \quad (8.225 a)$$

而

$$\varphi(t) = \int_{t_s}^t d\tau_1 \int_{t_s}^{\tau_1} q(\tau_2) d\tau_2 \quad (8.225 b)$$

由 $\frac{dw_2}{dt} = 0$ 可求得最大值时刻 $t_m$ 的方程

$$\frac{K_{qp}}{M_p}[\varphi'(t_m) - \dot{q}_s(t_m - t_s)] + \dot{w}_s = 0 \quad (8.226)$$

解出  $t_m$ ，代入解 (8.225 a)，即可求得最大弹塑性动挠度值

$$w_{2max} = w_2(t_m) = \frac{K_{qp}}{M_p} \left[ \varphi(t_m) - \frac{q_s}{2}(t_m^2 - 2t_s t_m + t_s^2) \right] + \dot{w}_s(t_m - t_s) + w_s \quad (8.227)$$

式中各量在前面诸公式中已给出。

#### (四) 动力极限载荷及残余挠度

当最大动挠度等于极限挠度，即  $w_{2max} = w_p$  时的外载为动力极限载荷  $P_d$ ，而极限挠度又一般用延伸率  $\nu$  来反映，因此由式 (8.227) 得

$$\nu = \frac{w_p}{w_s} = \frac{w_{2max}}{w_s} = 1 + \frac{K_{qp}}{M_p w_s} \left[ \varphi(t_m) - \frac{q_s}{2}(t_m^2 - 2t_s t_m + t_s^2) \right] + \frac{\dot{w}_s}{w_s}(t_m - t_s) = 1 + G(p_0) \quad (8.228 a)$$

从而解出这时的  $p_0$  即为动力极限载荷

$$P_d = G^{-1}[\nu - 1] \quad (8.228 b)$$

其中函数  $G$  见式 (8.228 a)。

该体系达  $w_p$  后，卸载变形的刚度系数接近于  $K_s$ ，故最后残余挠度近似为

$$w^* = w_p - w_s = (\nu - 1)w_s \quad (8.229 a)$$

若体系没有达到极限挠度，则最后残余挠度近似为

$$w^* = w_{2max} - w_s = \frac{K_{qp}}{M_p} \left[ \varphi(t_m) - \frac{q_s}{2}(t_m^2 - 2t_s t_m + t_s^2) \right] + \dot{w}_s(t_m - t_s) \quad (8.229 b)$$

【例】受均布冲击载荷作用的四边简支矩形板的刚塑性分析。

考虑稳态，即塑性铰不随时间变化情况。则铰线分布及外载波形如图 8.16 所示。按板件静力极限分析有铰线位置参数

$$\beta_1 = \frac{b}{a}, \alpha_1 = \beta_1^2 \left( \sqrt{1 + \frac{3}{\beta_1^2}} - 1 \right) \quad (8.230 a)$$

按上述各式可算得

$$M_p = \rho h a b \left( \frac{2 - \alpha_1}{6} \right) \quad (8.230 b)$$

$$K_{qp} = \frac{3 - \alpha_1}{6} \quad (8.230 c)$$

$$q_s = \frac{6M_p(\alpha_1 + \beta_1^2)}{b^2 \alpha_1(3 - \alpha_1)} \quad (8.230 d)$$

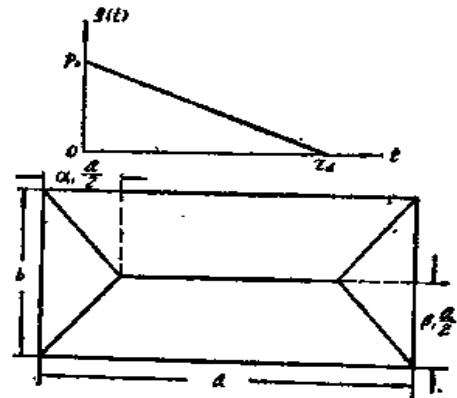


图 8.16

对于刚塑性板有  $w_s = \dot{w}_s = 0$ ，因而按式 (8.225) 给出动挠度值

$$w(t) = \frac{p_0(3-\alpha_1)}{2\rho h a b(2-\alpha_1)} \times \begin{cases} \left[ \left(1 - \frac{q_s}{p_0}\right)t^2 - \frac{t^3}{3\tau_d} \right], & t \leq \tau_d \\ \left[ \tau_d t - \frac{q_s t^2}{p_0} - \frac{\tau_d^2}{3} \right], & t > \tau_d \end{cases} \quad (8.230 e)$$

由方程 (8.226) 可解得最大值时刻

$$t_m = \begin{cases} 2\tau_d \left(1 - \frac{q_s}{p_0}\right), & t_m \leq \tau_d, \text{ 即 } p_0 \leq 2q_s \\ \frac{\tau_d p_0}{2q_s}, & t_m > \tau_d, \text{ 即 } p_0 > 2q_s \end{cases} \quad (8.230 f)$$

上式表明, 静力极限载荷  $q_s$  的二倍是个界限, 当外载峰值超出此值, 则最大时刻发生在无载荷作用 (超过正压作用时间) 时刻。再代回解 (8.230 e), 得最大刚塑性动挠度值

$$w_m = \frac{(3-\alpha_1)}{6(2-\alpha_1)} \frac{p_0 \tau_d^2}{\rho h a b} \times \begin{cases} 4 \left[1 - \frac{q_s}{p_0}\right]^3, & p_0 \leq 2q_s \\ \left[\frac{3}{4} \frac{p_0}{q_s} - 1\right], & p_0 > 2q_s \end{cases} \quad (8.230 g)$$

上式的解表明, 当外载之  $p_0 \leq 2q_s$  时,  $w_m$  随  $p_0$  增长是一次及负幂函数关系; 当外载之  $p_0 > 2q_s$  后,  $w_m$  随  $p_0$  增长是二次函数关系。同时也看出, 当动力外载峰值  $p_0$  超过静力极限值  $q_s$  后, 最大挠曲还是有限的, 和外载有一一对应关系, 但关系是非线性的。

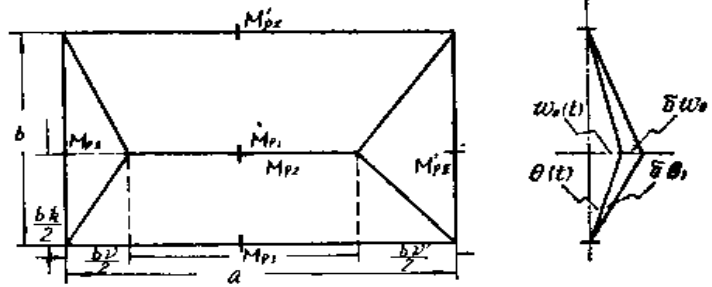


图 8.17

四边支承刚塑性矩形板件<sup>[342][351]</sup>。各处极限弯矩分别为  $M_{p1}, M_{p2}, M_{p3}, M_{p4}, M_{p5}, M_{p6}, M_{p7}, M_{p8}, M_{p9}, M_{p10}, M_{p11}, M_{p12}, M_{p13}, M_{p14}, M_{p15}, M_{p16}, M_{p17}, M_{p18}, M_{p19}, M_{p20}, M_{p21}, M_{p22}, M_{p23}, M_{p24}, M_{p25}, M_{p26}, M_{p27}, M_{p28}, M_{p29}, M_{p30}, M_{p31}, M_{p32}, M_{p33}, M_{p34}, M_{p35}, M_{p36}, M_{p37}, M_{p38}, M_{p39}, M_{p40}, M_{p41}, M_{p42}, M_{p43}, M_{p44}, M_{p45}, M_{p46}, M_{p47}, M_{p48}, M_{p49}, M_{p50}, M_{p51}, M_{p52}, M_{p53}, M_{p54}, M_{p55}, M_{p56}, M_{p57}, M_{p58}, M_{p59}, M_{p60}, M_{p61}, M_{p62}, M_{p63}, M_{p64}, M_{p65}, M_{p66}, M_{p67}, M_{p68}, M_{p69}, M_{p70}, M_{p71}, M_{p72}, M_{p73}, M_{p74}, M_{p75}, M_{p76}, M_{p77}, M_{p78}, M_{p79}, M_{p80}, M_{p81}, M_{p82}, M_{p83}, M_{p84}, M_{p85}, M_{p86}, M_{p87}, M_{p88}, M_{p89}, M_{p90}, M_{p91}, M_{p92}, M_{p93}, M_{p94}, M_{p95}, M_{p96}, M_{p97}, M_{p98}, M_{p99}, M_{p100}$  (由于各处布筋不一而值有所不同, 对于简支边其值取为零), 如图8.17所示, 并引入相对比例参数:

$$\lambda = \frac{a}{b}, \quad \alpha = \frac{M_{p2}}{M_{p1}}, \quad \beta_1 = \frac{M_{p3}}{M_{p1}}, \quad \beta'_1 = \frac{M'_{p1}}{M_{p1}}, \quad \beta_2 = \frac{M_{p4}}{M_{p2}}, \quad \beta'_2 = \frac{M'_{p2}}{M_{p2}} \quad (8.231)$$

### (一) 稳态刚塑性分析

假设塑性铰线分布如图8.17所示, 并在变形过程中保持不变 (其中, 铰线位置参数有  $\nu, \nu', k$ )。均布外载、内力、惯性力的虚功分别为

$$\delta L_q = \iint q(x, y, t) \delta w ds = \frac{q(t)}{12} b^2 [6\lambda - (\nu + \nu')] \delta w_0 \quad (8.232 a)$$

$$\delta L_M = \int_L -M_p \delta \theta dL = -2M_{p1} \left[ \lambda \left( \frac{1+\beta_1}{k} + \frac{1+\beta'_1}{2k} \right) + \alpha \left( \frac{1+\beta_2}{\nu} + \frac{1+\beta'_2}{\nu'} \right) \right] \delta w_0 \quad (8.232 b)$$

$$\delta L_\rho = \iint -\rho h \ddot{w} \delta w ds = -\frac{\rho h}{12} b^2 [4\lambda - (\nu + \nu')] \ddot{w}_0 \delta w_0 \quad (8.232 c)$$

其中 $w_0$ 为某参考点（一般取挠度最大值点）挠度，积分域： $s$ 为板面， $L$ 为铰线。将式(8.232)代入虚功原理： $\delta L_q + \delta L_M + \delta L_p = 0$ ，可得 $w_0$ 的基本方程

$$A \frac{d^2 w_0}{dt^2} = \left[ \frac{q(t)}{q_s} - 1 \right] \quad (8.233 a)$$

$$A = \frac{\rho h}{q_s} \times \frac{[4\lambda - (\nu + \nu')]}{[6\lambda - (\nu + \nu')]} \quad (8.233 b)$$

而其中静力极限载荷 $q_s$ 可由 $\delta L_q + \delta L_M = 0$ 给出为

$$q_s = \frac{24M_{p1}}{b^2[6\lambda - (\nu + \nu')]} \left[ \lambda \left( \frac{1 + \beta_1}{k} + \frac{1 + \beta'_1}{2 - k} \right) + \alpha \left( \frac{1 + \beta_2}{\nu} + \frac{1 + \beta'_2}{\nu'} \right) \right] \quad (8.234)$$

再由 $\frac{\partial q_s}{\partial k} = \frac{\partial q_s}{\partial \nu} = \frac{\partial q_s}{\partial \nu'} = 0$ 可得铰线位置参数

$$k = \frac{2}{1 + \sqrt{\frac{1 + \beta'_1}{1 + \beta_1}}}, \quad \nu' = \nu \sqrt{\frac{1 + \beta'_2}{1 + \beta_2}} \quad (8.235 a)$$

$$\nu = \frac{2\alpha \sqrt{1 + \beta_2} (\sqrt{1 + \beta_2} + \sqrt{1 + \beta'_2})}{\lambda (\sqrt{1 + \beta_1} + \sqrt{1 + \beta'_1})^2} \left[ \sqrt{1 + \frac{3\lambda^2 (\sqrt{1 + \beta_1} + \sqrt{1 + \beta'_1})^2}{\alpha (\sqrt{1 + \beta_2} + \sqrt{1 + \beta'_2})^2}} - 1 \right] \quad (8.235 b)$$

下面为了叙述方便和具体起见，载荷 $q(t)$ 以图8.16的冲击波为例。这时方程(8.233 a)变为

$$A \frac{d^2 w_0}{dt^2} = \begin{cases} (\chi - 1) - \frac{\chi}{\tau_d} t, & t \leq \tau_d \\ -1, & t > \tau_d \end{cases} \quad (8.233 c)$$

其中引入动力塑性系数

$$\chi = \frac{p_0}{q_s} \quad (8.233 d)$$

代表外载峰值和静力极限载荷的比值。解方程(8.233)，对静止的初始条件，有解

$$\begin{aligned} w_0(t) &= \frac{1}{A} \int_0^t \int_0^{t_1} \left[ \frac{q(t_2)}{q_s} - 1 \right] dt_2 dt_1 \\ &= \begin{cases} \frac{(\chi - 1)}{2A} t^2 - \frac{\chi}{6A\tau_d} t^3, & t \leq \tau_d \\ -\frac{\chi}{6A} \tau_d^2 + \frac{\chi\tau_d}{2A} t - \frac{1}{2A} t^2, & t > \tau_d \end{cases} \end{aligned} \quad (8.236 a)$$

由 $\frac{dw_0(t)}{dt} = 0$ ，求出最大值时刻

$$t_m = \begin{cases} 2 \left( 1 - \frac{1}{\chi} \right) \tau_d, & t_m \leq \tau_d, \text{ 即 } \chi \leq \chi_1 \\ \frac{\chi}{2} \tau_d, & t_m > \tau_d, \text{ 即 } \chi > \chi_1 \end{cases} \quad (8.236 b)$$

由 $t_m = \tau_d$ 给出 $\chi = \chi_1 = 2$ 。

代回式(8.235)，得最大刚塑性稳态挠度值

$$w_m = w_0(t_m) = \begin{cases} \frac{\chi-1}{2A} t_m^2 - \frac{\chi}{6A\tau_d} t_m^3, & \chi \leq \chi_1 \\ -\frac{\chi}{6A} \tau_d^2 + \frac{\chi\tau_d}{2A} t_m - \frac{1}{2A} t_m^2, & \chi > \chi_1 \end{cases} \quad (8.237)$$

## (二) 非稳态刚塑性分析

塑性铰分布如图8.18所示，中部有一塑性区（面积 $S_0$ ），而且塑性区大小随时间变化，用 $Y_v(t)$  ( $v=1,2,3,4$ )等时间函数反映非稳态过程。在这种情况下，均布外载、内力、惯性力的虚功分别为

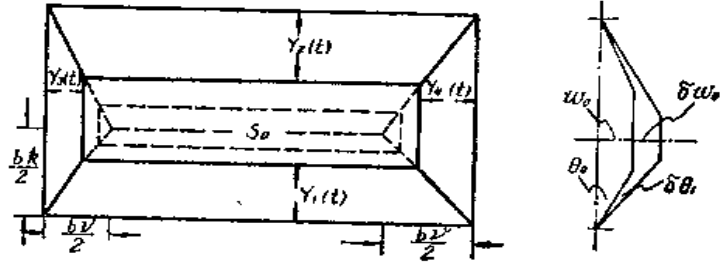


图 8.18

$$\delta L_q = \iint q(x, y, t) \delta w ds = q(t) b^3 \left[ \left( \frac{\lambda}{k} + \frac{v+v'}{2k} \right) \left( \frac{Y_1}{b} \right)^2 - \frac{4(v+v')}{3k^2} \left( \frac{Y_1}{b} \right)^3 \right] \delta \theta_1 + q(t) S_0 \delta w_0 \quad (8.238a)$$

$$\delta L_M = \int_L -M_p \delta \theta dL = -M_{p1} b \left\{ \lambda \left[ (1+\beta_1) + (1+\beta'_1) \frac{k}{2-k} \right] + \alpha \left[ (1+\beta_2) \frac{k}{v} + (1+\beta'_2) \frac{k}{v'} \right] \right\} \delta \theta_1 \quad (8.238b)$$

$$\delta L_p = \iint -\rho h \ddot{w} \delta w ds = -\frac{\rho h}{6k} b^3 \left\{ [4\lambda + 2(v+v')] \left( \frac{Y_1}{b} \right)^2 - 6 \frac{(v+v')}{k} \left( \frac{Y_1}{b} \right)^3 \right\} \ddot{w}_0 \delta \theta_1 - \rho h \ddot{w}_0 S_0 \delta w_0 \quad (8.238c)$$

将式(8.238)各式代入虚功原理： $\delta L_q + \delta L_M + \delta L_p = 0$ ，由 $\delta w_0$ 之系数为零给出 $w_0$ 的基本方程

$$\rho h \frac{d^2 w_0}{dt^2} = q(t) \quad (8.239)$$

由静止初始条件解出（对于图8.16的载荷）

$$\begin{aligned} \dot{w}_0(t) &= \frac{1}{\rho h} \int_0^t q(t_1) dt_1 \\ &= \begin{cases} \frac{p_0}{\rho h} t - \frac{p_0}{2\rho h\tau_d} t^2, & t \leq \tau_d \\ \frac{p_0\tau_d}{2\rho h}, & t > \tau_d \end{cases} \end{aligned} \quad (8.240a)$$

$$\begin{aligned} w_0(t) &= \frac{1}{\rho h} \int_0^t \int_0^{t_1} q(t_2) dt_2 dt_1 \\ &= \begin{cases} \frac{p_0}{2\rho h} t^2 - \frac{p_0}{6\rho h\tau_d} t^3, & t \leq \tau_d \\ -\frac{p_0}{6\rho h} \tau_d^2 + \frac{p_0\tau_d}{2\rho h} t, & t > \tau_d \end{cases} \end{aligned} \quad (8.240b)$$

再由 $\delta\theta_1$ 系数为零给出 $Y_1(t)$ 应满足的基本方程

$$\frac{(\nu+\nu')}{3k^2}\left(\frac{Y_1}{b}\right)^3 - \left(\frac{\lambda}{3k} + \frac{\nu+\nu'}{6k}\right)\left(\frac{Y_1}{b}\right)^2 + \frac{q_s}{q(t)} \times \frac{h}{24}[6\lambda - (\nu+\nu')] = 0 \quad (8.241)$$

由此, 根据 $Y_1(0) = \frac{bk}{2}$ 条件, 可给出发生非稳态塑性变形的最低载限

$$p_H = \frac{\bar{p}_H}{f(0)} q_s \quad (8.242a)$$

其中

$$\frac{\bar{p}_H}{p_H} = 3 - \frac{(\nu+\nu')}{2\lambda} \quad (8.242b)$$

$$f(0) = \frac{q(0)}{p_0} \quad (8.242c)$$

对于非稳态变形,  $Y_1$ 随时间增大, 在 $t_p$ 时  $Y_1(t_p) = \frac{bk}{2}$ , 则塑性区消失。将式(8.241)代入这一条件, 并注意到式(8.242b), 给出 $t_p$ 方程

$$f(t_p) = \frac{\bar{p}_H}{x} \quad (8.243a)$$

对于图8.16所示的冲击波载荷, 有解

$$t_p = \tau_d \left( 1 - \frac{\bar{p}_H}{x} \right) \quad (8.243b)$$

当时刻 $t > t_p$ 后, 塑性铰线分布变化如图8.17那样, 则可用方程(8.233)及解(8.236a), 但初始条件现应改为

$$w_0(t_p) = w_p = \frac{p_0}{2\rho h} t_p^2 - \frac{p_0}{6\rho h \tau_d} t_p^3 \quad (8.244a)$$

$$\dot{w}_0(t_p) = \dot{w}_p = \frac{p_0}{\rho h} t_p \left( 1 - \frac{t_p}{2\tau_d} \right) \quad (8.244b)$$

故解应写为

$$\begin{aligned} w_0(t) &= \frac{1}{A} \int_{t_p}^t \int_{t_p}^{t_1} \left[ \frac{q(t_2)}{q_s} - 1 \right] dt_2 dt_1 + \dot{w}_p(t - t_p) + w_p \\ &= \begin{cases} \left[ w_p - \dot{w}_p t_p + \frac{(\chi-1)}{2A} t_p^2 - \frac{\chi}{3A\tau_d} t_p^3 \right] + \left[ \dot{w}_p - \frac{(\chi-1)}{A} t_p \right. \\ \quad \left. + \frac{\chi}{2A\tau_d} t_p^2 \right] t + \frac{(\chi-1)}{2A} t^2 - \frac{\chi}{6A\tau_d} t^3, & t \leq \tau_d \\ \left[ w_p - \dot{w}_p t_p + \frac{(\chi-1)}{2A} t_p^2 - \frac{\chi}{3A\tau_d} t_p^3 - \frac{\chi}{6A} \tau_d^2 \right] + \left[ \dot{w}_p - \frac{(\chi-1)}{A} t_p \right. \\ \quad \left. + \frac{\chi}{2A\tau_d} t_p^2 + \frac{\chi}{2A} \tau_d \right] t - \frac{1}{2A} t^2, & t > \tau_d \end{cases} \quad (8.245) \end{aligned}$$

由 $\frac{dw_0}{dt} = 0$ 得最大值时刻

$$t_m = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{\chi}\right)\tau_p + \sqrt{\left(1 - \frac{1}{\chi}\right)^2 \tau_d^2 + \frac{2A\tau_d}{\chi} \left[\dot{w}_p - \frac{(\chi-1)}{A}t_p + \frac{\chi}{2A\tau_d}t_p^2\right]}, & t_m \leq \tau_d, \chi \leq \chi_2 \\ A\dot{w}_p - (\chi-1)t_p + \frac{\chi}{2\tau_d}t_p^2 + \frac{\chi}{2}\tau_d, & t_m > \tau_d, \chi > \chi_2 \end{cases} \quad (8.246 a)$$

由  $t_m = \tau_d$  条件得

$$\chi_2 = \frac{A\dot{w}_p + t_p - \tau_d}{t_p \left(1 - \frac{t_p}{2\tau_d}\right) - \frac{\tau_d}{2}} \quad (8.246 b)$$

故最大刚塑性非稳态挠度值

$$w_m = w_0(t_m) = \begin{cases} w_p + \dot{w}_p(t_m - t_p) + \frac{(\chi-1)}{A}(t_m - t_p)^2 \\ \quad - \frac{\chi}{6A\tau_d}(t_m^3 - 3t_mt_p^2 + 2t_p^3), & \chi \leq \chi_2 \\ w_p + \dot{w}_p(t_m - t_p) - \frac{1}{2A}(t_m - t_p)^2 + \frac{\chi}{6A\tau_d}[3t_m(\tau_d - t_p)^2 \\ \quad - (\tau_d^3 - 3\tau_dt_p^2 + 2t_p^3)], & \chi > \chi_2 \end{cases} \quad (8.247)$$

### 三、矩形板的弹塑性解

板件完全弹塑性分析是相当困难和复杂的。这里介绍一种近似的弹性-刚塑性模型<sup>[316]</sup>。这一模型主要是在塑性阶段仍采用上述刚塑性模型，但将弹性阶段结束时的位移及速度作为刚塑性分析的初始条件。这种模型分析简便，基本上同刚塑性模型，但计入了弹性阶段的弹性变形部分（虽然忽略了塑性阶段的弹性变形部分）。这对塑性阶段初期，计入了起重要作用的弹性变形部分；而对塑性阶段后期，又由于塑性变形是主要的，故又忽略了塑性阶段中弹性变形部分，因此都有足够精度。有了这一原则，再用弹性-刚塑性模型分析矩形板的过程就类同前面二小节，因此这里只列出有关结果，不再作详细推导。

#### (一) 弹性分析

全板最先达极限弯矩的弯矩

$$M_1 = \bar{M}_1 T(t), \quad T(t) = \frac{\omega}{p_0} \int_0^t q(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau \quad (8.248)$$

在  $t_*$  时刻，该处弯矩达极限，即

$$\bar{M}_1 T(t_*) = M_{p1} \quad (8.249 a)$$

则

$$t_* = T^{-1} \left[ \frac{M_{p1}}{\bar{M}_1} \right] \quad (8.249 b)$$

时认为所有铰线即行产生，这时板参考点挠度及速度分别为

$$w_* = w_0(t_*) = \bar{w}_0 T(t_*) \quad (8.250 a)$$

$$\dot{w}_* = \dot{w}_0(t_*) = \bar{w}_0 \dot{T}(t_*) \quad (8.250 b)$$

#### (二) 稳态弹塑性分析

式 (8.235) 现为



$$w_0(t) = \frac{1}{A} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{q(t_2)}{q_s} - 1 \right] dt_2 dt_1 + \dot{w}_s(t - t_s) + w_s \quad (8.251 a)$$

式 (8.236 b), 现为

$$t_m = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{\chi}\right) \tau_d + \sqrt{\left(1 - \frac{1}{\chi}\right)^2 \tau_d^2 + \frac{2A\tau_d}{\chi} \left[ \dot{w}_s - \frac{\chi-1}{A} t_s + \frac{\chi}{2A\tau_d} t_s^2 \right]}, & \chi \leq \chi_1 \\ A\dot{w}_s - (\chi-1)t_s + \frac{\chi}{2\tau_d} t_s^2 + \frac{\chi}{2} \tau_d, & \chi > \chi_1 \end{cases} \quad (8.251 b)$$

$$\chi_1 = \frac{A\dot{w}_s + t_s - \tau_d}{t_s \left(1 - \frac{t_s}{2\tau_d}\right) - \frac{\tau_d}{2}} \quad (8.251 c)$$

式 (8.237) 现为

$$w_m = w_0(t_m) = \begin{cases} w_s + \dot{w}_s(t_m - t_s) + \frac{\chi-1}{2A}(t_m - t_s)^2 - \frac{\chi}{6A\tau_d}(t_m^3 - 3t_m t_s^2 + 2t_s^3), & \chi \leq \chi_1 \\ w_s + \dot{w}_s(t_m - t_s) - \frac{1}{2A}(t_m - t_s)^2 + \frac{\chi}{6A\tau_d}[3t_m(\tau_d - t_s)^2 - (\tau_d^3 - 3\tau_d t_s^2 + 2t_s^3)], & \chi > \chi_1 \end{cases} \quad (8.251 d)$$

### (三) 非稳态弹塑性分析

式 (8.240) 现为

$$\dot{w}_0(t) = \frac{1}{\rho h} \int_{t_0}^t q(t_1) dt_1 + \dot{w}_s \quad (8.252 a)$$

$$w_0(t) = \frac{1}{\rho h} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t_1} q(t_2) dt_2 dt_1 + \dot{w}_s(t - t_s) + w_s \quad (8.252 b)$$

式 (8.242 a) 现为

$$p_H = \frac{\bar{p}_H}{f(t_s)} q_s \quad (8.252 c)$$

式 (8.244) 现为

$$w_p = w_s + \dot{w}_s(t_p - t_s) + \frac{p_0}{2\rho h}(t_p - t_s)^2 - \frac{p_0}{6\rho h\tau_d}(t_p^3 - 3t_p t_s^2 + 2t_s^3) \quad (8.252 d)$$

$$\dot{w}_p = \dot{w}_s - \frac{p_0}{\rho h} t_s \left(1 - \frac{t_s}{2\tau_d}\right) + \frac{p_0}{\rho h} t_p \left(1 - \frac{t_p}{2\tau_d}\right) \quad (8.252 e)$$

式 (8.245) 一式 (247) 在形式上保持不变。

【例】受均布冲击波作用的四边固定板, 各边极限弯矩相同,  $\frac{a}{b} = 2$ ,  $\omega\tau_d = 100$ 。按上述公式进行动力弹塑性分析, 可得无量纲载荷峰值  $\chi = \frac{p_0}{q_s}$  和相对最大挠度  $\eta = \frac{w_m}{w_s}$  间关系列于表 8.13。

这一结果表示了外载和动塑性变形间非线性关系, 可用于板件塑性设计中。例如, 如果允许延伸率为  $[\nu] = \eta = 10$ , 则均布冲击波的设计外载峰值应为静力极限载荷  $q_s$  的 1.84 倍。

四边固定板的动力弹塑性分析结果

表8.13

$\eta$	1	5	10	20	30	40
$\chi$	0.518	1.16	1.47	1.84	2.14	2.32

## § 8.12 平板与流体的耦合振动

弹性结构与流体的耦联振动是许多工程结构中所涉及的一个基本理论问题[149][322][346]。这个问题研究不只是涉及单一板件振动问题,而必须同时考虑固体与流体两种物质,而且它们的运动是耦合的,问题较为复杂。本节只讨论平板与侧面静止的无限不可压缩理想流体的耦联固有振动问题。

### 一、基本方程

在直角坐标系中,不可压缩、无旋、理想流体的基本微分方程,包括动平衡方程及连续性方程,为

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \rho \left[ \frac{\partial u_f}{\partial t} + u_f \frac{\partial u_f}{\partial x} + v_f \frac{\partial u_f}{\partial y} + w_f \frac{\partial u_f}{\partial z} \right] = 0 \quad (8.253 a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} + \rho \left[ \frac{\partial v_f}{\partial t} + u_f \frac{\partial v_f}{\partial x} + v_f \frac{\partial v_f}{\partial y} + w_f \frac{\partial v_f}{\partial z} \right] = 0 \quad (8.253 b)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g + \rho \left[ \frac{\partial w_f}{\partial t} + u_f \frac{\partial w_f}{\partial x} + v_f \frac{\partial w_f}{\partial y} + w_f \frac{\partial w_f}{\partial z} \right] = 0 \quad (8.253 c)$$

$$\frac{\partial u_f}{\partial x} + \frac{\partial v_f}{\partial y} + \frac{\partial w_f}{\partial z} = 0 \quad (8.253 d)$$

式中  $p$  为流体压力,  $u_f$ ,  $v_f$ ,  $w_f$  为固定点的流体速度分量。

对于静止流体及平板小挠度振动,可略去二阶微量,由式 (8.253 a) 对  $x$  一次偏导数,加式 (8.253 b) 对  $y$  一次偏导数,加式 (8.253 c) 对  $z$  一次偏导数,再代入式 (8.253 d),可得关于流体压力的独立方程

$$\nabla^2 p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0 \quad (8.254)$$

其边界条件为:

$$\text{在自由表面 } S_0, \quad p = 0 \quad (8.255 a)$$

$$\text{在固定表面 } S_c, \quad \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad (8.255 b)$$

$$\text{在结构表面 } S_s, \quad \frac{\partial p}{\partial n} = -\rho_f \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} \quad (8.255 c)$$

$$\text{在无穷远处,} \quad p \rightarrow 0$$

式中,  $u_n$  为结构的法向位移,对于板件即为  $w$ ,  $\rho_f$  为流体质量密度。

板的方程仍为

$$\nabla^2 \nabla^2 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p, \quad (8.256)$$

式中  $p$  为接触面流体压力。可以看出,板方程的载荷项与流体压力有关,流体方程的边界条

件与板的运动有关, 因此方程的求解是耦合的。

## 二、单 向 板

有一单向板, 两端边界条件任意, 一侧有无限流体, 流体上表面自由, 底部固定。

流体的方程为

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0 \quad (8.257 a)$$

其边界条件有

$$x = a: p = 0$$

$$x = 0: \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$z = 0: \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_f \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$z \rightarrow \infty, p \rightarrow 0 \quad (8.257 b)$$

板件的方程为

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p(x, z, t) \quad (8.258)$$

在  $x = 0, a$  处边界条件见式 (3.9)。

设解

$$w(x, t) = W(x) \sin(\omega t + \varphi), \quad p(x, z, t) = -P(x, z) \sin(\omega t + \varphi) \quad (8.259)$$

由方程 (8.257) 解得接触面处压力振型<sup>[322]</sup>

$$P(x, 0) = P_*(x) = -\frac{4\rho_f \omega^2}{\pi} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{\cos \frac{m\pi}{2a} x}{m} \int_0^a W(\xi) \cos \frac{m\pi}{2a} \xi d\xi \quad (8.260)$$

对于板的振型方程

$$\frac{d^4 W}{dx^4} - \rho h \omega^2 W = P_*(x) \quad (8.261 a)$$

可设解

$$W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n W_n(x) \quad (8.261 b)$$

其中  $W_n(x)$  为无流体单向板的振型, 相应频率为  $\omega_n$ 。利用  $W_n$  的正交性可以展开

$$\cos \frac{m\pi}{2a} x = \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} W_n(x) \quad (8.262 a)$$

$$B_{mn} = \frac{\int_0^a \cos \frac{m\pi}{2a} x W_n(x) dx}{\int_0^a W_n^2(x) dx} \quad (8.262 b)$$

代入式 (8.260), 和式 (8.261 b) 一起代入方程 (8.261 a), 并考虑到有  $\frac{d^4 W_n}{dx^4} = \rho h \omega_n^2 W_n$ , 则比较  $W_n$  之系数可建立关于  $A_n$  的齐次线代方程组, 从而给出频率方程的固有频率与振型。

## 三、轴对称圆板

对于双向板, 大部分用近似方法来求解板件与流体耦联振动。这里给出一些用瑞雷-里兹法分析轴对称圆板的结果。

由于考虑流体是不可压缩的, 并略去表面波势能的变化, 因此结构振动时流体只影响动能变化, 相当附加质量作用。按 § 7.2 一般里兹法, 仍有

$$\delta(U_m - \omega^2 T_m) = 0 \quad (8.263 a)$$

其中变形能项  $U_m$  只与板件变形能有关

$$U_m = U_{pm} \quad (8.263 b)$$

而动能项  $T_m$  和板件动能及流体动能有关

$$T_m = T_{pm} + T_{fm} \quad (8.263 c)$$

其中,  $U_{pm}$  及  $T_{pm}$  见式 (7.2)。而

$$T_{fm} = -\frac{\rho_f}{2} \iiint_V (\nabla^2 \Psi)^2 dV \quad (8.263 d)$$

极坐标系中流体速度势函数振型为<sup>[150]</sup>

$$\Psi = \int_0^\infty J_0(kr) dk \int_0^a J_0(kr) W r dr \quad (8.263 e)$$

取板的振型为满足边界条件的多项式, 用瑞雷法求得不同边界条件整圆板的基频系数可统一表达为<sup>[149][175][204]</sup>

$$\lambda^2 = \omega a^2 \sqrt{\frac{\rho_f h}{D}} = \frac{A}{\sqrt{1 + B \left( \frac{\rho_f}{\rho} \right) \left( \frac{a}{h} \right)}} \quad (8.264)$$

式中,  $\rho_f$  为流体质量密度,  $\rho, a, h$  为板件参数, 而  $A, B$  见表 8.14。

式 (8.264) 中  $A, B$  值

表 8.14

边界条件	固 定		简 支	自 由
流 体 面	一 面	双 面	一 面	双 面
$A$	10.33	10.33	4.940	5.356
$B$	0.6689	1.337	1.045	0.4365

## 四、矩 形 板

对于各种边界条件矩形板, 取梁函数的组合 (§ 3.6) 表示振型, 用上述瑞雷法可求得具有一面流体作用时的频率与无流体时频率的比值公式

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \left[ 1 + \alpha_f \left( \frac{\rho_f}{\rho} \right) \left( \frac{b}{h} \right) \frac{A_{mn}}{B_{mn}} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (8.265 a)$$

式中

$$A_{mn} = \frac{1}{ab} \left[ \iint X_m Y_n ds \right] \quad (8.265 b)$$

$$B_{mn} = \iint X_m^2 Y_n^2 ds \quad (8.265 c)$$

而 $X_m, Y_n$ 为与 $x, y$ 方向边界相对应的第 $m, n$ 阶梁函数, 式(8.265 b)的具体算式可参见附录 I, 频率影响系数 $\alpha_f$ [93]列于表8.15。

与流体共同作用矩形板的频率影响系数 $\alpha_f$ 

表8.15

$a/b$	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$\alpha_f$	0.208	0.324	0.392	0.452	0.500

从式(8.264), (8.265 a)均可看出, 流体的存在将由于附加质量效应而使板件频率降低; 两面流体比一面流体效应大; 一般阶次增高, 这种效应将降低。从式(8.265 b)还可发现, 当对称边界方向为偶数半波数时,  $A_{mn} = 0$ , 即不再存在流体影响。

### § 8.13 平板的热振动

上面讨论的结构振动都是由于外界作用载荷引起的。而有一种振动不是由于载荷, 而由于温度变化引起的。物体内部温度的变化, 一般会产生变形与应力, 如果温度场是非稳态, 与时间有关, 将会导致结构的振动, 一般所谓热致振动[26][185]。热应力的产生主要是因为温度变化引起附加应变, 因此必须在应力-应变关系中叠加上温度项, 而其它基本关系式将不会发生变化。下面将结合板件热振动来讨论这一问题。

#### 一、基本方程

下面计算的温度 $T(x, y, t)$ 的起点 $T = 0$ 相应于板件无应力状态, 并假定温度改变并不影响材料的力学性能与热学特性。对于一般薄板结构, 可以认为温度沿厚度线性分布, 其上下表面各为 $T_1, T_2$ , 即(图2.1)

$$T(x, y, z, t) = \tau_0(x, y, t) + z\tau_1(x, y, t) \quad (8.266 a)$$

$$\tau_0 = \frac{T_1\left(\frac{h}{2}\right) + T_2\left(-\frac{h}{2}\right)}{2}, \quad \tau_1 = \frac{T_1\left(\frac{h}{2}\right) - T_2\left(-\frac{h}{2}\right)}{h} \quad (8.266 b)$$

其中,  $\tau_0$ 代表沿厚度温度的平均值,  $\tau_1$ 代表温度分布梯度。

第二章的位移关系式(2.1), 位移-应变关系式(2.2), 以及动平衡方程(2.8)保持不变。但应变-应力表达式中应计入温度效应项, 有

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) + \alpha_T T \quad (8.267 a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) + \alpha_T T \quad (8.267 b)$$

$$\nu_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} \quad (8.267 c)$$

其中 $\alpha_T$ 为热膨胀系数, 因而有应力表达式

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}[(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) - (1+\nu)\alpha_T T] \quad (8.268 a)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}[(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) - (1+\nu)\alpha_T T] \quad (8.268 b)$$

$$\tau_{xy} = G e_{xy} \quad (8.268 c)$$

代入应变表达式 (2.2), 并积分可得内力分量

$$M_x = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (1+\nu) \alpha_T \tau_1 \right] \quad (8.269 a)$$

$$M_y = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (1+\nu) \alpha_T \tau_1 \right] \quad (8.269 b)$$

$$M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (8.269 c)$$

代入动平衡方程 (2.8), 可得平板热振动的基本方程

$$\nabla^2 \nabla^2 w + (1+\nu) \alpha_T \nabla^2 \tau_1 + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{q}{D}(x, y, t) \quad (8.270)$$

和一般薄板振动方程 (2.10) 相比, 多了一项温度项, 其只与温度梯度  $\tau_1$  有关。平均温度  $\tau_0$  只和板的薄膜变形有关, 如果不考虑弯曲力与薄膜力耦合的话, 就不会影响板件弯曲振动。和方程 (8.270) 相应的边界条件同第二章, 只是其中内力表达式用式 (8.269)。

如果没有外载作用, 则基本方程变为

$$\nabla^2 \nabla^2 w + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -(1+\nu) \alpha_T \nabla^2 \tau_1(x, y, t) \quad (8.271 a)$$

由于温度分布的空间、时间过程是已知的 (是热传导问题的解), 因此方程右边非齐次项为已知函数, 相当一个载荷项, 所以转化为一个强迫振动问题。

方程 (8.271 a) 的解可写为两部分的叠加

$$w = w_s + w_d \quad (8.271 b)$$

它们分别满足

$$D \nabla^2 \nabla^2 w_s = -(1+\nu) \alpha_T D \nabla^2 \tau_1 \quad (8.271 c)$$

$$D \nabla^2 \nabla^2 w_d + \rho h \frac{\partial^2 w_d}{\partial t^2} = -\rho h \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2} \quad (8.271 d)$$

第一个方程相应于准静态问题, 可采用板的静力问题的解, 求出  $w_s$ ; 再代入第二个方程, 求取动力解。下面举个具体例子, 说明这一求解过程。

## 二、受热冲击的四边简支矩形板

四边简支矩形板 (图3.2), 下表面绝热, 上表面突加常值热流量  $q_T$  问题<sup>[26]</sup>。首先必须求解热传导问题。这可认为是一维问题, 其基本方程有

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = C \rho \frac{\partial T}{\partial t} \quad (8.272 a)$$

边界条件为

$$z = \frac{h}{2}: \lambda \frac{\partial T}{\partial z} = q_T, \quad z = -\frac{h}{2}: \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad (8.272 b)$$

初始条件为

$$t = 0: T = 0 \quad (8.272 c)$$

式中  $\lambda$  为物体热传导系数;  $C$  为比热;  $\rho$  为质量密度。这一问题的解为<sup>[35]</sup>

$$T(z, t) = \frac{q_T h}{\lambda} \left[ \frac{\beta t}{\pi^2} + \frac{3z^2 + 3hz - \frac{h^2}{4}}{6h^2} \right]$$

$$-\frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} e^{-n^2 \beta t} \cos \frac{n\pi}{2} \left( \frac{2z}{h} + 1 \right) \Big] \quad (8.272d)$$

$$\beta = \frac{\lambda \pi^2}{C \rho h^2} \quad (8.272e)$$

从而算出温度梯度

$$\tau_1(t) = \frac{12}{h^3} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} T(z, t) z dz = \frac{q_T}{2\lambda} \left( 1 - \frac{96}{\pi^4} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{e^{-n^2 \beta t}}{n^4} \right) \quad (8.272f)$$

代入方程 (8.271c), 有

$$D \nabla^2 \nabla^2 w_s = -(1+\nu) \alpha_T D \nabla^2 \tau_1 \quad (8.273a)$$

这是四边简支矩形板的静力方程, 有解<sup>[358]</sup>

$$w_s(x, y, t) = \frac{16 \tau_1(t) (1+\nu) \alpha_T}{a b} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y}{\left( \frac{m\pi}{a} \right) \left( \frac{n\pi}{b} \right) \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]} \quad (8.273b)$$

代入方程 (8.271d) 有动力方程

$$D \nabla^2 \nabla^2 w_d + \rho h \frac{\partial^2 w_d}{\partial t^2} = -\rho h \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2}(x, y, t) \quad (8.274a)$$

这是四边简支矩形板的强迫振动方程。按第三、六章分析, 可设解

$$w_d(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}(t) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (8.274b)$$

将式 (8.273b)、(8.274b) 代入方程 (8.274a), 比较得

$$\frac{d^2 A_{mn}(t)}{dt^2} + \omega_{mn}^2 A_{mn}(t) = -E_{mn} \frac{d^2 \tau_1(t)}{dt^2} \quad (8.274c)$$

式中板件固有频率

$$\omega_{mn}^2 = \frac{D}{\rho h} \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] \quad (8.274d)$$

而

$$E_{mn} = \frac{16(1+\nu) \alpha_T}{a b \left( \frac{m\pi}{a} \right) \left( \frac{n\pi}{b} \right) \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]} \quad (8.274e)$$

将解  $\tau_1(t)$  代入式 (8.274c), 应用拉普拉斯变换, 可得解

$$A_{mn}(t) = -E_{mn} \left[ \tau_1(t) - \omega_{mn} \int_0^t \tau_1(t-t_1) \sin \omega_{mn} t_1 dt_1 - \frac{6q_T}{C \rho h^2 \omega_{mn}} \sin \omega_{mn} t \right] \quad (8.274f)$$

将此解代回式 (8.274b), 和解 (8.273b) 联立, 即可给出问题最后解。

## § 8.14 无限大板的动力分析

无限大板的振动是一个经典而又特殊的问题, 它具有与上述一般有限板不同的解法与特征。下面给出其中两种情况的解: 无限大板的轴对称自由振动<sup>[28]</sup>和弹性半空间上无限大板

的简谐振动<sup>[151]</sup>。

### 一、无限大板的轴对称自由振动

在轴对称情况下极坐标系中薄板自由振动方程按 § 2.4 有

$$D\nabla^2\nabla^2w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (8.275 a)$$

其中算子

$$\nabla^2 = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \quad (8.275 b)$$

假设初始给定一定位移, 而无速度, 即初始条件为

$$w(r, 0) = w_0 = f(r), \quad \frac{\partial w}{\partial t}(r, 0) = \dot{w}_0 = 0 \quad (8.275 c)$$

我们应用拉普拉斯变换

$$\bar{w}(r, p) = \int_0^\infty e^{-pt} w(r, t) dt \quad (8.276 a)$$

并注意到初始条件 (8.275 c), 有变换后方程

$$D\nabla^2\nabla^2\bar{w}(r, p) + p^2\rho h\bar{w}(r, p) = p\rho h f(r) \quad (8.276 b)$$

进一步对方程进行零阶汉克尔 (Hankel) 变换<sup>[361]</sup>

$$w^*(\xi, p) = \int_0^\infty \bar{w}(r, p) J_0(\xi r) r dr \quad (8.277 a)$$

则有方程

$$w^*(\xi, p) \left( \frac{D}{\rho h} \xi^4 + p^2 \right) = p f^*(\xi) \quad (8.277 b)$$

其中有  $f(r)$  的汉克尔变换

$$f^*(\xi) = \int_0^\infty f(r) J_0(\xi r) r dr \quad (8.277 c)$$

因此可解出

$$w^*(\xi, p) = \frac{p f^*(\xi)}{\frac{D}{\rho h} \xi^4 + p^2} \quad (8.277 d)$$

其汉克尔反变换为

$$\bar{w}(r, p) = \int_0^\infty \xi w^*(\xi, p) J_0(\xi r) d\xi \quad (8.278 a)$$

代入式 (8.277 d), (8.277 e) 有

$$\bar{w}(r, p) = \int_0^\infty \frac{\xi p J_0(\xi r)}{\frac{D}{\rho h} \xi^4 + p^2} \int_0^\infty f(u) J_0(\xi u) u du d\xi \quad (8.278 b)$$

其拉普拉斯反变换为

$$\begin{aligned} w(r, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \bar{w}(r, p) e^{pt} dp \\ &= \int_0^\infty \xi J_0(\xi r) \cos\left(\sqrt{\frac{D}{\rho h}} \xi^2 t\right) \int_0^\infty f(u) J_0(\xi u) u du d\xi \\ &= \int_0^\infty u f(u) du \int_0^\infty \xi J_0(\xi r) J_0(\xi u) \cos\left(\sqrt{\frac{D}{\rho h}} \xi^2 t\right) d\xi \end{aligned} \quad (8.278 c)$$



再引入韦伯尔 (Weber) 积分公式

$$\int_0^\infty \xi J_0(\xi u) J_0(\xi r) \cos\left(\sqrt{\frac{D}{\rho h}} \xi^2 t\right) d\xi = \frac{1}{2\sqrt{\frac{D}{\rho h} t}} J_0\left(\frac{ur}{2\sqrt{\frac{D}{\rho h} t}}\right) \sin\left(\frac{u^2 + r^2}{4\sqrt{\frac{D}{\rho h} t}}\right) \quad (8.278d)$$

则解为

$$w(r, t) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{D}{\rho h} t}} \int_0^\infty u f(u) J_0\left(\frac{ur}{2\sqrt{\frac{D}{\rho h} t}}\right) \sin\left(\frac{u^2 + r^2}{4\sqrt{\frac{D}{\rho h} t}}\right) du \quad (8.279)$$

例如, 初始板的挠曲有

$$w_0 = f(r) = f_0 e^{-\frac{r^2}{a^2}} \quad (8.280a)$$

代入式 (8.279) 有解

$$w(r, t) = \frac{f_0}{1 + \bar{t}^2} \exp\left(-\frac{\bar{r}^2}{1 + \bar{t}^2}\right) \left[ \cos \frac{\bar{r}^2 \bar{t}}{1 + \bar{t}^2} + \bar{t} \sin \frac{\bar{r}^2 \bar{t}}{1 + \bar{t}^2} \right] \quad (8.280b)$$

其中无量纲坐标  $\bar{r}$  及无量纲时间  $\bar{t}$  为

$$\bar{r} = \frac{r}{a}, \quad \bar{t} = \frac{4\sqrt{\frac{D}{\rho h}}}{a^2} t \quad (8.280c)$$

简单分析一下解 (8.280b), 可以看到, 在初始时刻  $\bar{t} = 0$ ,  $w(r, 0)$  等于初始挠曲, 即

$$w(r, 0) = f_0 e^{-\frac{r^2}{a^2}} \quad (8.281a)$$

在中心点  $\bar{r} = 0$ , 有

$$w(0, t) = \frac{f_0}{1 + \bar{t}^2} \quad (8.281b)$$

即开始为  $f_0$ , 随时间增长, 逐渐衰减为零; 对于一定时刻  $\bar{t} = \text{const.}$ , 沿  $r$  方向的挠曲分布又呈波浪型, 并且位置越远 ( $\bar{r}$  越大), 幅值越小; 对一定远位置  $\bar{r} = \text{const.}$ , 随时间的挠曲变化又呈周期型, 并且时间越长 ( $\bar{t}$  越大), 幅值越小。因此解 (8.280b) 确切地描述了具有初始挠曲的无限大板的自由振动全过程。

## 二、弹性半空间上无限大板的简谐振动

这种板的振动问题的求解采用第一章的三维弹性体动力方程, 将板与介质看成二个粘连的具有不同材料常数的弹性层: 一个是有限厚度, 另一个是无限半空间 (图8.19), 它们分别具有材料常数  $\rho_i, \lambda_i, G_i (i=1, 2)$ 。

第一章已经指出, 弹性体动力学基本方程为式 (1.12)。在无体积力及简谐振动情况下, 可设位移分量

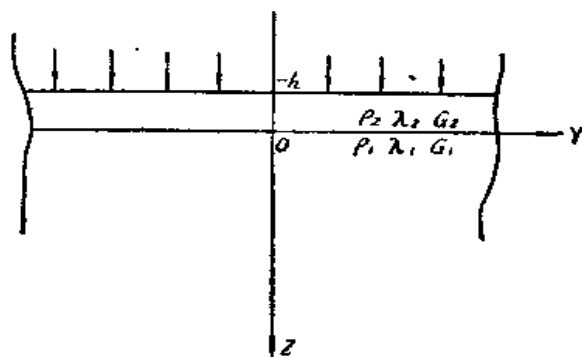


图 8.19

$$u(x, y, z, t) = U e^{i\omega t} = \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} + u_0 \right) e^{i\omega t} \quad (8.282 a)$$

$$v(x, y, z, t) = V e^{i\omega t} = \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} + v_0 \right) e^{i\omega t} \quad (8.282 b)$$

$$w(x, y, z, t) = W e^{i\omega t} = \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} + w_0 \right) e^{i\omega t} \quad (8.282 c)$$

则基本方程 (1.12) 简化为

$$(\nabla^2 + h^2)\phi = 0 \quad (8.283 a)$$

$$(\nabla^2 + k^2)u_0 = (\nabla^2 + k^2)v_0 = (\nabla^2 + k^2)w_0 = 0 \quad (8.284 a)$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0 \quad (8.284 b)$$

进一步可设

$$u_0 = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z}, \quad v_0 = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z}, \quad w_0 = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \psi \quad (8.285)$$

则方程 (8.284 a), (8.284 b) 变为

$$(\nabla^2 + k^2)\psi = 0 \quad (8.283 b)$$

其中对于柱坐标及轴对称振动有

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (8.286 a)$$

上述各式中

$$h^2 = \frac{\rho \omega^2}{\lambda + 2G}, \quad k^2 = \frac{\rho \omega^2}{G} \quad (8.286 b)$$

式 (8.283) 为本问题的基本方程, 对于具有不同弹性常数的两层各有方程

$$(\nabla^2 + h_i^2)\phi_i = 0 \quad (8.287 a)$$

$$(i = 1, 2)$$

$$(\nabla^2 + k_i^2)\psi_i = 0 \quad (8.287 b)$$

其中

$$h_i = \frac{\rho_i \omega^2}{\lambda_i + 2G_i}, \quad k_i^2 = \frac{\rho_i \omega^2}{G_i} \quad (i = 1, 2) \quad (8.287 c)$$

而边界条件有

$$z = 0: \sigma_{z1}(r, 0) = \sigma_{z2}(r, 0), \quad w_1(r, 0) = w_2(r, 0), \quad \tau_{r1}(r, 0) = \tau_{r2}(r, 0) = 0 \quad (8.288 a)$$

$$z = -h: \tau_r(r, -h) = 0, \quad \sigma_z(r, -h) = q(r) e^{i\omega t} \quad (8.288 b)$$

方程 (8.287) 的解为

$$\phi_1(r, z) = A_1 e^{-\alpha z} J_0(r \sqrt{\alpha^2 + h_1^2}) \quad (8.289 a)$$

$$\psi_1(r, z) = B_1 e^{-\beta z} J_0(r \sqrt{\beta^2 + k_1^2}) \quad (8.289 b)$$

$$\phi_2(r, z) = (A \operatorname{ch} \gamma z + B \operatorname{sh} \gamma z) J_0(r \sqrt{\gamma^2 + h_2^2}) \quad (8.289 c)$$

$$\psi_2(r, z) = (C \operatorname{ch} \delta z + D \operatorname{sh} \delta z) J_0(r \sqrt{\delta^2 + k_2^2}) \quad (8.289 d)$$

式中,  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  为任意常数, 但必须满足

$$\alpha^2 + h_1^2 = \beta^2 + k_1^2 = \gamma^2 + h_2^2 = \delta^2 + k_2^2 \quad (8.290)$$

由式 (8.288) 的六个边界条件定出上式中六个待定系数的方程, 从而给出问题的解。

## 第九章 弹性薄壳振动的一般性理论

### § 9.1 壳体概述

由两个曲面所限定的物体称为壳体。离两个曲面距离相同的点连成壳体的中曲面（下面又简称中面），两个曲面间垂直距离为壳体的厚度。一般来说，我们是研究壳体的厚度远小于中曲面尺度的薄壳，厚度沿中曲面是一常量的等厚度壳，壳体振动幅度远小于壳体厚度的小挠度问题〔139〕〔194〕〔299〕〔300〕。

对于任意形状壳体，可过其中曲面上一点 $A$ 作无数多的中曲面的垂直面（正截面）。这些垂直面与中曲面交得的平面曲线在该点的曲率中的最大与最小者为该点的两个主曲率 $\kappa_\alpha$ 、 $\kappa_\beta$ （相应的主曲率半径为 $R_\alpha$ 、 $R_\beta$ ）。对应主曲率的两根曲线在该点的切线方向为主方向。一点的两个主方向互相正交。如果作出曲线，使其上每一点的切线和在该点的主方向重合，则这些曲线形成两组互相正交的曲率线（图9.1）。下面我们将用曲率线组成的中曲面上的曲线坐标 $\alpha, \beta$ 来讨论中曲面特性。

壳体的形状是各种各样的。实际工程中常见的主要是柱壳和旋转壳两大类。若壳体的中曲面是动直线保持平行一定直线移动而成，则称为柱壳。根据柱壳横截面的形状可分为圆柱壳、椭圆柱壳、棱柱壳等。又根据柱壳横截面是否是闭合曲线又可分为闭合柱壳与开口柱壳。若壳体的中曲面是由一平面曲线围绕该平面内一定直线旋转一周而成，则称为旋转壳。

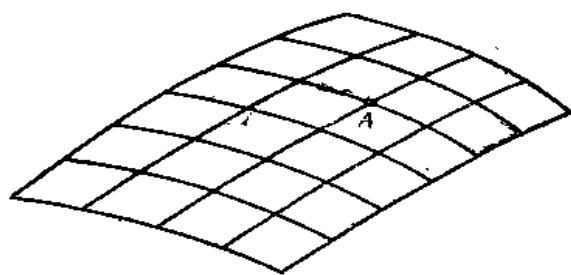


图 9.1

根据这一平面曲线形状，旋转壳可分为锥壳、球壳、椭球壳、双曲球壳、圆环壳等。也有不属于这两类的其它形状壳体，如双曲壳。有些开口块壳，不管其中曲面几何形状如何，若其最大拱高远小于底面尺寸，则统称为扁壳。

壳体也可按中曲面高斯曲率 $\Gamma = \kappa_\alpha \cdot \kappa_\beta$ 值分为三类。正高斯曲率壳包括球壳、椭球壳等；零高斯曲率壳包括圆柱壳、锥壳等；负高斯曲率的例子为单叶双曲球壳。零高斯曲率壳是工程中一类重要壳体，其一个主曲率为零（曲率线为直线），因此中曲面可以展开成平面。其它两类壳体则不具有这一特性。

和平板不一样，即使在小挠度情况下，壳体内就同时存在薄膜应力和弯曲应力。在某些情况下，弯曲应力相对薄膜应力来说是根小的，面可略去不计，形成一类无矩壳。无矩壳是一种特定条件下的壳体简化模型。

薄壳振动理论将采用下列假定：

- (a) 变形前垂直中曲面的直线在变形后仍保持直线，并垂直中曲面。
- (b) 相对其它应力分量，沿中曲面垂直方向的法向应力可忽略不计。
- (c) 相对壳体微体的移动惯性力，可忽略其转动惯性力矩。

(d) 法向挠度沿中曲面法线上各点是不变的。

其中前三个假定和薄板振动理论是一样的。而薄板理论中假定(d)当然在薄壳中不再成立。而这里列出的假定(d)在薄板中也同样存在,但在薄板理论中只讨论中面的法向挠度,而只是不涉及这一问题罢了。

虽然壳体的形状是多种多样的,但我们均可以用中曲面的几何特性以及厚度沿中曲面的分布规律来加以描述[240][359]。对于后者,可简单将厚度表达为中曲面曲线坐标的函数。而中曲面的几何特性描述则比较复杂,将专门在下节曲面理论中予以介绍。

## § 9.2 曲面理论基础

中曲面的几何特性可用曲面上曲线弧长参数及曲率来表示。壳体任一处的弧长及变形均取决于这两组参数。曲面曲率的含义已在上节叙述,下面将主要讨论曲面上曲线弧长。

在空间直角坐标系  $o-xyz$  中一中曲面上 (图9.2) 建立一曲线坐标,  $\alpha, \beta$  沿曲面的曲率线方向,  $\gamma$  与  $\alpha, \beta$  垂直。若曲面上一点  $P(\alpha, \beta)$  的空间直角坐标与曲线坐标间关系为

$$x = x(\alpha, \beta), \quad y = y(\alpha, \beta), \quad z = z(\alpha, \beta) \quad (9.1)$$

则在空间直角坐标系中  $P$  的向量可表示为

$$\vec{r}(\alpha, \beta) = x(\alpha, \beta) \vec{i} + y(\alpha, \beta) \vec{j} + z(\alpha, \beta) \vec{k} \quad (9.2)$$

其中  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  为空间直角坐标系的单位向量。向量  $\vec{r}$  在空间直角坐标系的分量是曲线坐标的函数。

在曲面上  $P$  点移到无限近的  $P'$  点引起向量  $\vec{r}$  变化

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} d\beta \quad (9.3)$$

中面弧段长度与拉梅参数

$d\vec{r}$  的模即曲面上微段弧长  $ds$  按式 (9.3) 可算得

$$\begin{aligned} (ds)^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} (d\alpha)^2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} (d\beta)^2 \\ &+ 2 \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} d\alpha d\beta \end{aligned} \quad (a)$$

由于  $\alpha, \beta$  是沿曲率线方向, 根据曲率线的正交性, 上式中第三项为零, 并根据矢量点积规定则

$$(ds)^2 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \right|^2 (d\alpha)^2 + \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} \right|^2 (d\beta)^2 \quad (b)$$

我们定义

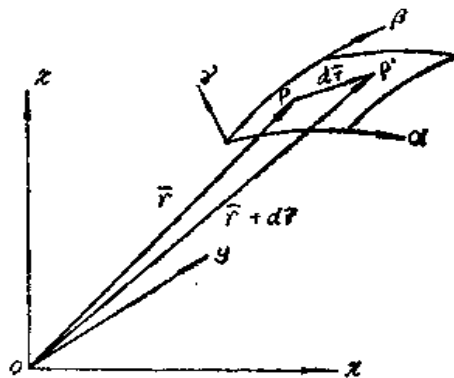


图 9.2

$$A = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \right|, \quad B = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} \right| \quad (9.4)$$

则有

$$ds^2 = A^2(d\alpha)^2 + B^2(d\beta)^2 \quad (9.5)$$

其中  $A, B$  称为曲面拉梅(Lamé)参数, 是表示曲面几何特性的重要参数, 由它可确定壳体中曲面上微段弧长。将式(9.2)代入式(9.4)可得拉梅参数一般算式,

$$A = \left| \frac{\partial x}{\partial \alpha} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \alpha} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial \alpha} \vec{k} \right| = \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \alpha} \right)^2} \quad (9.6a)$$

$$B = \left| \frac{\partial x}{\partial \beta} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \beta} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial \beta} \vec{k} \right| = \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial \beta} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \beta} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \beta} \right)^2} \quad (9.6b)$$

圆柱壳中曲面及空间直角坐标系  $O-xyz$  如图9.3所示, 其曲率线为平行轴线的母线及垂直轴线的横截面与中曲面相交的圆周线, 显然是正交的。曲线坐标取为

$$\alpha = x, \quad \beta = \theta \quad (9.7a)$$

这时, 直角坐标与曲线坐标间关系(9.1)为

$$x = x, \quad y = R \cos \theta, \quad z = R \sin \theta \quad (c)$$

其中  $R$  为圆柱壳中曲面半径。代入式(9.6), 很容易算得

$$A = 1, \quad B = R \sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} = R \quad (9.7b)$$

如果直接计算圆柱壳中曲面上微段弧长

$$ds^2 = dx^2 + (Rd\theta)^2 \quad (d)$$

与式(9.5)相比较, 也可直接求得式(9.7a)与(9.7b)。

圆锥壳中曲面及空间直角坐标系  $O-xyz$  如图9.4所示, 其曲率线为围绕旋转轴转动的母线及垂直轴线横截面与中曲面相交的圆周线, 显然是正交的。曲线坐标取为

$$\alpha = l, \quad \beta = \theta \quad (9.8a)$$

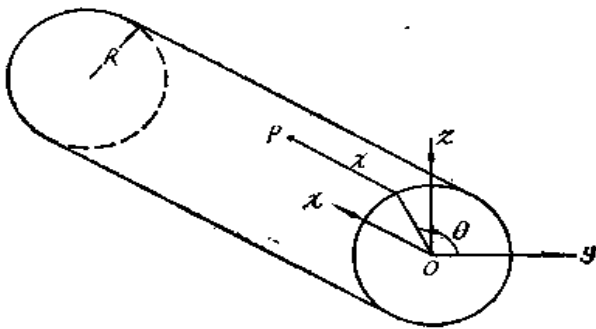


图 9.3

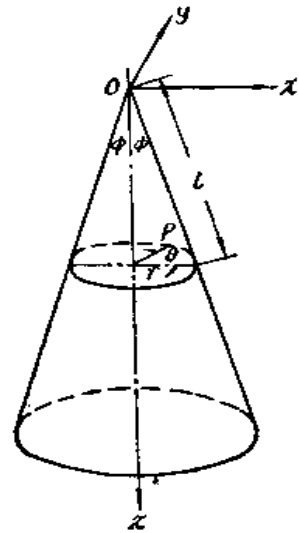


图 9.4

这时, 直角坐标与曲线坐标间关系(9.1)为

$$x = l \sin \phi \cos \theta, \quad y = l \sin \phi \sin \theta, \quad z = l \cos \phi \quad (e)$$

其中  $\phi$  为圆锥壳半顶角。代入式(9.6), 可算得

$$A = \sqrt{\sin^2 \phi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \cos^2 \phi} = 1$$

$$B = \sqrt{l^2 \sin^2 \phi (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)} = l \sin \phi \quad (9.8b)$$

如果直接计算圆锥壳中曲面上微段弧长

$$ds^2 = dl^2 + (rd\theta)^2 \quad (f)$$

其中  $r$  为距原点为  $z$  的截圆半径, 考虑到

$$r = l \sin \phi \quad (g)$$

有

$$ds^2 = (dl)^2 + l^2 \sin^2 \phi (d\theta)^2 \quad (h)$$

与式(9.5)相比较, 也可直接求得式(9.8a)与(9.8b)。

球壳中曲面及空间直角坐标系  $o-xyz$  如图9.5所示, 其曲率线为通过旋转轴线的平面与中曲面的截圆和垂直旋转轴的平面与中曲面的截圆, 显然是正交的。曲线坐标取为

$$\alpha = \theta, \quad \beta = \varphi \quad (9.9a)$$

这时, 直角坐标与曲线坐标间关系(9.1)为

$$x = R \sin \varphi \cos \theta, \quad y = R \sin \varphi \sin \theta, \quad z = R \cos \varphi \quad (i)$$

其中  $R$  为球壳中曲面半径。代入式(9.6)可算得

$$A = \sqrt{R^2 \sin^2 \varphi (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)} = R \sin \varphi$$

$$B = \sqrt{R^2 \cos^2 \varphi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + R^2 \sin^2 \varphi} = R \quad (9.9b)$$

如果直接计算球壳中曲面上微段弧长

$$ds^2 = (rd\theta)^2 + (Rd\varphi)^2 \quad (j)$$

其中  $r$  为垂直旋转轴线平面上截圆的半径。考虑到

$$r = R \sin \varphi \quad (k)$$

有

$$ds^2 = (R \sin \varphi)^2 (d\theta)^2 + R^2 (d\varphi)^2 \quad (l)$$

与式(9.5)相比较, 也可直接求得式(9.9a)与式(9.9b)。

以上推得的圆柱壳、圆锥壳、球壳等中曲面的拉梅参数及相应曲线坐标是以下各章从本章一般性壳体方程推导各类壳体方程的基础之一。

还应指出, 这里讨论的曲面的曲线坐标及拉梅参数在平面特殊情况下即为第二章 §2.6 所述内容。读者可加以对比。

**非中面弧段长度与主曲率半径** 下面进一步讨论壳体内部非中曲面微段弧长问题。设壳体内一点  $P_1(\alpha, \beta, \gamma)$  (图9.6) 在中曲面上投影为  $P(\alpha, \beta)$ , 其无限近一点  $P'_1(\alpha + d\alpha, \beta + d\beta, \gamma + d\gamma)$  在中曲面上投影为  $P'(\alpha + d\alpha, \beta + d\beta)$ 。在空间直角坐标系中  $P_1$  向量为  $\vec{R}(\alpha, \beta, \gamma)$ ,  $P$  向量为  $\vec{r}(\alpha, \beta)$ , 两者间关系为

$$\vec{R}(\alpha, \beta, \gamma) = \vec{r}(\alpha, \beta) + \gamma \vec{n}(\alpha, \beta) \quad (9.10)$$

式中  $\vec{n}$  是垂直中曲面的单位向量。前面已经研究了中曲面上微段  $PP'$  向量  $d\vec{r}$ 。而根据式(9.10)有非中曲面微段  $P_1P'_1$  向量

$$d\vec{R} = d\vec{r} + \gamma d\vec{n} + \vec{n} d\gamma \quad (9.11)$$

其中

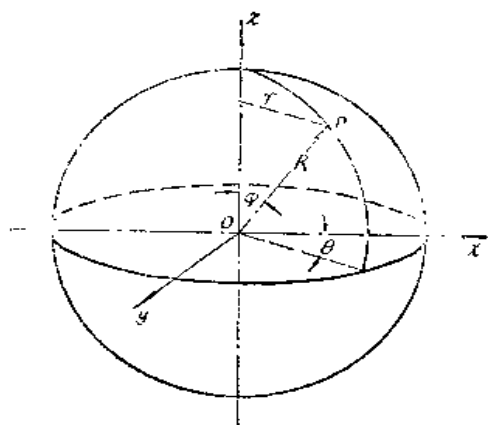


图 9.5

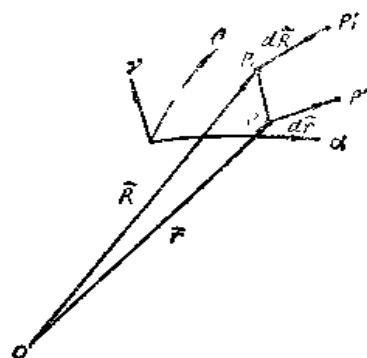


图 9.6

$$d\vec{n}(\alpha, \beta) = \frac{\partial \vec{n}}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \vec{n}}{\partial \beta} d\beta \quad (9.12)$$

因此  $d\vec{R}$  的模, 即非中曲面微段弧长按式(9.11)可算得

$$(ds)^2 = d\vec{R} \cdot d\vec{R} = d\vec{r} \cdot d\vec{r} + \gamma^2 d\vec{n} \cdot d\vec{n} + \vec{n} \cdot \vec{n} (d\gamma)^2 + 2\gamma d\vec{r} \cdot d\vec{n} + 2d\vec{r} \cdot \vec{n} (d\gamma) + 2\gamma d\gamma d\vec{n} \cdot \vec{n} \quad (9.13)$$

下面计算式(9.13)中各项值, 首先有

$$\vec{n} \cdot \vec{n} = 1, \quad d\vec{r} \cdot \vec{n} = 0, \quad d\vec{n} \cdot \vec{n} = 0 \quad (9.14a)$$

根据式(9.5)

$$d\vec{r} \cdot d\vec{r} = A^2 (d\alpha)^2 + B^2 (d\beta)^2 \quad (9.14b)$$

按式(9.12)有

$$\begin{aligned} d\vec{n} \cdot d\vec{n} &= \frac{\partial \vec{n}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial \alpha} (d\alpha)^2 + \frac{\partial \vec{n}}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial \beta} (d\beta)^2 + 2 \frac{\partial \vec{n}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial \beta} d\alpha d\beta \\ &= \left| \frac{\partial \vec{n}}{\partial \alpha} \right|^2 (d\alpha)^2 + \left| \frac{\partial \vec{n}}{\partial \beta} \right|^2 (d\beta)^2 \end{aligned} \quad (m)$$

根据 § 9.1 定义, 沿  $\alpha, \beta$  方向曲率线的曲率半径为主曲率半径  $R_\alpha, R_\beta$ 。在  $\gamma\alpha$  平面内根据相似关系有

$$\frac{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \right|}{R_\alpha} = \frac{\left| \frac{\partial \vec{n}}{\partial \alpha} \right|}{|\vec{n}|} \quad (n)$$

所以

$$\left| \frac{\partial \vec{n}}{\partial \alpha} \right| = \frac{A}{R_\alpha} \quad (o)$$

同样

$$\left| \frac{\partial \vec{n}}{\partial \beta} \right| = \frac{B}{R_\beta} \quad (p)$$

因此

$$d\vec{n} \cdot d\vec{n} = \frac{A^2}{R_\alpha^2} (d\alpha)^2 + \frac{B^2}{R_\beta^2} (d\beta)^2 \quad (9.14c)$$

根据式 (9.3), (9.12) 有

$$\begin{aligned}
 d\vec{r} \cdot d\vec{n} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial \alpha} (d\alpha)^2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial \beta} (d\beta)^2 \\
 &\quad + \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial \beta} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial \alpha} \right) (d\alpha)(d\beta) \\
 &= \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \right| \left| \frac{\partial \vec{n}}{\partial \alpha} \right| (d\alpha)^2 + \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} \right| \left| \frac{\partial \vec{n}}{\partial \beta} \right| (d\beta)^2 \\
 &= \frac{A^2}{R_\alpha} (d\alpha)^2 + \frac{B^2}{R_\beta} (d\beta)^2
 \end{aligned} \tag{9.14d}$$

将上述式 (9.14) 各表达式全部代入式 (9.13) 可计算得

$$\begin{aligned}
 (ds)^2 &= A^2 (d\alpha)^2 + B^2 (d\beta)^2 + \frac{A^2}{R_\alpha^2} \gamma^2 (d\alpha)^2 + \frac{B^2}{R_\beta^2} \gamma^2 (d\beta)^2 \\
 &\quad + (d\gamma)^2 + 2\gamma \left[ \frac{A^2}{R_\alpha} (d\alpha)^2 + \frac{B^2}{R_\beta} (d\beta)^2 \right] \\
 &= A^2 \left( 1 + \frac{\gamma}{R_\alpha} \right)^2 (d\alpha)^2 + B^2 \left( 1 + \frac{\gamma}{R_\beta} \right)^2 (d\beta)^2 + (d\gamma)^2
 \end{aligned} \tag{9.15}$$

因此壳体非中曲面上微段弧长是取决于中曲面拉梅参数  $A, B$  及主曲率半径  $R_\alpha, R_\beta$ 。这四个数是反映壳体曲面几何特性的基本参数。

若所取  $P_1$  位于平行中曲面的壳体曲面 (简称平行曲面) 上, 即  $d\gamma = 0$ , 则式 (9.15) 变为

$$\begin{aligned}
 (ds)^2 &= \left[ A \left( 1 + \frac{\gamma}{R_\alpha} \right) \right]^2 (d\alpha)^2 + \left[ B \left( 1 + \frac{\gamma}{R_\beta} \right) \right]^2 (d\beta)^2 \\
 &= A_1^2 (d\alpha)^2 + B_1^2 (d\beta)^2
 \end{aligned} \tag{9}$$

与式 (9.5) 相比, 可以看出, 平行曲面的拉梅参数与中曲面的拉梅参数间关系为

$$A_1 = A \left( 1 + \frac{\gamma}{R_\alpha} \right), \quad B_1 = B \left( 1 + \frac{\gamma}{R_\beta} \right) \tag{9.16a}$$

根据同样含义, 从式 (9.15) 有壳体内任一点的  $\gamma$  方向拉梅参数

$$C_1 = 1 \tag{9.16b}$$

主曲率半径  $R_\alpha, R_\beta$  对于一些常见壳体很容易根据曲率线的几何特性直接确定。例如, 圆柱壳 (图9.2) 有 (当  $\alpha = x, \beta = \theta$  时)

$$R_\alpha = \infty, \quad R_\beta = R \tag{9.7c}$$

圆锥壳 (图9.3) 有 (当  $\alpha = l, \beta = \theta$  时)

$$R_\alpha = \infty, \quad R_\beta = l \operatorname{tg} \phi \tag{9.8c}$$

球壳 (图9.4) 有 (当  $\alpha = \theta, \beta = \varphi$  时)

$$R_\alpha = R, \quad R_\beta = R \tag{9.9c}$$

对于一般性壳体,  $R_\alpha, R_\beta$  可按主曲率定义推导。在  $\alpha\gamma$  平面内主曲率

$$\begin{aligned}
 \kappa_\alpha &= \frac{1}{R_\alpha} = \vec{n} \cdot \frac{d^2 \vec{r}}{ds^2} = \vec{n} \cdot \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial \alpha^2} \left( \frac{d\alpha}{ds} \right)^2 \\
 &= (\vec{e}_\alpha \times \vec{e}_\beta) \cdot \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial \alpha^2} \left( \frac{d\alpha}{ds} \right)^2
 \end{aligned} \tag{r}$$

其中  $\vec{e}_\alpha$  及  $\vec{e}_\beta$  分别为  $\alpha, \beta$  方向单位向量。按式 (9.4)



$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} = A \vec{e}_\alpha, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} = B \vec{e}_\beta \quad (s)$$

即

$$\vec{e}_\alpha = \frac{1}{A} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha}, \quad \vec{e}_\beta = \frac{1}{B} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} \quad (t)$$

按式 (9.5), 考虑到  $\alpha\gamma$  平面内

$$d\beta = 0, \quad \left(\frac{d\alpha}{ds}\right) = \frac{1}{A^2} \quad (u)$$

则有

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_\alpha} &= \frac{1}{A^2 B} \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} \right) \cdot \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial \alpha^2} \\ &= \frac{1}{A^2 B} \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \alpha} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \alpha} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial \alpha} \vec{k} \right) \times \left( \frac{\partial x}{\partial \beta} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \beta} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial \beta} \vec{k} \right) \right] \\ &\quad \cdot \left( \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2} \vec{i} + \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2} \vec{j} + \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2} \vec{k} \right) \end{aligned} \quad (9.17a)$$

同样

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_\beta} &= \frac{1}{AB^2} \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \alpha} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \alpha} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial \alpha} \vec{k} \right) \times \left( \frac{\partial x}{\partial \beta} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \beta} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial \beta} \vec{k} \right) \right] \\ &\quad \cdot \left( \frac{\partial^2 x}{\partial \beta^2} \vec{i} + \frac{\partial^2 y}{\partial \beta^2} \vec{j} + \frac{\partial^2 z}{\partial \beta^2} \vec{k} \right) \end{aligned} \quad (9.17b)$$

式 (9.17) 是主曲率及主曲率半径的一般算式。对于圆柱壳、圆锥壳、球壳, 将已知的  $x(\alpha, \beta)$ ,  $y(\alpha, \beta)$ ,  $z(\alpha, \beta)$  表达式代入式 (9.17), 即可求得上面已经直接求得的主曲率半径各式 (9.7c), (9.8c), (9.9c)。

上述主曲率半径表达式连同本节讨论的相应拉梅参数及曲线坐标是以下各章从本章一般性壳体方程推导各类壳体方程的基础。因此本章下面各节的基本方程就可以从壳体一般性参数  $\alpha, \beta, A, B, R_\alpha, R_\beta$  出发进行建立, 以便具有普遍性意义。这就是薄壳振动的一般性理论。

### § 9.3 几何方程

和薄板振动理论一样, 薄壳振动理论方程包括有:

1. 中面位移与非中面位移关系;
2. 表达位移与应变关系的几何方程;
3. 表达应变与应力关系的物理方程;
4. 应力沿厚度方向积分而成的内力表达式;
5. 内力与惯性力间动力平衡方程。

这些方程的综合将归结为用中面位移表示的薄壳振动理论的基本方程组。因此我们将从本节起逐步建立薄壳各力学量和中面位移间关系。本节首先讨论几何方程。

设薄壳中面上一点沿曲线坐标  $\alpha, \beta, \gamma$  方向的三个位移分量为  $u(\alpha, \beta), v(\alpha, \beta), w(\alpha, \beta)$ ; 非中面上点的相应三个位移分量为  $u_1(\alpha, \beta, \gamma), v_1(\alpha, \beta, \gamma), w_1(\alpha, \beta, \gamma)$ 。根据假定 (a) 位移沿  $\gamma$  方向是线性分布, 因此有两者之间关系式

$$u_1 = u + \gamma \left( \frac{\partial u_1}{\partial \gamma} \right) = u + \gamma \theta_\alpha \quad (9.18a)$$

$$v_1 = v + \gamma \left( \frac{\partial v_1}{\partial \gamma} \right) = v + \gamma \theta_\beta \quad (9.18b)$$

根据假定 (d) 有

$$w_1 = w \quad (9.18c)$$

式中中面处位移沿  $\gamma$  变化率  $\left( \frac{\partial u_1}{\partial \gamma} \right)_0, \left( \frac{\partial v_1}{\partial \gamma} \right)_0$  值将根据直法线假定 (a), 即横向剪切变形为零, 和中面位移分量建立关系。这就要首先建立薄壳内各点应变分量与位移分量间几何方程。

**正应变** 由上节中式 (9.15), (9.16) 已知壳体内变形前任一微段表达式为

$$(ds)^2 = A_1^2 (d\alpha)^2 + B_1^2 (d\beta)^2 + C_1^2 (d\gamma)^2 \quad (9.19)$$

该微段起点  $P_1(\alpha, \beta, \gamma)$  有位移  $u_1, v_1, w_1$  而移动到点  $P_2$  (图9.7), 而  $P_2$  点的坐标为  $(\alpha + \alpha_1, \beta + \beta_1, \gamma + \gamma_1)$ 。位移分量  $u_1, v_1, w_1$  与坐标的改变量  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  间关系为

$$u_1 = A_1 \alpha_1, \quad v_1 = B_1 \beta_1, \quad w_1 = C_1 \gamma_1 \quad (9.20)$$

该微段终点  $P_1'(\alpha + d\alpha, \beta + d\beta, \gamma + d\gamma)$  变形后移动到  $P_2'(\alpha + d\alpha + \alpha_1 + d\alpha_1, \beta + d\beta + \beta_1 + d\beta_1, \gamma + d\gamma + \gamma_1 + d\gamma_1)$ , 则变形前微段  $ds$  将变为  $ds'$ , 其长度利用式 (9.19) 类似有

$$\begin{aligned} (ds')^2 = & A_1'^2 (\alpha + \alpha_1, \beta + \beta_1, \gamma + \gamma_1) (d\alpha + d\alpha_1)^2 \\ & + B_1'^2 (\alpha + \alpha_1, \beta + \beta_1, \gamma + \gamma_1) (d\beta + d\beta_1)^2 \\ & + C_1'^2 (\alpha + \alpha_1, \beta + \beta_1, \gamma + \gamma_1) (d\gamma + d\gamma_1)^2 \end{aligned} \quad (9.21)$$

由于是小变形,  $A_1'^2, B_1'^2, C_1'^2$  可展开为  $A_1^2, B_1^2, C_1^2$  的台劳 (Taylor) 级数, 并取一项近似, 即

$$A_1'^2 = A_1^2(\alpha, \beta, \gamma) + \left[ \alpha_1 \frac{\partial(A_1^2)}{\partial \alpha} + \beta_1 \frac{\partial(A_1^2)}{\partial \beta} + \gamma_1 \frac{\partial(A_1^2)}{\partial \gamma} \right] \quad (9.22a)$$

$$B_1'^2 = B_1^2(\alpha, \beta, \gamma) + \left[ \alpha_1 \frac{\partial(B_1^2)}{\partial \alpha} + \beta_1 \frac{\partial(B_1^2)}{\partial \beta} + \gamma_1 \frac{\partial(B_1^2)}{\partial \gamma} \right] \quad (9.22b)$$

$$C_1'^2 = C_1^2 = 1 \quad (9.22c)$$

再计算

$$(d\alpha + d\alpha_1)^2 = (d\alpha)^2 + 2d\alpha d\alpha_1 + (d\alpha_1)^2 \quad (a)$$

考虑到是小变形的线性理论, 可忽略  $(d\alpha_1)^2$  项, 再进一步有

$$d\alpha_1 = \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \gamma} d\gamma \quad (b)$$

所以

$$(d\alpha + d\alpha_1)^2 = (d\alpha)^2 + 2d\alpha \left( \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \gamma} d\gamma \right) \quad (9.22d)$$

类似有

$$(d\beta + d\beta_1)^2 = (d\beta)^2 + 2d\beta \left( \frac{\partial \beta_1}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \beta_1}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial \beta_1}{\partial \gamma} d\gamma \right) \quad (9.22e)$$

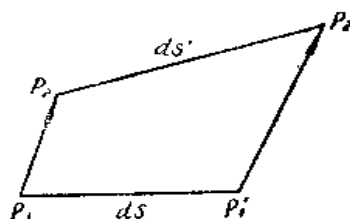


图 9.7

$$(d\gamma + d\gamma_1)^2 = (d\gamma)^2 + 2d\gamma \left( \frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \gamma_1}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial \gamma_1}{\partial \gamma} d\gamma \right) \quad (9.22f)$$

将 (9.22) 各式代入式 (9.21)，并忽略式 (9.22) 第二项乘积的小量，并展开之，有

$$(ds')^2 = H_{11}^2 (d\alpha)^2 + H_{22}^2 (d\beta)^2 + H_{33}^2 (d\gamma)^2 + 2H_{12}^2 d\alpha d\beta + 2H_{23}^2 d\beta d\gamma + 2H_{31}^2 d\gamma d\alpha \quad (9.23a)$$

式中

$$H_{11}^2 = A_1^2 + \left[ \alpha_1 \frac{\partial(A_1^2)}{\partial \alpha} + \beta_1 \frac{\partial(A_1^2)}{\partial \beta} + \gamma_1 \frac{\partial(A_1^2)}{\partial \gamma} \right] + 2A_1^2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha} \quad (9.23b)$$

$$H_{22}^2 = B_1^2 + \left[ \alpha_1 \frac{\partial(B_1^2)}{\partial \alpha} + \beta_1 \frac{\partial(B_1^2)}{\partial \beta} + \gamma_1 \frac{\partial(B_1^2)}{\partial \gamma} \right] + 2B_1^2 \frac{\partial \beta_1}{\partial \beta} \quad (9.23c)$$

$$H_{33}^2 = C_1^2 + 2C_1^2 \frac{\partial \gamma_1}{\partial \gamma} \quad (9.23d)$$

$$H_{12}^2 = A_1^2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \beta} + B_1^2 \frac{\partial \beta_1}{\partial \alpha} \quad (9.23e)$$

$$H_{23}^2 = B_1^2 \frac{\partial \beta_1}{\partial \gamma} + C_1^2 \frac{\partial \gamma_1}{\partial \beta} \quad (9.23f)$$

$$H_{31}^2 = C_1^2 \frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha} + A_1^2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \gamma} \quad (9.23g)$$

若变形前线段限制在  $\alpha$  方向，即式 (9.19)，(9.23) 中取  $d\beta = d\gamma = 0$ ，则有  $\alpha$  方向主应变

$$e_\alpha = \frac{(ds') - (ds)}{ds} = \frac{H_{11}}{A_1} - 1 = \sqrt{1 + \frac{H_{11}^2 - A_1^2}{A_1^2}} - 1 \quad (c)$$

对于小变形，有  $\frac{H_{11}^2 - A_1^2}{A_1^2} \ll 1$ ，将前一项展开成台劳级数，并取一项有

$$e_\alpha = \frac{1}{2} \frac{H_{11}^2 - A_1^2}{A_1^2} \quad (d)$$

代入式 (9.23b)，(9.20) 及 (9.16)，并利用科达齐 (Codazzi) 关系式

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{A}{R_\alpha} \right) = \frac{1}{R_\beta} \frac{\partial A}{\partial \beta} \quad (e)$$

有

$$e_\alpha = \frac{1}{A \left( 1 + \frac{\gamma}{R_\alpha} \right)} \left[ \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \frac{v_1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{A}{R_\alpha} w_1 \right] \quad (9.24a)$$

类似有

$$e_\beta = \frac{1}{B \left( 1 + \frac{\gamma}{R_\beta} \right)} \left[ \frac{\partial v_1}{\partial \beta} + \frac{u_1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{B}{R_\beta} w_1 \right] \quad (9.24b)$$

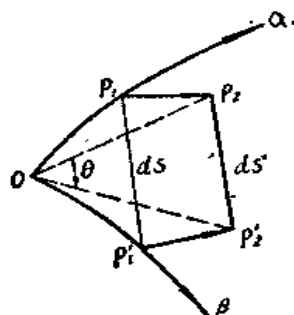


图 9.8

**剪应变** 再来研究  $\alpha\beta$  平面内角应变  $e_{\alpha\beta}$  (图9.8)。有角  $P_1OP_1'$ 。O点位于  $(\alpha, \beta, \gamma)$ ， $P_1$ 点位于  $(\alpha + d\alpha, \beta, \gamma)$ ， $P_1'$ 位于  $(\alpha, \beta + d\beta, \gamma)$ 。若应用公式 (9.23a)，按图9.7，应认为  $P_1$ 为  $(\alpha, \beta, \gamma)$ ，而  $P_1'$ 离  $P_1$ 为  $(-d\alpha, d\beta, 0)$ ，故

$$(ds')^2 = H_{11}^2 (d\alpha)^2 + H_{22}^2 (d\beta)^2 - 2H_{12}^2 d\alpha d\beta \quad (9.25a)$$

但根据三角学余弦定理又有

$$(ds')^2 = \overline{P_2P_1'}^2 = \overline{OP_2}^2 + \overline{OP_1'}^2 - 2\overline{OP_2} \overline{OP_1'} \cos \theta$$

$$= H_{11}^2 (d\alpha)^2 + H_{22}^2 (d\beta)^2 - 2H_{11}H_{22}d\alpha d\beta \cos\theta \quad (9.25b)$$

比较式 (9.25a) 及式 (9.25b) 可得

$$\cos\theta = \frac{H_{12}^2}{H_{11}H_{22}} \quad (f)$$

根据剪应变定义  $\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{\pi}{2} - \theta$ , 再忽略乘积  $H_{11}H_{22}$  的高级小量有

$$\varepsilon_{\alpha\beta} \approx \sin\varepsilon_{\alpha\beta} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_{\alpha\beta}\right) = \cos\theta = \frac{H_{12}^2}{A_1 B_1} \quad (g)$$

代入式 (9.23b), (9.20) 及式 (9.16) 有

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{A\left(1 + \frac{\gamma}{R_\alpha}\right)}{B\left(1 + \frac{\gamma}{R_\beta}\right)} \frac{\partial}{\partial\beta} \left( \frac{u_1}{A\left(1 + \frac{\gamma}{R_\alpha}\right)} \right) + \frac{B\left(1 + \frac{\gamma}{R_\beta}\right)}{A\left(1 + \frac{\gamma}{R_\alpha}\right)} \frac{\partial}{\partial\alpha} \left( \frac{v_1}{B\left(1 + \frac{\gamma}{R_\beta}\right)} \right) \quad (9.24c)$$

类似有

$$\varepsilon_{\beta\gamma} = B\left(1 + \frac{\gamma}{R_\beta}\right) \frac{\partial}{\partial\gamma} \left( \frac{v_1}{B\left(1 + \frac{\gamma}{R_\beta}\right)} \right) + \frac{1}{B\left(1 + \frac{\gamma}{R_\beta}\right)} \frac{\partial w_1}{\partial\beta} \quad (9.24d)$$

$$\varepsilon_{\gamma\alpha} = A\left(1 + \frac{\gamma}{R_\alpha}\right) \frac{\partial}{\partial\gamma} \left( \frac{u_1}{A\left(1 + \frac{\gamma}{R_\alpha}\right)} \right) + \frac{1}{A\left(1 + \frac{\gamma}{R_\alpha}\right)} \frac{\partial w_1}{\partial\alpha} \quad (9.24e)$$

式 (9.24) 即为薄壳振动理论中表示应变-位移关系的几何方程。

## § 9.4 位移、应变表达式

根据直法线假定 (a), 相当薄壳横向剪应变为零, 根据式 (9.24e) 即有

$$\varepsilon_{\gamma\alpha} = \frac{\partial u_1}{\partial\gamma} - \frac{u_1}{A\left(1 + \frac{\gamma}{R_\alpha}\right)} \frac{A}{R_\alpha} + \frac{1}{A\left(1 + \frac{\gamma}{R_\alpha}\right)} \frac{\partial w_1}{\partial\alpha} = 0 \quad (a)$$

在中面  $\gamma = 0$  处有

$$\left( \frac{\partial u_1}{\partial\gamma} \right)_0 = \theta_\alpha = \frac{u}{R_\alpha} - \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial\alpha} \quad (b)$$

代入式 (9.18) 有

$$u_1 = u + \gamma \frac{u}{R_\alpha} - \frac{\gamma}{A} \frac{\partial w}{\partial\alpha} \quad (9.25c)$$

类似有

$$\theta_\beta = \frac{v}{R_\beta} - \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial\beta} \quad (c)$$

及

$$v_1 = v + \gamma \frac{v}{R_\beta} - \frac{\gamma}{B} \frac{\partial w}{\partial\beta} \quad (9.25d)$$

式 (9.25) 即为非中面位移与中面位移关系式, 即薄壳位移表达式。

将式 (9.25) 代入式 (9.24a), (9.24b), (9.24c), 并考虑薄壳有  $\frac{\gamma}{R_\alpha} \ll 1$ ,  $\frac{\gamma}{R_\beta} \ll 1$  及假定 (d), 即得应变与中面位移关系式, 即薄壳应变表达式

$$\varepsilon_a = \varepsilon_a^0 + \gamma \chi_a \quad (9.26a)$$

$$\varepsilon_\beta = \varepsilon_\beta^0 + \gamma \chi_\beta \quad (9.26b)$$

$$\varepsilon_{a\beta} = \varepsilon_{a\beta}^0 + \gamma \chi_{a\beta} \quad (9.26c)$$

式中

$$\varepsilon_a^0 = \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{v}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{w}{R_a} \quad (9.27a)$$

$$\varepsilon_\beta^0 = \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{u}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{w}{R_\beta} \quad (9.27b)$$

$$\varepsilon_{a\beta}^0 = \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{u}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{v}{B} \right) \quad (9.27c)$$

为中曲面的薄膜应变分量。

$$\chi_a = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \frac{u}{R_a} - \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right] + \frac{1}{AB} \left[ \frac{v}{R_\beta} - \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right] \frac{\partial A}{\partial \beta} \quad (9.28a)$$

$$\chi_\beta = \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[ \frac{v}{R_\beta} - \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right] + \frac{1}{AB} \left[ \frac{u}{R_a} - \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right] \frac{\partial B}{\partial \alpha} \quad (9.28b)$$

$$\chi_{a\beta} = \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[ \frac{u}{AR_a} - \frac{1}{A^2} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right] + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \frac{v}{BR_\beta} - \frac{1}{B^2} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right] \quad (9.28c)$$

为中曲面弯曲应变——曲率变化分量。

## § 9.5 物理方程与应力表达式

对于各向同性匀质材料，在  $(\alpha, \beta, \gamma)$  正交曲线坐标系中三维弹性体的应力-应变关系 (1.3) 也成立，即有

$$\varepsilon_a = \frac{1}{E} [\sigma_a - \nu(\sigma_\beta + \sigma_\gamma)] \quad (9.29a)$$

$$\varepsilon_\beta = \frac{1}{E} [\sigma_\beta - \nu(\sigma_a + \sigma_\gamma)] \quad (9.29b)$$

$$\varepsilon_\gamma = \frac{1}{E} [\sigma_\gamma - \nu(\sigma_a + \sigma_\beta)] \quad (9.29c)$$

$$\varepsilon_{a\beta} = \frac{\tau_{a\beta}}{G}, \quad \varepsilon_{\beta\gamma} = \frac{\tau_{\beta\gamma}}{G}, \quad \varepsilon_{\gamma a} = \frac{\tau_{\gamma a}}{G} \quad (9.29d)$$

式中  $\sigma_a, \sigma_\beta, \sigma_\gamma$  为正应力， $\tau_{a\beta}, \tau_{\beta\gamma}, \tau_{\gamma a}$  为剪应力。根据假定 (b)，垂直中面的法向应力  $\sigma_\gamma = 0$ ，同时前面已指出  $\varepsilon_{\beta\gamma} = \varepsilon_{\gamma a} = 0$ ，因此有薄壳振动理论的物理方程

$$\sigma_a = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_a + \nu \varepsilon_\beta) \quad (9.30a)$$

$$\sigma_\beta = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_\beta + \nu \varepsilon_a) \quad (9.30b)$$

$$\tau_{a\beta} = G \varepsilon_{a\beta} \quad (9.30c)$$

将应变表达式 (9.26) 代入上式即得应力与中面位移关系式即薄壳应力表达式

$$\sigma_a = \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_a^0 + \nu \varepsilon_\beta^0 + \gamma(\chi_a + \nu \chi_\beta)] \quad (9.31a)$$

$$\sigma_\beta = \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_\beta^0 + \nu \varepsilon_a^0 + \gamma(\chi_\beta + \nu \chi_a)] \quad (9.31b)$$

$$\tau_{\alpha\beta} = G[e_{\alpha\beta}^0 + \gamma X_{\alpha\beta}] \quad (9.31c)$$

式中 $e_{\alpha}^0$ ,  $e_{\beta}^0$ ,  $e_{\alpha\beta}^0$ 及 $X_{\alpha}$ ,  $X_{\beta}$ ,  $X_{\alpha\beta}$ 表达式分别见式(9.27), (9.28)。

最后应该指出, 若在式(9.25)一式(9.28)及式(9.31)中取 $A=B=1$ ,  $R_{\alpha}=R_{\beta}=\infty$ ,  $u=v=0$ , 即化为第二章所列的平板相应的位移、应变、应力表达式。

## § 9.6 内力表达式

从壳体切出一高 $h$ , 中面为 $da \times d\beta$ 微体。每个侧面作用有三个应力分量。对于薄壳, 是将这些应力分量合成为薄膜力 $N$ 、弯矩与扭矩 $M$ 、剪力 $Q$ 作用在中面上来研究的。

考虑位于平行曲面上—微体(图9.9)。宽 $B_1 d\beta$ , 高 $d\gamma$ 侧面上作用 $\sigma_{\alpha}$ 及 $\tau_{\alpha\beta}$ ,  $\tau_{\alpha\gamma}$ ; 宽 $A_1 d\alpha$ , 高 $d\gamma$ 侧面上作用 $\sigma_{\beta}$ 及 $\tau_{\beta\alpha}$ ,  $\tau_{\beta\gamma}$ 。沿 $\alpha$ 方向正应力 $\sigma_{\alpha}$ 沿厚度积分为中面 $Bd\beta$ 宽度上的合力, 因此 $\alpha$ 方向中面上单位长度的薄膜力为

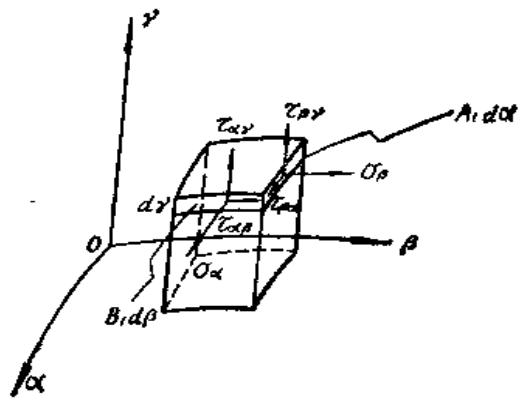


图 9.9

$$N_{\alpha} = \frac{1}{Bd\beta} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha}(B_1 d\beta) d\gamma = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha} \left(1 + \frac{\gamma}{R_{\beta}}\right) d\gamma \quad (a)$$

同上所述, 在薄壳理论中 $\frac{h}{R} \ll 1$ ,  $\left(1 + \frac{\gamma}{R_{\beta}}\right) \approx 1$ , 于是有

$$N_{\alpha} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha} d\gamma \quad (9.32a)$$

类似,  $\beta$ 方向中面上单位长度的薄膜力为

$$N_{\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\beta} d\gamma \quad (9.32b)$$

以及中面上单位长度的薄膜剪力为

$$N_{\alpha\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{\alpha\beta} \left(1 + \frac{\gamma}{R_{\beta}}\right) d\gamma, \quad N_{\beta\alpha} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{\beta\alpha} \left(1 + \frac{\gamma}{R_{\alpha}}\right) d\gamma \quad (b)$$

同样可简化为

$$N_{\alpha\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{\alpha\beta} d\gamma = N_{\beta\alpha} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{\beta\alpha} d\gamma \quad (9.32c)$$

沿 $\alpha$ 方向正应力 $\sigma_{\alpha}$ 对中面取矩, 沿厚度积分为中面 $Bd\beta$ 宽度上的合力矩, 因此 $\alpha$ 方向中面上单位长度的弯矩为

$$M_{\alpha} = \frac{1}{Bd\beta} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha} \gamma (B_1 d\beta) d\gamma = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha} \gamma \left(1 + \frac{\gamma}{R_{\beta}}\right) d\gamma \approx \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha} \gamma d\gamma \quad (9.33a)$$

类似,  $\beta$ 方向中面上单位长度的弯矩为

$$M_{\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\beta} \gamma d\gamma \quad (9.33b)$$

以及中面上单位长度的扭矩为

$$M_{\alpha\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{\alpha\beta} \gamma \left(1 + \frac{\gamma}{R_{\beta}}\right) d\gamma, \quad M_{\beta\alpha} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{\beta\alpha} \gamma \left(1 + \frac{\gamma}{R_{\alpha}}\right) d\gamma \quad (c)$$

有

$$M_{\alpha\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{\alpha\beta} \gamma d\gamma = M_{\beta\alpha} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{\beta\alpha} \gamma d\gamma \quad (9.33c)$$

沿 $\alpha$ 方向剪应力 $\tau_{\alpha\gamma}$ 沿厚度积分为中面 $Bd\beta$ 宽度上的合剪力，因此 $\alpha$ 方向中面上单位长度的横向剪力为

$$Q_{\alpha} = -\frac{1}{Bd\beta} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{\alpha\gamma} (B_1 d\beta) d\gamma = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{\alpha\gamma} \left(1 + \frac{\gamma}{R_{\beta}}\right) d\gamma \approx \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{\alpha\gamma} d\gamma \quad (9.34a)$$

类似， $\beta$ 方向上单位长度的横向剪力为

$$Q_{\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{\beta\gamma} d\gamma \quad (9.34b)$$

将应力分量表达式 (9.31) 代入式 (9.32), (9.33) 即可求得内力与中面位移关系式，即薄壳内力表达式

$$N_{\alpha} = K(e_{\alpha}^0 + \nu e_{\beta}^0) \quad (9.35a)$$

$$N_{\beta} = K(e_{\beta}^0 + \nu e_{\alpha}^0) \quad (9.35b)$$

$$N_{\alpha\beta} = N_{\beta\alpha} = K \frac{(1-\nu)}{2} e_{\alpha\beta}^0 \quad (9.35c)$$

$$M_{\alpha} = D(\chi_{\alpha} + \nu \chi_{\beta}) \quad (9.35d)$$

$$M_{\beta} = D(\chi_{\beta} + \nu \chi_{\alpha}) \quad (9.35e)$$

$$M_{\alpha\beta} = M_{\beta\alpha} = D \frac{(1-\nu)}{2} \chi_{\alpha\beta} \quad (9.35f)$$

式中，薄膜刚度

$$K = \frac{Eh}{1-\nu^2} \quad (9.36a)$$

弯曲刚度

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (9.36b)$$

显然，薄膜力 $N$ 只与中面薄膜应变分量 $e^0$ 有关，弯矩、扭矩 $M$ 只与中面弯曲应变分量 $\chi$ 有关。这里还应指出，根据薄壳理论假定 (a)，忽略垂直剪应力，因此横向剪力不能根据垂直剪应力计算，而由下面给出的中面平衡方程求取，这是和薄板理论中情况相类似。

从式 (9.35) 各式求出用内力表示的中面应变分量 $e_{\alpha}^0$ ,  $e_{\beta}^0$ ,  $e_{\alpha\beta}^0$ ,  $\chi_{\alpha}$ ,  $\chi_{\beta}$ ,  $\chi_{\alpha\beta}$ ，代回式 (9.31)，即可得到用内力表示的应力表达式

$$\sigma_{\alpha} = \frac{N_{\alpha}}{h} + \frac{12M_{\alpha}}{h^3} \gamma \quad (9.37a)$$

$$\sigma_{\beta} = \frac{N_{\beta}}{h} + \frac{12M_{\beta}}{h^3} \gamma \quad (9.37b)$$

$$\tau_{\alpha\beta} = \frac{N_{\alpha\beta}}{h} + \frac{12M_{\alpha\beta}}{h^3} \gamma \quad (9.37c)$$

上式表明，薄膜力形成壳体应力中沿厚度均布分量——薄膜应力；弯矩与扭矩形成壳体应力中沿厚度线性分布分量——弯曲应力。这里应该指出，和薄板情况相类似，由横向剪力值推求垂直剪应力是根据垂直剪应力沿厚度抛物线分布确定的，即

$$\tau_{\alpha\gamma} = -\frac{3}{2h} Q_{\alpha} \left[ 1 - \left( \frac{\gamma}{h/2} \right)^2 \right] \quad (9.37d)$$

$$\tau_{\beta\gamma} = -\frac{3}{2h} Q_{\beta} \left[ 1 - \left( \frac{\gamma}{h/2} \right)^2 \right] \quad (9.37e)$$

式(9.37)表明，有了内力值，求应力是十分简单的，因此在壳体中一般也只讨论内力值在壳内分布，就不再给出应力结果。

以上我们将壳体内的应力合成了八个内力素：薄膜力 $N_{\alpha}, N_{\beta}, N_{\alpha\beta}$ ，弯矩 $M_{\alpha}, M_{\beta}$ ，扭矩 $M_{\alpha\beta}$ ，横向剪力 $Q_{\alpha}, Q_{\beta}$ ，作用在中面上。以后就只要研究中面上这些内力素的平衡。

### § 9.7 动力平衡方程

在壳体中曲面上取出一微元，如图9.10(a)所示。按§9.2所述，沿 $\alpha, \beta$ 方向的弧长分别为 $A d\alpha$ 和 $B d\beta$ 。在一般情况下，拉梅参数也是坐标 $\alpha, \beta$ 的函数，因此另两边的弧长应分别为 $\left( A + \frac{\partial A}{\partial \beta} d\beta \right) d\alpha$ 和 $\left( B + \frac{\partial B}{\partial \alpha} d\alpha \right) d\beta$ 。在这些弧边上作用有五个内力分量： $N_{\alpha}, N_{\beta}, N_{\alpha\beta}, Q_{\alpha}, Q_{\beta}$ ，如图9.10(b)所示；作用有三个内力矩分量： $M_{\alpha}, M_{\beta}, M_{\alpha\beta}$ ，如图9.10(c)所示，图上均表示各分量的正方向。在中面微元上尚作用有沿 $\alpha, \beta, \gamma$ 三方向的单位面积外载分量 $q_{\alpha}, q_{\beta}, q_{\gamma}$ 及相应惯性力项 $\left( -\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right), \left( -\rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right), \left( -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right)$ ，如图9.10(a)所示。

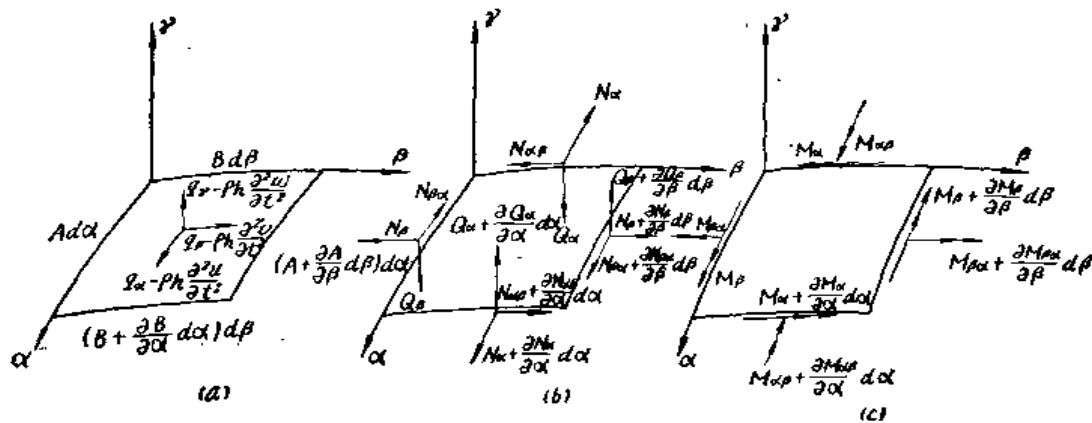


图 9.10

将所有内力素乘所在边的弧长，所有外载分量及惯性力项乘微元面积，并投影到 $\alpha, \beta, \gamma$ 三个方向上，并略去高阶小量，即可建立动态平衡方程组。

例如，由沿 $\alpha$ 方向所有力向量投影和为零有



$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial \alpha} d\alpha \right) (B d\beta) + (N_{\alpha}) \left( \frac{\partial B}{\partial \alpha} d\alpha d\beta \right) + \left( \frac{\partial N_{\beta\alpha}}{\partial \beta} d\beta \right) (A d\alpha) \\
& + (N_{\beta\alpha}) \left( \frac{\partial A}{\partial \beta} d\beta d\alpha \right) + (N_{\beta} A d\alpha) \left( -\frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} d\beta \right) + (N_{\alpha\beta} B d\beta) \left( \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} d\alpha \right) \\
& + (Q_{\alpha} B d\beta) \left( -\frac{A}{R_{\alpha}} d\alpha \right) + \left( q_{\alpha} - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) (A d\alpha) (B d\beta) = 0 \quad (a)
\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(BN_{\alpha})}{\partial \alpha} + \frac{\partial(AN_{\beta\alpha})}{\partial \beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} N_{\beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} N_{\alpha\beta} \\
& + AB \frac{Q_{\alpha}}{R_{\alpha}} + AB q_{\alpha} - AB \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (9.38a)
\end{aligned}$$

类似沿 $\beta, \gamma$ 方向有

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(AN_{\beta})}{\partial \beta} + \frac{\partial(BN_{\alpha\beta})}{\partial \alpha} - \frac{\partial A}{\partial \beta} N_{\alpha} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} N_{\beta\alpha} + AB \frac{Q_{\beta}}{R_{\beta}} \\
& + AB q_{\beta} - AB \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (9.38b)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial(BQ_{\alpha})}{\partial \alpha} + \frac{\partial(AQ_{\beta})}{\partial \beta} - AB \frac{N_{\alpha}}{R_{\alpha}} - AB \frac{N_{\beta}}{R_{\beta}} + AB q_{\gamma} - AB \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (9.38c)$$

又如, 由所有力矩向量在 $\alpha$ 方向投影以及所有力向量对 $\alpha$ 轴取矩投影和为零有

$$\begin{aligned}
& \left( -\frac{\partial M_{\beta}}{\partial \beta} d\beta \right) (A d\alpha) + (-M_{\beta}) \left( \frac{\partial A}{\partial \beta} d\beta d\alpha \right) + \left( -\frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} d\alpha \right) (B d\beta) \\
& + (-M_{\alpha\beta}) \left( \frac{\partial B}{\partial \alpha} d\alpha d\beta \right) + (M_{\alpha} B d\beta) \left( \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} d\alpha \right) \\
& + (M_{\beta\alpha} A d\alpha) \left( -\frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} d\beta \right) + (Q_{\beta} A d\alpha) (B d\beta) = 0 \quad (b)
\end{aligned}$$

即

$$-\frac{\partial(AM_{\beta})}{\partial \beta} - \frac{\partial(BM_{\alpha\beta})}{\partial \alpha} + \frac{\partial A}{\partial \beta} M_{\alpha} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_{\beta\alpha} + AB Q_{\beta} = 0 \quad (9.38d)$$

类似沿 $\beta, \gamma$ 方向有

$$-\frac{\partial(BM_{\alpha})}{\partial \alpha} - \frac{\partial(AM_{\beta\alpha})}{\partial \beta} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_{\beta} - \frac{\partial A}{\partial \beta} M_{\alpha\beta} + AB Q_{\alpha} = 0 \quad (9.38e)$$

$$N_{\alpha\beta} - N_{\beta\alpha} + \frac{M_{\alpha\beta}}{R_{\alpha}} - \frac{M_{\beta\alpha}}{R_{\beta}} = 0 \quad (9.38f)$$

若将§9.6之内力表达式(b), (c)代入式(9.38f), 可以发现这是一个恒等式, 即已经满足,

$$N_{\alpha\beta} - N_{\beta\alpha} + \frac{M_{\alpha\beta}}{R_{\alpha}} - \frac{M_{\beta\alpha}}{R_{\beta}} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\tau_{\alpha\beta} - \tau_{\beta\alpha}) \left( 1 + \frac{\gamma}{R_{\alpha}} \right) \left( 1 + \frac{\gamma}{R_{\beta}} \right) d\gamma = 0 \quad (c)$$

另外, 在§9.6中曾指出过, 横向剪力 $Q_{\alpha}, Q_{\beta}$ 不能由垂直剪应力积分求得, 而需由平衡方程(9.38d), (9.38e)求得, 即

$$Q_{\alpha} = \frac{1}{AB} \left[ \frac{\partial(BM_{\alpha})}{\partial \alpha} + \frac{\partial(AM_{\beta\alpha})}{\partial \beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_{\beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} M_{\alpha\beta} \right] \quad (9.39a)$$

$$Q_{\beta} = \frac{1}{AB} \left[ \frac{\partial(AM_{\beta})}{\partial \beta} + \frac{\partial(BM_{\alpha\beta})}{\partial \alpha} - \frac{\partial A}{\partial \beta} M_{\alpha} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_{\beta\alpha} \right] \quad (9.39b)$$

因此, 薄壳振动理论中独立的内力变量有六个:  $N_\alpha, N_\beta, N_{\alpha\beta}, M_\alpha, M_\beta, M_{\alpha\beta}$ , 它们应满足式 (9.38) 中消去  $Q_\alpha, Q_\beta$  后的三个动力平衡方程, 即运动方程:

$$\frac{\partial(BN_\alpha)}{\partial\alpha} + \frac{\partial(AN_{\beta\alpha})}{\partial\beta} - \frac{\partial B}{\partial\alpha} N_\beta + \frac{\partial A}{\partial\beta} N_{\alpha\beta} + \frac{1}{R_\alpha} \left[ \frac{\partial(BM_\alpha)}{\partial\alpha} + \frac{\partial(AM_{\beta\alpha})}{\partial\beta} - \frac{\partial B}{\partial\alpha} M_\beta + \frac{\partial A}{\partial\beta} M_{\alpha\beta} \right] + AB \left( q_\alpha - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (9.40a)$$

$$\frac{\partial(AN_\beta)}{\partial\beta} + \frac{\partial(BN_{\alpha\beta})}{\partial\alpha} - \frac{\partial A}{\partial\beta} N_\alpha + \frac{\partial B}{\partial\alpha} N_{\beta\alpha} + \frac{1}{R_\beta} \left[ \frac{\partial(AM_\beta)}{\partial\beta} + \frac{\partial(BM_{\alpha\beta})}{\partial\alpha} - \frac{\partial A}{\partial\beta} M_\alpha + \frac{\partial B}{\partial\alpha} M_{\beta\alpha} \right] + AB \left( q_\beta - \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (9.40b)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial\alpha} \left\{ \frac{1}{A} \left[ \frac{\partial(BM_\alpha)}{\partial\alpha} + \frac{\partial(AM_{\beta\alpha})}{\partial\beta} - \frac{\partial B}{\partial\alpha} M_\beta + \frac{\partial A}{\partial\beta} M_{\alpha\beta} \right] \right\} \\ & + \frac{\partial}{\partial\beta} \left\{ \frac{1}{B} \left[ \frac{\partial(AM_\beta)}{\partial\beta} + \frac{\partial(BM_{\alpha\beta})}{\partial\alpha} - \frac{\partial A}{\partial\beta} M_\alpha + \frac{\partial B}{\partial\alpha} M_{\beta\alpha} \right] \right\} \\ & - AB \left( \frac{N_\alpha}{R_\alpha} + \frac{N_\beta}{R_\beta} \right) + AB \left( q_r - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (9.40c)$$

## § 9.8 薄壳振动的基本微分方程与边界条件

综合以上各节内容可以知道, 壳体内共有十七个未知量, 即: 八个内力分量 ( $N_\alpha, N_\beta, N_{\alpha\beta}, M_\alpha, M_\beta, M_{\alpha\beta}, Q_\alpha, Q_\beta$ ), 六个中面应变分量 ( $\varepsilon_\alpha^\theta, \varepsilon_\beta^\theta, \varepsilon_{\alpha\beta}^\theta, \chi_\alpha, \chi_\beta, \chi_{\alpha\beta}$ ) 和三个中面位移分量 ( $u, v, w$ )。薄壳振动理论给出的基本方程和关系式也有十七个, 即: 五个内力动平衡方程 (9.40a), (9.40b), (9.40c), (9.39a), (9.39b), 六个内力与中面应变关系式 (9.35a), (9.35b), (9.35c), (9.35d), (9.35e), (9.35f), 六个中面应变与中面位移关系式 (9.27a), (9.27b), (9.27c), (9.28a), (9.28b), (9.28c)。因此未知量数与方程数是相等的。在薄壳振动理论中一般采用位移解法, 即将式 (9.27), (9.28) 代入式 (9.35) 消去中面应变分量, 再代入式 (9.40) 消去内力分量, 从而给出关于中面位移  $u, v, w$  的薄壳振动的基本微分方程。

在给定边界、初始条件下求解这一基本微分方程组, 给出中面位移分量  $u, v, w$  后, 即可由式 (9.25) 求取非中面位移分量, 由式 (9.27), (9.28) 求取中面应变分量, 由式 (9.26) 求取非中面应变分量, 由式 (9.31) 求取中面与非中面应力分量, 由式 (9.35), (9.39) 求取内力分量, 从而给出薄壳振动问题的全部解。

当然, 全部方程中引入  $A=B=1, R_\alpha=R_\beta=\infty$ , 则所有方程即简化为平板振动方程及弹性力学平面问题动力方程。

上述关于位移的薄壳振动基本微分方程组是一个三元八阶联立偏微分方程组, 它的求解需要在每边给定四个边界条件:

在  $\alpha=\alpha_0$  边界有

$$N_\alpha = \bar{N}_\alpha \text{ 或 } u = \bar{u} \quad (9.41a)$$

$$T_{\alpha\beta} = \bar{T}_{\alpha\beta} \text{ 或 } v = \bar{v} \quad (9.41b)$$

$$M_\alpha = \bar{M}_\alpha \text{ 或 } \theta_\alpha = \bar{\theta}_\alpha \quad (9.41c)$$

$$V_\alpha = \bar{V}_\alpha \text{ 或 } w = \bar{w} \quad (9.41d)$$

在  $\beta=\beta_0$  边界有

$$N_\beta = \bar{N}_\beta \text{ 或 } v = \bar{v} \quad (9.42a)$$

$$T_{\beta\alpha} = \bar{T}_{\beta\alpha} \text{ 或 } u = \bar{u} \quad (9.42b)$$

$$M_\beta = \bar{M}_\beta \text{ 或 } \theta_\beta = \bar{\theta}_\beta \quad (9.42c)$$

$$V_\beta = \bar{V}_\beta \text{ 或 } w = \bar{w} \quad (9.42d)$$

式中, 转角 $\theta_\alpha, \theta_\beta$ 见§9.4式(b), (c),  $T_{\alpha\beta}$ 为薄膜合剪力,  $V_\alpha, V_\beta$ 为横向合剪力, 和平板振动理论中边界合剪力类似, 它们分别定义为

$$T_{\alpha\beta} = N_{\alpha\beta} + \frac{M_{\alpha\beta}}{R_\beta}, \quad T_{\beta\alpha} = N_{\beta\alpha} + \frac{M_{\beta\alpha}}{R_\alpha} \quad (9.43a)$$

$$V_\alpha = Q_\alpha + \frac{1}{B} \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \beta}, \quad V_\beta = Q_\beta + \frac{1}{A} \frac{\partial M_{\beta\alpha}}{\partial \alpha} \quad (9.43b)$$

在任意曲线边界一般有

$$N_n = \bar{N}_n \text{ 或 } u_n = \bar{u}_n \quad (9.44a)$$

$$T_{nt} = \bar{T}_{nt} \text{ 或 } u_t = \bar{u}_t \quad (9.44b)$$

$$M_n = \bar{M}_n \text{ 或 } \theta_n = \bar{\theta}_n \quad (9.44c)$$

$$V_n = \bar{V}_n \text{ 或 } w = \bar{w} \quad (9.44d)$$

式中带下标 $n$ 各量为法向分量, 带下标 $t$ 各量为切向分量, 上部带一横的各量为边界给定值。

对于常用的边界条件有

$$\text{自由边:} \quad N_n = T_{nt} = M_n = V_n = 0 \quad (9.45a)$$

$$\text{固定边:} \quad u_n = u_t = \theta_n = w = 0 \quad (9.45b)$$

$$\text{中面自由简支边:} \quad N_n = T_{nt} = M_n = w = 0 \quad (9.45c)$$

$$\text{中面约束简支边:} \quad u_n = u_t = M_n = w = 0 \quad (9.45d)$$

$$\text{垂向自由简支边:} \quad N_n = u_t = M_n = w = 0 \quad (9.45e)$$

## §9.9 薄壳振动的变分方程

在第一章曾经指出过, 弹性体振动的基本方程表示方法除微分方程外, 尚有变分方程形式。对于一般性薄壳同样可以建立用动能、变形能及外力做功来表示的变分方程, 而且可以证明它和以前几节的微分方程是等价的。它是薄壳振动分析变分解法的基础。

任何弹性体的动能可表达为

$$T = \iiint_V \frac{\rho}{2} (\dot{u}_1^2 + \dot{v}_1^2 + \dot{w}_1^2) dV \quad (9.46)$$

根据薄壳振动理论假定, 按式(9.18), 用中面参数可表示

$$u_1 = u + \gamma \theta_\alpha, \quad v_1 = v + \gamma \theta_\beta, \quad w_1 = w \quad (9.47a)$$

$$dV = A_1 B_1 d\alpha d\beta d\gamma \approx AB d\alpha d\beta d\gamma \quad (9.47b)$$

所以有薄壳动能表达式

$$\begin{aligned} T = & \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \iint_S \frac{\rho}{2} \{ [\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2] + \gamma^2 [\dot{\theta}_\alpha^2 + \dot{\theta}_\beta^2] \\ & + 2\gamma [\dot{u} \dot{\theta}_\alpha + \dot{v} \dot{\theta}_\beta] \} AB d\alpha d\beta d\gamma \quad (a) \end{aligned}$$

即

$$T = \iint_S \frac{\rho h}{2} \left\{ [\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2] + \frac{h^2}{12} [\dot{\theta}_\alpha^2 + \dot{\theta}_\beta^2] \right\} AB d\alpha d\beta \quad (b)$$

根据薄壳振动理论假定 (c)，表示转动动能的后两项将可以忽略，则有薄壳动能

$$T = \iint_S \frac{\rho h}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] AB d\alpha d\beta \quad (9.48)$$

其中积分沿薄壳中曲面进行

任何弹性体的变形能可表达为

$$U = \iiint_V \frac{1}{2} [\sigma_\alpha \varepsilon_\alpha + \sigma_\beta \varepsilon_\beta + \tau_{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta} + \tau_{\beta\alpha} \gamma_{\beta\alpha} + \tau_{\alpha\beta} \gamma_{\beta\alpha} + \sigma_\gamma \varepsilon_\gamma] dV \quad (9.49)$$

根据薄壳振动理论假定 (a)，(b)，式 (9.47 b) 及正交曲线坐标表示方法有

$$U = \iiint_V \frac{1}{2} [\sigma_\alpha \varepsilon_\alpha + \sigma_\beta \varepsilon_\beta + \tau_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}] AB d\alpha d\beta d\gamma \quad (c)$$

代入应力表达式 (9.30)，可用应变分量表示

$$U = \iiint_V \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left[ \varepsilon_\alpha^2 + \varepsilon_\beta^2 + 2\nu \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta + \frac{(1-\nu)}{2} \varepsilon_{\alpha\beta}^2 \right] AB d\alpha d\beta d\gamma \quad (d)$$

再代入应变表达式 (9.26)，可用中面应变分量表示

$$U = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \iint_S \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left[ (\varepsilon_\alpha^0 + \gamma x_\alpha)^2 + (\varepsilon_\beta^0 + \gamma x_\beta)^2 + 2\nu (\varepsilon_\alpha^0 + \gamma x_\alpha) (\varepsilon_\beta^0 + \gamma x_\beta) + \frac{(1-\nu)}{2} (\varepsilon_{\alpha\beta}^0 + \gamma x_{\alpha\beta})^2 \right] AB dx d\beta d\gamma \quad (e)$$

将上式展开，并沿厚度方向进行积分，则有薄壳变形能

$$U = \iint_S \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \left[ (\varepsilon_\alpha^0 + \varepsilon_\beta^0)^2 - 2(1-\nu) \left( \varepsilon_\alpha^0 \varepsilon_\beta^0 - \frac{\varepsilon_{\alpha\beta}^0{}^2}{4} \right) \right] AB d\alpha d\beta + \iint_S \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} \left[ (x_\alpha + x_\beta)^2 - (1-\nu) \left( x_\alpha x_\beta - \frac{x_{\alpha\beta}^2}{4} \right) \right] AB d\alpha d\beta \quad (9.50)$$

其中积分沿薄壳中曲面进行。

可以明显看出，薄壳的变形能分为两部分：第一部分是薄膜应变能，第二部分是弯曲应变能。进一步代入中面应变表达式 (9.27)，(9.28)，则可建立用中面位移表达的应变能算式，对于具体形状壳体的表达式见下面有关各章。

薄壳振动的位移变分原理为

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt + \int_{t_0}^{t_1} (\delta W_B + \delta W_L) dt = 0 \quad (9.51)$$

其中  $T$ ， $U$  见式 (9.48)，(9.49)，而

边界力虚功

$$\delta W_B = \int_{L_\alpha} (\bar{N}_\alpha \delta u + \bar{N}_{\alpha\beta} \delta v + \bar{Q}_\alpha \delta w + \bar{M}_\alpha \delta \theta_\alpha + \bar{M}_{\alpha\beta} \delta \theta_\beta) B d\beta + \int_{L_\beta} (\bar{N}_\beta \delta v + \bar{N}_{\beta\alpha} \delta u + \bar{Q}_\beta \delta w + \bar{M}_\beta \delta \theta_\beta + \bar{M}_{\beta\alpha} \delta \theta_\alpha) A d\alpha \quad (9.52)$$

式中积分分别沿  $\alpha = \alpha_0$ ， $\beta = \beta_0$  边界进行。

面载虚功

$$\delta W_L = \iint_S [q_\alpha \delta u + q_\beta \delta v + q_\gamma \delta w] AB d\alpha d\beta \quad (9.53)$$

式中,  $q_\alpha, q_\beta, q_\gamma$  分别为作用在中面上单位面积外载在  $\alpha, \beta, \gamma$  轴上分量。

下面将从变分方程 (9.51) 出发推导薄壳的动力平衡方程及自然边界条件。

首先计算动能项, 代入式 (9.48) 有

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta T dt = \int_{t_0}^{t_1} \iint_S \rho h [\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}] AB d\alpha d\beta dt \quad (f)$$

对其中每一项都进行分部积分, 例如第一项有

$$\int_{t_0}^{t_1} \dot{u} \delta \dot{u} dt = [\dot{u} \delta u]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \ddot{u} \delta u dt = - \int_{t_0}^{t_1} \ddot{u} \delta u dt \quad (g)$$

则式 (f) 化为

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta T dt = - \int_{t_0}^{t_1} \iint_S \rho h [\ddot{u} \delta u + \ddot{v} \delta v + \ddot{w} \delta w] AB d\alpha d\beta dt \quad (9.54 a)$$

其次计算变形能项, 代入式 (9.49), 并计入应力表达式 (9.30), 进行变分有

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \delta U dt &= \int_{t_0}^{t_1} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \iint_S [\sigma_\alpha \delta \varepsilon_\alpha + \sigma_\beta \delta \varepsilon_\beta + \tau_{\alpha\beta} \delta \varepsilon_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha\gamma} \delta \varepsilon_{\alpha\gamma} + \tau_{\beta\gamma} \delta \varepsilon_{\beta\gamma}] \\ &\quad \times AB d\alpha d\beta d\gamma dt \end{aligned} \quad (h)$$

对其中每一项都代入应变-非中面位移关系式 (9.24) 及非中面位移-中面位移关系式 (9.18),

并采用薄壳近似式  $(1 + \frac{\gamma}{R_\alpha}) \approx (1 + \frac{\gamma}{R_\beta}) \approx 1$ , 另外再计入内力定义式 (9.32) 一式 (9.34)。

例如第一项有

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t_1} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \iint_S \sigma_\alpha \delta \varepsilon_\alpha AB d\alpha d\beta d\gamma dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \iint_S \left\{ \sigma_\alpha \left[ \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\delta u) + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} (\delta v) + \frac{1}{R_\alpha} (\delta w) \right] \right. \\ &\quad \left. + \sigma_\alpha \gamma \left[ \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\delta \theta_\alpha) + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} (\delta \theta_\beta) \right] \right\} AB d\alpha d\beta d\gamma dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \iint_S \left\{ N_\alpha \left[ \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\delta u) + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} (\delta v) + \frac{1}{R_\alpha} (\delta w) \right] \right. \\ &\quad \left. + M_\alpha \left[ \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\delta \theta_\alpha) + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} (\delta \theta_\beta) \right] \right\} AB d\alpha d\beta dt \end{aligned} \quad (i)$$

对其中每一项又都进行分部积分。例如第一项有

$$\iint_S N_\alpha \left[ \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\delta u) \right] AB d\alpha d\beta = \int_{L_\alpha} N_\alpha \delta u B d\beta - \iint_S \frac{\partial (N_\alpha \beta)}{\partial \alpha} \delta u d\alpha d\beta \quad (j)$$

对式 (h) 中每一项完成类似式 (i), (j) 所有过程, 则式 (h) 化为

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta U dt = \int_{t_0}^{t_1} \iint_S \left\{ \left[ -\frac{\partial (BN_\alpha)}{\partial \alpha} - \frac{\partial (AN_{\beta\alpha})}{\partial \beta} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} N_\beta - \frac{\partial A}{\partial \beta} N_{\alpha\beta} - AB \frac{Q_\alpha}{R_\alpha} \right] \delta u + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ -\frac{\partial(AN_\beta)}{\partial\beta} - \frac{\partial(BN_{\alpha\beta})}{\partial\alpha} + \frac{\partial A}{\partial\beta}N_\alpha - \frac{\partial B}{\partial\alpha}N_{\beta\alpha} - AB\frac{Q_\beta}{R_\beta} \right] \delta v \\
& + \left[ -\frac{\partial(BQ_\alpha)}{\partial\alpha} - \frac{\partial(AQ_\beta)}{\partial\beta} + AB\frac{N_\alpha}{R_\alpha} + AB\frac{N_\beta}{R_\beta} \right] \delta w \\
& + \left[ -\frac{\partial(BM_\alpha)}{\partial\alpha} - \frac{\partial(AM_{\beta\alpha})}{\partial\beta} + \frac{\partial B}{\partial\alpha}M_\beta - \frac{\partial A}{\partial\beta}M_{\alpha\beta} + ABQ_\alpha \right] \delta\theta_\alpha \\
& + \left[ -\frac{\partial(AM_\beta)}{\partial\beta} - \frac{\partial(BM_{\alpha\beta})}{\partial\alpha} + \frac{\partial A}{\partial\beta}M_\alpha - \frac{\partial B}{\partial\alpha}M_{\beta\alpha} + ABQ_\beta \right] \delta\theta_\beta \} d\alpha d\beta dt \\
& + \int_{t_0}^{t_1} \int_{L_\alpha} [N_\alpha \delta u + N_{\alpha\beta} \delta v + Q_\alpha \delta w + M_\alpha \delta\theta_\alpha + M_{\alpha\beta} \delta\theta_\beta] B d\beta dt \\
& + \int_{t_0}^{t_1} \int_{L_\beta} [N_{\beta\alpha} \delta u + N_\beta \delta v + Q_\beta \delta w + M_{\beta\alpha} \delta\theta_\alpha + M_\beta \delta\theta_\beta] A d\alpha dt \quad (9.54b)
\end{aligned}$$

将式 (9.52), (9.53), (9.54a), (9.54b) 代入式 (9.51) 就可得到如下形式的变分方程:

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^{t_1} \iint_S \left\{ \left[ \frac{\partial(BN_\alpha)}{\partial\alpha} + \frac{\partial(AN_{\beta\alpha})}{\partial\beta} - \frac{\partial B}{\partial\alpha}N_\beta + \frac{\partial A}{\partial\beta}N_{\alpha\beta} + AB\frac{\theta_\alpha}{R_\alpha} \right. \right. \\
& + ABq_\alpha - AB\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big] \delta u + \left[ \frac{\partial(AN_\beta)}{\partial\beta} + \frac{\partial(BN_{\alpha\beta})}{\partial\alpha} - \frac{\partial A}{\partial\beta}N_\alpha \right. \\
& + \frac{\partial B}{\partial\alpha}N_{\beta\alpha} + AB\frac{\theta_\beta}{R_\beta} + ABq_\beta - AB\rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \Big] \delta v + \left[ \frac{\partial(BQ_\alpha)}{\partial\alpha} \right. \\
& + \frac{\partial(AQ_\beta)}{\partial\beta} - AB\frac{N_\alpha}{R_\alpha} - AB\frac{N_\beta}{R_\beta} + ABq_\gamma - AB\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \Big] \delta w \\
& + \left[ \frac{\partial(BM_\alpha)}{\partial\alpha} + \frac{\partial(AM_{\beta\alpha})}{\partial\beta} - \frac{\partial B}{\partial\alpha}M_\beta + \frac{\partial A}{\partial\beta}M_{\alpha\beta} - ABQ_\alpha \right] \delta\theta_\alpha \\
& + \left[ \frac{\partial(AM_\beta)}{\partial\beta} + \frac{\partial(BM_{\alpha\beta})}{\partial\alpha} - \frac{\partial A}{\partial\beta}M_\alpha + \frac{\partial B}{\partial\alpha}M_{\beta\alpha} - ABQ_\beta \right] \delta\theta_\beta \Big\} d\alpha d\beta dt \\
& - \int_{t_0}^{t_1} \int_{L_\alpha} \left[ (N_\alpha - \bar{N}_\alpha) \delta u + (N_{\alpha\beta} - \bar{N}_{\alpha\beta}) \delta v + (Q_\alpha - \bar{Q}_\alpha) \delta w \right. \\
& + (M_\alpha - \bar{M}_\alpha) \delta\theta_\alpha + (M_{\alpha\beta} - \bar{M}_{\alpha\beta}) \delta\theta_\beta \Big] B d\beta dt \\
& - \int_{t_0}^{t_1} \int_{L_\beta} \left[ (N_{\beta\alpha} - \bar{N}_{\beta\alpha}) \delta u + (N_\beta - \bar{N}_\beta) \delta v + (Q_\beta - \bar{Q}_\beta) \delta w \right. \\
& + (M_{\beta\alpha} - \bar{M}_{\beta\alpha}) \delta\theta_\alpha + (M_\beta - \bar{M}_\beta) \delta\theta_\beta \Big] A d\alpha dt = 0 \quad (9.55)
\end{aligned}$$

显然, 式 (9.55) 中面积分部分给出薄壳的五个动力平衡方程 (9.38), 线积分部分给出薄壳振动的边界条件。但是上面已经指出, 薄壳振动方程只能在每边满足四个边界条件, 而在式 (9.55) 线积分中有五个边界条件, 这就需要采用克希霍夫合剪力边界条件。这种边界条件在变分方程中是经过如下处理推得的。

利用 §9.4 式 (b), 将式 (9.55) 线积分部分中转角变分  $\delta\theta_\alpha$  或  $\delta\theta_\beta$  变成中面位移的变分, 并进行分部积分, 即

$$\begin{aligned} \int_{L_a} (M_{a\beta} - \bar{M}_{a\beta}) \delta \theta_\beta B d\beta &= \int_{L_a} (M_{a\beta} - \bar{M}_{a\beta}) \left[ \frac{\delta v}{R_\beta} - \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} (\delta w) \right] B d\beta \\ &= \int_{L_a} \left( \frac{M_{a\beta}}{R_\beta} - \frac{\bar{M}_{a\beta}}{R_\beta} \right) \delta v + \int_{L_a} \frac{\partial}{\partial \beta} (M_{a\beta} - \bar{M}_{a\beta}) \delta w d\beta \end{aligned} \quad (k)$$

$$\begin{aligned} \int_{L_\beta} (M_{\beta a} - \bar{M}_{\beta a}) \delta \theta_a A d\alpha &= \int_{L_\beta} (M_{\beta a} - \bar{M}_{\beta a}) \left[ \frac{\delta u}{R_a} - \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\delta w) \right] A d\alpha \\ &= \int_{L_\beta} \left( \frac{M_{\beta a}}{R_a} - \frac{\bar{M}_{\beta a}}{R_a} \right) \delta u + \int_{L_\beta} \frac{\partial}{\partial \alpha} (M_{\beta a} - \bar{M}_{\beta a}) \delta w d\alpha \end{aligned} \quad (l)$$

所以式(9.55)线积分部份现化为

$$\begin{aligned} & - \int_{t_0}^{t_1} \int_{L_a} \left\{ (N_a - \bar{N}_a) \delta u + \left[ \left( N_{a\beta} + \frac{M_{a\beta}}{R_\beta} \right) - \left( \bar{N}_{a\beta} + \frac{\bar{M}_{a\beta}}{R_\beta} \right) \right] \delta v \right. \\ & \quad \left. + \left[ \left( Q_a + \frac{1}{B} \frac{\partial M_{a\beta}}{\partial \beta} \right) - \left( \bar{Q}_a + \frac{1}{B} \frac{\partial \bar{M}_{a\beta}}{\partial \beta} \right) \right] \delta w + (M_a - \bar{M}_a) \delta \theta_a \right\} B d\beta dt \\ & - \int_{t_0}^{t_1} \int_{L_\beta} \left\{ (N_\beta - \bar{N}_\beta) \delta v + \left[ \left( N_{\beta a} + \frac{M_{\beta a}}{R_a} \right) - \left( \bar{N}_{\beta a} + \frac{\bar{M}_{\beta a}}{R_a} \right) \right] \delta u \right. \\ & \quad \left. - \left[ \left( Q_\beta + \frac{1}{A} \frac{\partial M_{\beta a}}{\partial \alpha} \right) - \left( \bar{Q}_\beta + \frac{1}{A} \frac{\partial \bar{M}_{\beta a}}{\partial \alpha} \right) \right] \delta w + (M_\beta - \bar{M}_\beta) \delta \theta_\beta \right\} A d\alpha dt = 0 \end{aligned} \quad (9.56)$$

这样就给出薄壳振动方程的每边四个边界条件式(9.41)一式(9.43)。

## § 9.10 各种薄壳振动理论的综合比较

上述薄壳振动理论是一种最为通用和经典的理论,属于薄壳理论中莱斯纳(Reissner<sup>[222]</sup>)理论一类,也是薄壳振动理论中基本一种。这一理论由于考虑了薄壳 $h/R \ll 1$ 的前提,因此在各方程中引入了与这一前提相应的 $\left(1 + \frac{\gamma}{R}\right) \approx 1$ ,  $\left(\frac{1}{R_a} - \frac{1}{R_\beta}\right) \approx 0$ 等一系列简化。在推导薄壳振动方程的各个环节中,引入或不引入这些简化,就形成了各种其它形式薄壳振动理论,它们之间差别均为 $\left(\frac{h}{R}\right)^2$ 量级。对于薄壳振动一般性理论,另外还包括有唐纳尔(Donnell<sup>[66]</sup>)、勒夫(Love<sup>[164]</sup>)、哥列琴文采尔(Гольденвейзер<sup>[290]</sup>)、弗留格(Flügge<sup>[79]</sup>)、桑德(Sander<sup>[232]</sup>)、符拉索夫(Власов<sup>[288]</sup>)理论等几类<sup>[154]</sup>。对于各种具体壳体,又有相应一系列有关理论(详见有关各章)。薄壳振动理论名目繁多,为了便于读者弄清不同理论之间关系以及和本书所述经典理论间联系,特在本节列出各类理论的主要区别与关系。

由上面各节推导可知,薄壳振动理论的主要方程及关系式包括:中面位移与中面应变关系式(9.27), (9.28), 中面应变与非中面应变关系式(9.26), 非中面应变与非中面应力关系式(9.30), 非中面应力沿厚度积分给出的内力与中面应变关系式(9.35)以及内力动平衡方程(9.40)。在这些方程与关系式中,对于不同薄壳振动理论,一般来说,式(9.27), (9.30), (9.40)是没有差别,都是统一的,而曲率表达式(9.28), 非中面

应变表达式 (9.26) 以及内力表达式 (9.35) 则因不同理论而有所不同。概括各种理论, 这些表达式分别有下列几种形式。

曲率表达式有

$$\kappa_\alpha = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \frac{u}{R_\alpha} - \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right] + \frac{1}{AB} \left[ \frac{v}{R_\beta} - \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right] \frac{\partial A}{\partial \beta} \quad (9.57a)$$

$$\kappa_\alpha = -\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) - \frac{1}{AB^2} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial w}{\partial \beta} \quad (9.57b)$$

$$\begin{aligned} \kappa_\alpha = & \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \frac{u}{R_\alpha} - \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right] + \frac{1}{AB} \left[ \frac{v}{R_\beta} - \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right] \frac{\partial A}{\partial \beta} \\ & - \frac{1}{R_\alpha} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{v}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{w}{R_\alpha} \right) \end{aligned} \quad (9.57c)$$

及

$$\kappa_\beta = \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[ \frac{v}{R_\beta} - \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right] + \frac{1}{AB} \left[ \frac{u}{R_\alpha} - \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right] \frac{\partial B}{\partial \alpha} \quad (9.58a)$$

$$\kappa_\beta = -\frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) - \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \quad (9.58b)$$

$$\begin{aligned} \kappa_\beta = & \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[ \frac{v}{R_\beta} - \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right] + \frac{1}{AB} \left[ \frac{u}{R_\alpha} - \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right] \frac{\partial B}{\partial \alpha} \\ & - \frac{1}{R_\beta} \left( \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{u}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{w}{R_\beta} \right) \end{aligned} \quad (9.58c)$$

及

$$\kappa_{\alpha\beta} = \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{u}{AR_\alpha} - \frac{1}{A^2} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{v}{BR_\beta} - \frac{1}{B^2} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) \quad (9.59a)$$

$$\kappa_{\alpha\beta} = -\frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{A^2} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) - \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{B^2} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) \quad (9.59b)$$

$$\begin{aligned} \kappa_{\alpha\beta} = & -\frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{A^2} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) - \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{B^2} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) \\ & - \left( \frac{1}{R_\alpha} - \frac{1}{R_\beta} \right) \left[ \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{u}{A} \right) - \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{v}{B} \right) \right] \end{aligned} \quad (9.59c)$$

$$\begin{aligned} \kappa_{\alpha\beta} = & \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{u}{AR_\alpha} - \frac{1}{A^2} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{v}{BR_\beta} - \frac{1}{B^2} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) \\ & + \frac{1}{2AB} \left( \frac{1}{R_\beta} - \frac{1}{R_\alpha} \right) \left( \frac{\partial Bv}{\partial \alpha} - \frac{\partial Au}{\partial \beta} \right) \end{aligned} \quad (9.59d)$$

$$\begin{aligned} \kappa_{\alpha\beta} = & \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{u}{AR_\alpha} - \frac{1}{A^2} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{v}{BR_\beta} - \frac{1}{B^2} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) \\ & + \frac{1}{R_\alpha} \left( \frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{v}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{R_\beta} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{u}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) \end{aligned} \quad (9.59e)$$

非中面应变表达式有

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\alpha^0 + \gamma x_\alpha \quad (9.60a)$$

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{1 + \gamma/R_\alpha} (\varepsilon_\alpha^0 + \gamma x_\alpha) \quad (9.60b)$$

及

$$\varepsilon_\beta = \varepsilon_\beta^0 + \gamma x_\beta \quad (9.61a)$$



$$\varepsilon_\beta = \frac{1}{1 + \gamma/R_\beta} (\varepsilon_\beta^0 + \gamma x_\beta) \quad (9.61 b)$$

及

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}^0 + \gamma x_{\alpha\beta} \quad (9.62 a)$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\gamma}{R_\alpha}\right)\left(1 + \frac{\gamma}{R_\beta}\right)} \left[ \left(1 - \frac{\gamma^2}{R_\alpha R_\beta}\right) \varepsilon_{\alpha\beta}^0 + \gamma \left(1 + \frac{\gamma}{2R_\alpha} + \frac{\gamma}{2R_\beta}\right) x_{\alpha\beta} \right] \quad (9.62 b)$$

内力表达式有

$$N_\alpha = K(\varepsilon_\alpha^0 + \nu \varepsilon_\beta^0) \quad (9.63 a)$$

$$N_\alpha = K \left[ (\varepsilon_\alpha^0 + \nu \varepsilon_\beta^0) - \frac{h^2}{12} \left( \frac{1}{R_\alpha} - \frac{1}{R_\beta} \right) \left( x_\alpha - \frac{\varepsilon_\alpha^0}{R_\alpha} \right) \right] \quad (9.63 b)$$

及

$$N_\beta = K(\varepsilon_\beta^0 + \nu \varepsilon_\alpha^0) \quad (9.64 a)$$

$$N_\beta = K \left[ (\varepsilon_\beta^0 + \nu \varepsilon_\alpha^0) - \frac{h^2}{12} \left( \frac{1}{R_\beta} - \frac{1}{R_\alpha} \right) \left( x_\beta - \frac{\varepsilon_\beta^0}{R_\beta} \right) \right] \quad (9.64 b)$$

及

$$N_{\alpha\beta} = K \frac{1-\nu}{2} \varepsilon_{\alpha\beta}^0 \quad (9.65 a)$$

$$N_{\alpha\beta} = K \frac{1-\nu}{2} \left( \varepsilon_{\alpha\beta}^0 + \frac{h^2}{12R_\alpha} x_{\alpha\beta} \right) \quad (9.65 b)$$

$$N_{\alpha\beta} = K \frac{1-\nu}{2} \left[ \varepsilon_{\alpha\beta}^0 - \frac{h^2}{24} \left( \frac{1}{R_\alpha} - \frac{1}{R_\beta} \right) x_{\alpha\beta} \right] \quad (9.65 c)$$

$$N_{\alpha\beta} = K \frac{1-\nu}{2} \left[ \varepsilon_{\alpha\beta}^0 - \frac{h^2}{12} \left( \frac{1}{R_\alpha} - \frac{1}{R_\beta} \right) \left( \frac{x_{\alpha\beta}}{2} - \frac{\varepsilon_{\alpha\beta}^0}{R_\alpha} \right) \right] \quad (9.65 d)$$

及

$$N_{\beta\alpha} = K \frac{1-\nu}{2} \varepsilon_{\alpha\beta}^0 \quad (9.66 a)$$

$$N_{\beta\alpha} = K \frac{1-\nu}{2} \left( \varepsilon_{\alpha\beta}^0 + \frac{h^2}{12R_\alpha} x_{\alpha\beta} \right) \quad (9.66 b)$$

$$N_{\beta\alpha} = K \frac{1-\nu}{2} \left[ \varepsilon_{\alpha\beta}^0 - \frac{h^2}{24} \left( \frac{1}{R_\beta} - \frac{1}{R_\alpha} \right) x_{\alpha\beta} \right] \quad (9.66 c)$$

$$N_{\beta\alpha} = K \frac{1-\nu}{2} \left[ \varepsilon_{\alpha\beta}^0 - \frac{h^2}{12} \left( \frac{1}{R_\beta} - \frac{1}{R_\alpha} \right) \left( \frac{x_{\alpha\beta}}{2} - \frac{\varepsilon_{\alpha\beta}^0}{R_\beta} \right) \right] \quad (9.66 d)$$

及

$$M_\alpha = D(x_\alpha + \nu x_\beta) \quad (9.67 a)$$

$$M_\alpha = D \left[ (x_\alpha + \nu x_\beta) - \left( \frac{1}{R_\alpha} - \frac{1}{R_\beta} \right) \varepsilon_\alpha^0 \right] \quad (9.67 b)$$

及

$$M_\beta = D(x_\beta + \nu x_\alpha) \quad (9.68 a)$$

$$M_\beta = D \left[ (x_\beta + \nu x_\alpha) - \left( \frac{1}{R_\beta} - \frac{1}{R_\alpha} \right) \varepsilon_\beta^0 \right] \quad (9.68 b)$$

及

$$M_{a\beta} = D \frac{1-\nu}{2} x_{a\beta} \quad (9.69a)$$

$$M_{a\beta} = D \frac{1-\nu}{2} \left( x_{a\beta} + \frac{\varepsilon_{a\beta}^0}{R_\beta} \right) \quad (9.69b)$$

$$M_{a\beta} = D \frac{1-\nu}{2} \left( x_{a\beta} - \frac{\varepsilon_{a\beta}^0}{R_a} \right) \quad (9.69c)$$

及

$$M_{\beta a} = D \frac{1-\nu}{2} x_{a\beta} \quad (9.70a)$$

$$M_{\beta a} = D \frac{1-\nu}{2} \left( x_{a\beta} + \frac{\varepsilon_{a\beta}^0}{R_a} \right) \quad (9.70b)$$

$$M_{\beta a} = D \frac{1-\nu}{2} \left( x_{a\beta} - \frac{\varepsilon_{a\beta}^0}{R_\beta} \right) \quad (9.70c)$$

不同薄壳振动理论的差别就在于在式 (9.57) — 式 (9.70) 中取不同表达式。这些不同表达式间差别的量级一般为  $\left(\frac{h}{R}\right)^2$ 。对于薄壳来说, 这种差别是不大的, 也是允许的, 因此不同薄壳振动理论只是精度不同而已。表9.1列出了不同理论所具有的不同表达式式号, 结合上述具体各式, 能清楚看出各理论间差别与联系, 也就很容易结合本章所述内容, 列出其它各种薄壳振动理论的基本方程和关系式。

不同薄壳振动理论表达式的对比

表9.1

理 论 名 称	曲 率 表 达 式			非 中 面 应 变 表 达 式				
Reissner	(9.57a)	(9.58a)	(9.59a)	(9.60a)	(9.61a)	(9.62a)		
Donnell	(9.57b)	(9.58b)	(9.59b)	(9.60a)	(9.61a)	(9.62a)		
Love	(9.57a)	(9.58a)	(9.59c)	(9.60a)	(9.61a)	(9.62a)		
Гольденвейзер	(9.57a)	(9.58a)	(9.59c)	(9.60b)	(9.61b)	(9.62b)		
FlüggI	(9.57a)	(9.58a)	(9.59c)	(9.60b)	(9.61b)	(9.62b)		
Sander	(9.57a)	(9.58a)	(9.59d)	(9.60a)	(9.61a)	(9.62a)		
Власов	(9.57c)	(9.58c)	(9.59c)	(9.60a)	(9.61a)	(9.62a)		
理 论 名 称	内 力 表 达 式							
Reissner	(9.63a)	(9.64a)	(9.65a)	(9.65a)	(9.67a)	(9.68a)	(9.69a)	(9.70a)
Donnell	(9.63a)	(9.64a)	(9.65a)	(9.65a)	(9.67a)	(9.68a)	(9.69a)	(9.70a)
Love	(9.63a)	(9.64a)	(9.65a)	(9.66a)	(9.67a)	(9.68a)	(9.69a)	(9.70a)
Гольденвейзер	(9.63a)	(9.64a)	(9.65b)	(9.66b)	(9.67a)	(9.68a)	(9.69a)	(9.70a)
FlüggI	(9.63b)	(9.64b)	(9.65d)	(9.66d)	(9.67b)	(9.68b)	(9.69c)	(9.70c)
Sander	(9.63a)	(9.64a)	(9.65a)	(9.66a)	(9.67a)	(9.68a)	(9.69a)	(9.70a)
Власов	(9.63b)	(9.64b)	(9.65c)	(9.66c)	(9.67b)	(9.68b)	(9.69b)	(9.70b)

## § 9.11 薄壳振动的简化理论

在上述诸薄壳振动理论中, 和本章所述的经典(莱斯纳)理论相比, 其它均为较其精确理论, 唯有唐纳尔理论是一种较其简化的理论。由于薄壳振动分析在数学上难度较大, 因此实用分析中往往采用许多近似的简化理论<sup>[240]</sup>, 唐纳尔简化理论是在振动分析中最为广泛采用的一种, 并且要在以后几章中多加应用。此外还有无矩壳理论、无薄膜力壳理论、无中面位移壳理论等。这些理论各自采用一系列简化假定, 这些假定前提在某些特定条件下是有一定精度的。由于无矩壳振动理论在第十三章将要专门讨论, 这里就不再陈述。本节将对其它几种简化理论从一般壳体关系出发进行扼要介绍。

### 一、唐纳尔简化理论

唐纳尔简化理论将在基本关系式中进行两方面简化:

**第一假定** 从表9.1可以看出, 唐纳尔理论中曲率表达式由式(9.57a), (9.58a), (9.59a)简化为式(9.57b), (9.58b), (9.59b), 其实质是直法线转角 $\theta_\alpha, \theta_\beta$ 表达式由§9.4的式(b), (c)简化为

$$\theta_\alpha = -\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha}, \quad \theta_\beta = -\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \quad (9.71)$$

即中面曲率表达式中忽略平面位移 $u, v$ , 有

$$\kappa_\alpha = -\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) - \frac{1}{AB^2} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial w}{\partial \beta} \quad (9.72a)$$

$$\kappa_\beta = -\frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) - \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \quad (9.72b)$$

$$\kappa_{\alpha\beta} = -\frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{A^2} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) - \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{B^2} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) \quad (9.72c)$$

但平面应变分量表达式仍为式(9.27), 即还含有平面位移分量 $u, v$ 。

**第二假定** 对于动力平衡方程, 考虑到只承受法向载荷情况, 在式(9.38a)与(9.38b)中忽略平面内惯性力项 $\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ 与 $\rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$ 以及剪力项 $\frac{Q_\alpha}{R_\alpha}$ 与 $\frac{Q_\beta}{R_\beta}$ , 因此有

$$\frac{\partial(BN_\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial(AN_{\beta\alpha})}{\partial \beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} N_\beta + \frac{\partial A}{\partial \beta} N_{\alpha\beta} = 0 \quad (9.73a)$$

$$\frac{\partial(AN_\beta)}{\partial \beta} + \frac{\partial(BN_{\alpha\beta})}{\partial \alpha} - \frac{\partial A}{\partial \beta} N_\alpha + \frac{\partial B}{\partial \alpha} N_{\beta\alpha} = 0 \quad (9.73b)$$

对于第三个动力平衡方程(9.40c)中 $M_\alpha, M_\beta, M_{\alpha\beta}, M_{\beta\alpha}$ 代以式(9.67a), (9.68a), (9.69a), (9.70a), 并代入简化关系式(9.72), 可得

$$D \nabla^2 \nabla^2 w + \frac{N_\alpha}{R_\alpha} + \frac{N_\beta}{R_\beta} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q \quad (9.73c)$$

式中正交曲线坐标系的拉普拉斯算子

$$\nabla^2 = \frac{1}{AB} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \right] \quad (9.74a)$$

当然, 在平面直角坐标系特殊情况下,  $A=B=1, \alpha=x, \beta=y$ , 即有 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ , 同

样也能推出在第二章讨论过的平面极坐标、椭圆坐标系的拉普拉斯算子。

对于头二个方程 (9.73a), (9.73b) 中三个未知薄膜力  $N_a, N_\beta, N_{a\beta}$  可用艾雷 (Airy) 应力函数  $f$  按下列方式加以联系

$$N_a = \frac{1}{B} \left[ -\frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{B} \frac{\partial f}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{A^2} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial f}{\partial \alpha} \right] \quad (9.75a)$$

$$N_\beta = \frac{1}{A} \left[ -\frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial f}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{B^2} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial f}{\partial \beta} \right] \quad (9.75b)$$

$$N_{a\beta} = \frac{1}{AB} \left[ \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial f}{\partial \beta} - \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta} \right] \quad (9.75c)$$

从而使两个方程 (9.73a), (9.73b) 自动满足。再将式 (9.75) 代入第三个方程 (9.73c), 可得未知变量  $w, f$  所应满足的第一个基本方程

$$D \nabla^2 \nabla^2 w + \nabla_i^2 f + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q, \quad (9.76a)$$

式中正交曲线坐标系的变型拉普拉斯算子

$$\nabla_i^2 = \frac{1}{AB} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( -\frac{B}{AR_\beta} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left( -\frac{A}{BR_\alpha} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \right] \quad (9.74b)$$

另一方程来自应变分量所满足的协调方程<sup>[200]</sup>

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \frac{B}{A} \frac{\partial \varepsilon_\beta^0}{\partial \alpha} + \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} (\varepsilon_\beta^0 - \varepsilon_\alpha^0) - \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon_{a\beta}^0}{\partial \beta} - \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} \varepsilon_{a\beta}^0 \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial \beta} \left[ \frac{A}{B} \frac{\partial \varepsilon_\alpha^0}{\partial \beta} + \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} (\varepsilon_\alpha^0 - \varepsilon_\beta^0) - \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon_{a\beta}^0}{\partial \alpha} - \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \varepsilon_{a\beta}^0 \right] \\ & + AB \frac{x_\alpha}{R_\alpha} + AB \frac{x_\beta}{R_\beta} = 0 \end{aligned} \quad (9.77)$$

代入  $\varepsilon_\alpha^0, \varepsilon_\beta^0, \varepsilon_{a\beta}^0$  表达式 (9.63a), (9.64a), (9.65a) 及式 (9.75),  $x_\alpha, x_\beta$  表达式 (9.72a), (9.72b) 就得  $w, f$  所应满足的第二个基本方程

$$Eh \nabla_i^2 w - \nabla^2 \nabla^2 f = 0 \quad (9.76b)$$

唐纳尔简化理论基本方程 (9.76) 是一个二元八阶联立偏微分方程组, 它的求解需要在每边给定四个边界条件, 这可根据式 (9.44) 及关系式 (9.35), (9.39), (9.71), (9.72), (9.75) 确定。

## 二、无薄膜力壳简化理论

这一理论的前提是所有薄膜力为零, 即  $N_a = N_\beta = N_{a\beta} = 0$ , 相当式 (9.35) 中薄膜刚度  $K = 0$ , 则三个动力平衡方程中有两个即式 (9.73a), (9.73b) 已经满足, 第三个方程 (9.40c) 变为

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \frac{1}{A} \left[ \frac{\partial (BM_\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial (AM_{a\beta})}{\partial \beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_\beta + \frac{\partial A}{\partial \beta} M_{a\beta} \right] \right\} \\ & + \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ \frac{1}{B} \left[ \frac{\partial (AM_\beta)}{\partial \beta} + \frac{\partial (BM_{a\beta})}{\partial \alpha} - \frac{\partial A}{\partial \beta} M_\alpha + \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_{a\beta} \right] \right\} \\ & + AB q_r = AB \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (9.78a)$$

这一方程包括  $M_\alpha, M_\beta, M_{a\beta}$  等三个未知量, 通过式 (9.35d), (9.35e), (9.35f) 及式 (9.28), 可表达为未知位移  $u, v, w$  所满足的一个方程。另外二个方程将根据式 (9.35a),

(9.35 b) . (9.35 c) 及式 (9.27) 给出

$$\varepsilon_a^0 = \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{v}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{w}{R_a} = 0 \quad (9.78 b)$$

$$\varepsilon_\beta^0 = \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{u}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{w}{R_\beta} = 0 \quad (9.78 c)$$

$$\varepsilon_{a\beta}^0 = \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{u}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{v}{B} \right) = 0 \quad (9.78 d)$$

其中只有二个是独立的。因此式 (9.78 a) — 式 (9.78 d) 中的三个方程给出求解  $u, v, w$  的三个基本方程。

### 三、元中面位移壳简化理论

这一理论的前提是所有中面位移分量为零，即  $u = v = 0$ ，则中面应变表达式 (9.27)，(9.28) 中所有  $u, v$  项消失，将其代入内力表达式 (9.35)，再一起代入平衡方程 (9.40 c)，则有  $w$  满足的基本方程

$$D \nabla^2 \nabla^2 w + K \left( \frac{1}{R_a^2} + \frac{1}{R_\beta^2} + \frac{2\nu}{R_a R_\beta} \right) w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q, \quad (9.79)$$

这一方程和第八章温克尔弹性地基上板的方程具有类似形式，它的求解将简化得多。

在后面几章分析中，主要应用莱斯纳壳体振动理论和唐纳尔壳体振动理论。如不特殊说明，则“经典理论”即是指本章中所叙述的莱斯纳理论；“简化理论”即是指本节中所叙述的唐纳尔简化理论；而只含其中第一个假定（即 § 9.10 所述）者称为“唐纳尔理论”。

## 第十章 柱壳的振动

在建立薄壳振动基本方程基础上, 下面将分章研究各种类型具体薄壳的固有振动问题。和平板一样, 固有振动的求解是壳体振动分析的基础与关键。这一章将首先讨论柱壳的振动, 而以常用的圆柱壳为主<sup>[82][193][263]</sup>。

### § 10.1 圆柱壳振动的基本方程

在第九章我们已经详细讨论了一般正交曲线坐标系中薄壳的基本方程与基本关系式, 并且指出过, 对于具体壳体只要代入相应 $\alpha, \beta, A, B, R_\alpha, R_\beta$ 值即可写出有关壳体的基本方程和各种关系式。

在§ 9.2 曲面理论中也已研究过, 对于半径为 $R$ , 长为 $L$ 的圆柱壳(图10.1), 取如图圆柱坐标系:

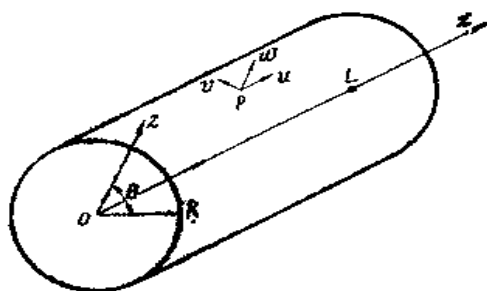


图 10.1

$$\alpha = x, \quad \beta = \theta, \quad \gamma = z \quad (10.1a)$$

则有拉梅参数

$$A = 1, \quad B = R \quad (10.1b)$$

主曲率半径

$$R_\alpha = \infty, \quad R_\beta = R \quad (10.1c)$$

若壳体中曲面上一点 $P$ 的轴向、切向、法向位移分别为 $u, v, w$ , 则按第九章经典理论的中面应变与中面位移关系式(9.27), (9.28), 代入圆柱壳基本参数(10.1)有

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_\theta^0 = \frac{\partial v}{R \partial \theta} + \frac{w}{R}, \quad \varepsilon_{x\theta}^0 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad (10.2a)$$

$$\kappa_x = -\frac{\partial \theta_x}{\partial x}, \quad \kappa_\theta = -\frac{\partial \theta_\theta}{R \partial \theta}, \quad \kappa_{x\theta} = -\frac{\partial \theta_\theta}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial \theta_x}{\partial \theta} \quad (10.2b)$$

$$\theta_x = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \theta_\theta = \frac{v}{R} - \frac{\partial w}{R \partial \theta} \quad (10.2c)$$

内力与中面应变的一般性关系式(9.35)代入圆柱壳基本参数(10.1)有

$$N_x = K(\varepsilon_x^0 + \nu \varepsilon_\theta^0) \quad (10.3a)$$

$$N_\theta = K(\varepsilon_\theta^0 + \nu \varepsilon_x^0) \quad (10.3b)$$

$$N_{x\theta} = K \frac{(1-\nu)}{2} \varepsilon_{x\theta}^0 \quad (10.3c)$$

$$M_x = D(\kappa_x + \nu \kappa_\theta) \quad (10.3d)$$

$$M_\theta = D(\kappa_\theta + \nu \kappa_x) \quad (10.3e)$$

$$M_{x\theta} = D \frac{(1-\nu)}{2} \kappa_{x\theta} \quad (10.3f)$$

一般性内力平衡方程 (9.40) 代入圆柱壳基本参数 (10.1) 有

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{x\theta}}{R \partial \theta} + q_z = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (10.4a)$$

$$\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{\partial N_\theta}{R \partial \theta} + \frac{Q_\theta}{R} + q_\theta = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (10.4b)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_\theta}{R \partial \theta} - \frac{N_\theta}{R} + q_z = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (10.4c)$$

其中剪力表达式 (9.39) 现为

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{x\theta}}{R \partial \theta} \quad (10.4d)$$

$$Q_\theta = \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + \frac{\partial M_\theta}{R \partial \theta} \quad (10.4e)$$

上面给出了圆柱壳的三组基本关系式。至于其它算式均可根据第九章一般性公式代入式 (10.1) 列出。

将式 (10.2) 代入式 (10.3)，再代入式 (10.4)，即可建立以中面位移分量表示的圆柱壳振动的基本微分方程组：

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 u}{R^2 \partial \theta^2} + \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 v}{R \partial x \partial \theta} + \nu \frac{\partial w}{R \partial x} \\ & = \frac{1}{K} \left[ \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - q_z \right] \end{aligned} \quad (10.5a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 u}{R \partial x \partial \theta} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{R^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial w}{R^2 \partial \theta} + k \left[ -\frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 v}{R^2 \partial \theta^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial \theta} - \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \theta^3} \right] = \frac{1}{K} \left[ \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - q_\theta \right] \end{aligned} \quad (10.5b)$$

$$\begin{aligned} & \frac{12}{h^3} \left\{ \nu \frac{\partial u}{R \partial x} + \frac{\partial v}{R^2 \partial \theta} + \frac{w}{R^2} - k \left[ \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{\partial^3 v}{R^2 \partial \theta^3} \right] \right\} + \nabla^2 \nabla^2 w \\ & = \frac{1}{D} \left[ q_z - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] \end{aligned} \quad (10.5c)$$

式中

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{R^2 \partial \theta^2} \quad (10.6a)$$

$$k = \frac{h^2}{12R^2} \quad (10.6b)$$

可以看出，当  $R \rightarrow \infty$ ， $k \rightarrow 0$  时，式 (10.5c) 即变为薄板基本微分方程 (2.10)。从这个角度来看，薄板只是薄壳的一种特殊情况。

方程 (10.5) 的边界条件根据一般表达式 (9.41)，(9.42)，(9.43)，代入圆柱壳基本参数 (10.1)，(10.2c)；对于齐次边界有

$$x = x_0: \quad u = 0 \text{ 或 } N_x = 0 \quad (10.7a)$$

$$v = 0 \text{ 或 } N_{x\theta} + \frac{M_{x\theta}}{R} = 0 \quad (10.7b)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \text{ 或 } M_x = 0 \quad (10.7c)$$

$$w = 0 \text{ 或 } Q_x + \frac{\partial M_{x\theta}}{R \partial \theta} = 0 \quad (10.7d)$$

$$\theta = \theta_0: \quad v = 0 \text{ 或 } N_\theta = 0 \quad (10.7e)$$

$$u = 0 \text{ 或 } N_{\theta\theta} = 0 \quad (10.7f)$$

$$\frac{v}{R} - \frac{\partial w}{R \partial \theta} = 0 \text{ 或 } M_\theta = 0 \quad (10.7g)$$

$$w = 0 \text{ 或 } Q_\theta + \frac{\partial M_{\theta\theta}}{\partial x} = 0 \quad (10.7h)$$

实际可能存在的边界条件可参见式 (11.6)

下面讨论圆柱壳的动能、变形能及变分方程。

在 § 9.9 我们已经给出了正交曲线坐标系的薄壳动能、变形能及变分方程的一般性表达式。根据动能表达式 (9.48) 代入圆柱壳基本关系式 (10.1) 有

$$T = \int_S \frac{\rho h}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] R dx d\theta \quad (10.8a)$$

根据变形能表达式 (9.50) 代入圆柱壳的中面应变表达式 (10.2) 有

$$\begin{aligned} U &= \int_S \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \left\{ \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{R} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) \right]^2 - \frac{2(1-\nu)}{R} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1-\nu)}{2} \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right]^2 \right\} + k R^2 \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2(1-\nu)}{R^2} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \right] + \frac{2(1-\nu)}{R^2} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial v}{2 \partial x} \right]^2 \right\} R dx d\theta \\ &= \int_S \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \left\{ \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{R \partial \theta} + \frac{w}{R} \right]^2 - 2(1-\nu) \left[ \frac{w}{R} \frac{\partial u}{\partial x} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{4} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{R \partial \theta} \right)^2 \right] \right\} + k \left\{ R^2 (\nabla^2 w)^2 - 2(1-\nu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right)^2 \right] - 2 \frac{\partial v}{\partial \theta} \nabla^2 w + \left( \frac{\partial v}{R \partial \theta} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[ - \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} - \frac{1}{4} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} R dx d\theta \quad (10.8b) \end{aligned}$$

从上式可以看出，薄壳变形能可分为两大部份：含  $k$  项，与弯曲应变有关的弯曲变形能，不含  $k$  项，与薄膜应变有关的薄膜变形能。

按式 (9.51) 有齐次边界的圆柱壳变分方程

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_S [q_\theta \delta u + q_\theta \delta v + q_\theta \delta w] R dx d\theta dt = 0 \quad (10.9)$$

下面将从变分方程 (10.9) 出发推导闭合圆柱壳的基本微分方程及边界条件。

首先计算动能项，和式 (9.54a) 类似有

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta T dt = -\rho h \int_{t_0}^{t_1} \int_S [\bar{u} \delta u + \bar{v} \delta v + \bar{w} \delta w] R dx d\theta dt \quad (a)$$

其次计算变形能项

$$\begin{aligned} \delta U &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \int_S \left\{ \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{R} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) \right] \left[ \delta \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{R} \delta \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R} \delta w \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{(1-\nu)}{R} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \delta \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \delta w + \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) \delta \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{(1-\nu)}{2} \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] \left[ \frac{1}{R} \delta \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \delta \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \\
& + \frac{h^2}{12} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \right] \left[ \delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{R^2} \delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right. \\
& \left. - \frac{1}{R^2} \delta \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \right] - \frac{(1-\nu)h^2}{12R^2} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \right. \\
& \left. + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] + \frac{2(1-\nu)h^2}{12R^2} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right. \\
& \left. - \frac{\partial v}{2 \partial x} \right] \left[ \delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right) - \frac{1}{2} \delta \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \} R dx d\theta \quad (b)
\end{aligned}$$

用分部积分得

$$\begin{aligned}
\delta U = & \frac{Eh}{1-\nu^2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left\{ - \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{(1-\nu)}{2R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{(1+\nu)}{2R} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} + \frac{\nu}{R} \frac{\partial w}{\partial x} \right] \delta u \right. \\
& - \left[ \frac{(1+\nu)}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{h^2}{12R^2} \left( \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2 \partial \theta} \right) \right. \\
& \left. + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] + \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{h^2}{12R^2} \left( \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial \theta} \right) \} \delta v \\
& + \left[ \frac{\nu}{R} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{h^2}{12R^2} \left( \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2 \partial \theta} \right) + \frac{w}{R^2} \right. \\
& \left. + \frac{h^2}{12} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^4 w}{R^4 \partial \theta^4} \right) \right] \delta w \} R dx d\theta \\
& + \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[ \left\{ \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{R} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) \right] \delta u \right\} \right]_0^1 + \frac{(1-\nu)}{2} \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right. \\
& \left. + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{h^2}{6R^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial v}{2 \partial x} \right) \right] \delta v \Big|_0^1 + \frac{h^2}{12} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\nu}{R^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \right] \delta \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \Big|_0^1 - \frac{h^2}{12} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \left( (2-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta^2} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} \right) \right] \delta w \Big|_0^1 \} R d\theta \quad (c)
\end{aligned}$$

将式 (a), (c) 代入式 (10.9) 则可得如下形式的变分方程:

$$\begin{aligned}
& \frac{Eh}{1-\nu^2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left\{ \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{(1-\nu)}{2R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{(1-\nu^2)}{Eh} \left( q_z - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) + \frac{(1+\nu)}{2R} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} \right. \right. \\
& \left. + \frac{\nu}{R} \frac{\partial w}{\partial x} \right] \delta u + \left[ \frac{(1+\nu)}{2R} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{R^2 \partial \theta^2} + \frac{(1-\nu^2)}{Eh} \left( q_\theta \right. \right. \\
& \left. \left. - \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) + k \left( \frac{\partial^2 v}{R^2 \partial \theta^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial w}{R^2 \partial \theta} - k \left( \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \theta^2} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial \theta} \right) \right] \delta v - \left[ \frac{\nu}{R} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{R^2 \partial \theta} - k \left( \frac{\partial^2 v}{R^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2 \partial \theta} \right) + \frac{w}{R^2} \right. \\
& \left. + \frac{(1-\nu^2)}{Eh} \left( \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q_z \right) + \frac{h^2}{12} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{R^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} \right) \right] \delta w \} R dx d\theta dt + \frac{Eh}{1-\nu^2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left\{ - \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{R} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + w \right) \right] \delta u \Big|_0^1 - \frac{(1-\nu)}{2} \left[ \frac{\partial u}{R \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{h^2}{6R^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial v}{2 \partial x} \right) \right] \delta v \Big|_0^1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{h^2}{12}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\nu}{R^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v}{\partial \theta}\right)\right] \delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\bigg|_0 + \frac{h^2}{12}\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right. \\
& \left. + \frac{1}{R^2}\left((2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial \theta^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta}\right)\right] \delta w \bigg|_0 \cdot R d\theta dt = 0
\end{aligned} \quad (10.10)$$

从方程 (10.10) 很容易推出圆柱壳基本微分方程组 (10.5) 及边界条件 (10.7)。因此再一次证明变分方程和微分方程是等价的。方程 (10.10) 是下面将要介绍的圆柱壳振动变分解法的基础。

## § 10.2 无限长圆柱壳

首先讨论长度无限的闭合圆柱壳固有振动<sup>[15][216]</sup> 第一类解。可设位移  $u, v, w$  相应的振型为

$$U = A \cos \frac{\lambda}{R} x \cos n\theta \quad (10.11 a)$$

$$V = B \sin \frac{\lambda}{R} x \sin n\theta \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (10.11 b)$$

$$W = C \sin \frac{\lambda}{R} x \cos n\theta \quad (10.11 c)$$

代入与基本方程 (10.5) 相应的振型方程

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 U}{R^2 \partial \theta^2} + \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 V}{R \partial x \partial \theta} + \nu \frac{\partial W}{R \partial x} + \frac{\rho h}{k} \omega^2 U = 0
\end{aligned} \quad (10.12 a)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 U}{R \partial x \partial \theta} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{R^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial W}{R^2 \partial \theta} + k \left[ \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right. \\
& \left. + \frac{\partial^2 V}{R^2 \partial \theta^2} - \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial \theta} - \frac{\partial^3 W}{R^2 \partial \theta^3} \right] + \frac{\rho h}{K} \omega^2 V = 0
\end{aligned} \quad (10.12 b)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{12}{h^2} \left\{ \nu \frac{\partial U}{R \partial x} + \frac{\partial V}{R^2 \partial \theta} + \frac{W}{R^2} - k \left[ \frac{\partial^3 V}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{\partial^3 V}{R^2 \partial \theta^3} \right] \right\} + \nabla^2 \nabla^2 W \\
& - \frac{\rho h}{D} \omega^2 W = 0
\end{aligned} \quad (10.12 c)$$

可得振型系数  $A, B, C$  应满足的齐次线代方程组

$$\left[ -\lambda^2 - \frac{(1-\nu)}{2} n^2 + \Omega^2 \right] A + \left[ \frac{(1+\nu)}{2} \lambda n \right] B + (\nu \lambda) C = 0 \quad (10.13 a)$$

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{(1+\nu)}{2} \lambda n \right] A + \left[ \left( -\frac{1-\nu}{2} \lambda^2 - n^2 \right) (1+k) + \Omega^2 \right] B + [-n \\
& - k(\lambda^2 n + n^3)] C = 0
\end{aligned} \quad (10.13 b)$$

$$(-\nu \lambda) A + [n + k(\lambda^2 n + n^3)] B + [1 + k(\lambda^2 + n^2)^2 - \Omega^2] C = 0 \quad (10.13 c)$$

为求得  $A, B, C$  的非零解, 则其系数行列为零, 从而推得频率方程

$$\begin{vmatrix}
\left[ \Omega^2 - \lambda^2 - \frac{1-\nu}{2} n^2 \right] & \left( \frac{1+\nu}{2} \lambda n \right) & (\nu \lambda) \\
\left( \frac{1+\nu}{2} \lambda n \right) & \left[ \Omega^2 - \left( \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 + n^2 \right) (1+k) \right] & (-n - k\lambda^2 n - kn^3) \\
(\nu \lambda) & (-n - k\lambda^2 n - kn^3) & [\Omega^2 - 1 - k(\lambda^2 + n^2)^2]
\end{vmatrix} = 0$$

$$(10.14)$$

其中无量纲频率系数

$$\Omega^2 = \frac{\rho h}{K} R^2 \omega^2 \quad (10.15 a)$$

则圆频率

$$\omega = \frac{\Omega}{R} \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}} \quad (10.15 b)$$

可以看出各阶圆频率是和周向波数  $n$  和轴向波数  $\lambda$  有关。 $\lambda$  的物理意义是振型在轴向一个圆周长度内的波数。对应一组  $(n, \lambda)$  又有三个频率, 相应于三个位移振型间不同比值。

振型表达式 (10.11) 同时已满足了两端垂向自由简支, 长为  $L = \frac{\pi R}{\lambda}$  的有限长圆柱壳边界条件, 按式 (9.45 e) 为

$$x=0, l; N_x = v = M_x = w = 0 \quad (10.16)$$

因此式 (10.14) 也是该类圆柱壳的频率方程。

无限长圆柱壳的另一类固有振动相应于平面应变壳体问题, 即所有变形在原横截面内, 所有力学量只是  $\theta$  的函数, 也即

$$u=0, v=v(\theta), w=w(\theta) \quad (10.17)$$

这样, 基本方程 (10.5) 变为

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\partial w}{\partial \theta} + k \left( \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = \frac{R^2}{K} \left( \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - q_\theta \right) \quad (10.18 a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} + w - k \left( \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = \frac{R^2}{K} \left( q_r - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \quad (10.18 b)$$

设振型

$$V = B \sin n\theta \quad (10.19 a)$$

$$W = C \cos n\theta \quad (10.19 b)$$

代入方程 (10.18) 相应振型方程, 由系数行列式为零得频率方程

$$\begin{vmatrix} n^2(1+k) - \Omega^2 & n(1+kn^2) \\ n(1+kn^2) & 1+kn^4 - \Omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (10.20)$$

可以解出频率系数

$$\Omega^2 = 0 \quad (n=0) \quad (10.21 a)$$

$$\Omega^2 = 1 \quad (n=0) \quad (10.21 b)$$

$$\Omega^2 = \frac{1}{2} \left[ 1 + n^2(1+k) + kn^4 \pm \sqrt{[1 + n^2(1+k) + kn^4]^2 + 4n^2(1+kn^2)^2 - 4n^2(1+k)(1+kn^4)} \right] \quad (n \neq 0) \quad (10.21 c)$$

无限长圆柱壳的第三类固有振动相应于一维壳体问题, 即所有力学量沿  $x$  是一常值, 也即

$$u = u(\theta), v = v(\theta), w = w(\theta) \quad (10.22)$$

这样, 基本方程 (10.5) 变为

$$\frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{R^2}{K} \left[ \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - q_r \right] \quad (10.23 a)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\partial w}{\partial \theta} + k \left( \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = \frac{R^2}{K} \left( \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - q_\theta \right) \quad (10.23 b)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} + w - k \left( \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = \frac{R^2}{K} \left( q_z - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \quad (10.23 c)$$

设振型

$$U = A \cos n\theta \quad (10.24 a)$$

$$V = B \sin n\theta \quad (10.24 b)$$

$$W = C \cos n\theta \quad (10.24 c)$$

代入方程 (10.23) 相应的振型方程, 由系数行列式为零得频率方程

$$\begin{vmatrix} \frac{(1-\nu)}{2} n^2 - \Omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & n^2(1+k) - \Omega^2 & n(1+kn^2) \\ 0 & n(1+kn^2) & 1+kn^4 - \Omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (10.25)$$

显然, 这一方程可以解耦为两组方程: 一组相应于只有轴向位移, 其频率系数

$$\Omega^2 = \frac{1-\nu}{2} n^2 \quad (10.21 d)$$

另一组相应于只有横截面内位移的上述平面应变问题, 其频率系数为式 (10.21 a) 一式 (10.21 c)。频率系数解 (10.21) 的部份数值结果可参见表 10.1, 表 10.2。

综上所述, 无限长圆柱壳的振型可分为五类: (1) 轴向振型: 振型为式 (10.24 a), 频率系数为式 (10.21 d), 不同  $n$  相应于沿周向  $U$  分布的不同波数,  $n=0$  相当于刚体平移; (2) 扭转振型: 振型为  $V=B$ , 频率系数为式 (10.21 a),  $V$  沿周向均布, 相当于刚体扭转; (3) 扩展振型: 振型为  $W=C$ , 频率系数为式 (10.21 b),  $W$  沿周向均布; (4) 环向振型: 振型为式 (10.19), 频率系数为式 (10.21 c), 不同  $n$  相应于沿周向  $V$ 、 $W$  分布不同波数; (5) 弯曲振型: 振型为式 (10.11), 频率方程为式 (10.14), 不同  $\lambda$ 、 $n$  相应于  $U$ 、 $V$ 、 $W$  沿轴向、沿周向不同波数。

### § 10.3 两端简支的有限长圆柱壳

对于有限长度闭口圆柱壳 [219][283][291], 首先研究两端端部垂向自由的简支边界。这种简支边界的边界条件一般形式如式 (9.45 e) 所示, 犹如柱壳端部铰支在一刚性薄膜上 (故又称端部薄膜简支边界), 使壳体端部边界各点的法向与切向移动是约束的, 转动与轴向移动是自由的。这种简支边界是最为常见的一种。下面凡没有特殊说明, “简支边界” 就是指这种垂向自由简支边界。

两端简支的圆柱壳 (图 10.1) 的振型方程是式 (10.12)。按式 (9.45 e) 其振型边界条件为

$$V(0, \theta) = W(0, \theta) = N_z^*(0, \theta) = M_z^*(0, \theta) = 0 \quad (10.26 a)$$

$$V(L, \theta) = W(L, \theta) = N_z^*(L, \theta) = M_z^*(L, \theta) = 0 \quad (10.26 b)$$

下面凡带 \* 者均为相应力学量的振型。

非轴对称振动

设满足全部边界条件 (10.26) 的位移振型解

$$U(x, \theta) = A \cos \frac{m\pi}{L} x \cos n\theta \quad (10.27 a)$$

$$V(x, \theta) = B \sin \frac{m\pi}{L} x \sin n\theta \quad (m, n = 1, 2, 3, \dots) \quad (10.27 b)$$

$$W(x, \theta) = C \sin \frac{m\pi}{L} x \cos n\theta \quad (10.27 c)$$

代入基本方程 (10.12) 有齐次线代方程组

$$(\Omega^2 - S_{11})A + S_{12}B + S_{13}C = 0 \quad (10.28 a)$$

$$S_{21}A + (\Omega^2 - S_{22})B + S_{23}C = 0 \quad (10.28 b)$$

$$S_{31}A + S_{32}B + (\Omega^2 - S_{33})C = 0 \quad (10.28 c)$$

式中

$$S_{11} = \left( m\pi \frac{R}{L} \right)^2 + \frac{(1-\nu)}{2} n^2 \quad (10.29 a)$$

$$S_{12} = S_{21} = \frac{(1+\nu)}{2} \left( m\pi \frac{R}{L} \right) n \quad (10.29 b)$$

$$S_{13} = S_{31} = \nu \left( m\pi \frac{R}{L} \right) \quad (10.29 c)$$

$$S_{22} = (1+k) \left[ \frac{(1-\nu)}{2} \left( m\pi \frac{R}{L} \right)^2 + n^2 \right] \quad (10.29 d)$$

$$S_{23} = S_{32} = -n \left\{ 1 + k \left[ \left( m\pi \frac{R}{L} \right)^2 + n^2 \right] \right\} \quad (10.29 e)$$

$$S_{33} = 1 + k \left[ \left( m\pi \frac{R}{L} \right)^2 + n^2 \right]^2 \quad (10.29 f)$$

为求得振型的非零解, 必有方程 (10.28) 的系数行列式为零, 即

$$\begin{vmatrix} (\Omega^2 - S_{11}) & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & (\Omega^2 - S_{22}) & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & (\Omega^2 - S_{33}) \end{vmatrix} = 0 \quad (10.30 a)$$

展开可得

$$\Omega^6 + a\Omega^4 + b\Omega^2 + c = 0 \quad (10.30 b)$$

式中

$$a = -(S_{11} + S_{22} + S_{33}) \quad (10.31 a)$$

$$b = S_{11}S_{22} + S_{22}S_{33} + S_{33}S_{11} - (S_{12}^2 + S_{23}^2 + S_{31}^2) \quad (10.31 b)$$

$$c = S_{11}S_{23}^2 + S_{22}S_{31}^2 + S_{33}S_{12}^2 + 2S_{12}S_{23}S_{31} - S_{11}S_{22}S_{33} \quad (10.31 c)$$

式 (10.30) 即为两端简支圆柱壳的频率方程。这是一个关于频率系数  $\Omega^2$  的三次代数方程, 可以求得三个根为

$$\Omega_{i m n}^2 = -\frac{1}{3} \left\{ 2 \sqrt{a^2 - 3b} \cos \left[ \alpha + \frac{2\pi}{3} (i-1) \right] + a \right\} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (10.32 a)$$

式中

$$\alpha = \frac{1}{3} \cos^{-1} \left[ \frac{a^3 - 4.5ab + 13.5c}{(a^2 - 3b)^{\frac{3}{2}}} \right] \quad (10.32 b)$$

从而解得固有频率

$$\omega_{i,mn} = \frac{\Omega_{i,mn}}{R} \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}} \quad \left( \begin{matrix} i=1,2,3 \\ m,n=1,2,3,\dots \end{matrix} \right) \quad (10.32c)$$

$\omega_{i,mn}$ 的下标 $m,n$ 代表相应振型沿轴向有 $m$ 个半波,沿周向有 $n$ 个波。对应一组 $(m,n)$ 有三个频率( $i=1,2,3$ ),代表 $U,V,W$ 间比值不同,但均有 $m$ 个轴向半波和 $n$ 个周向波。三个频率中最低一个相应于振型中 $W$ 为主,其它两个频率值要高过一个量级,相应于振型中 $U,V$ 为主。对应每一个 $\omega_{i,mn}$ 或 $\Omega_{i,mn}$ ,从方程(10.28)可求得一组振型比,例如取 $c=1$ ,则由头二个方程可解出

$$\bar{A}_{i,mn} = \frac{A}{C} = \left| \begin{matrix} S_{13} & S_{12} \\ S_{23} & \Omega_{i,mn}^2 - S_{22} \end{matrix} \right| / \left| \begin{matrix} \Omega^2 - S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & \Omega_{i,mn}^2 - S_{22} \end{matrix} \right| \quad (10.33a)$$

$$\bar{B}_{i,mn} = \frac{B}{C} = \left| \begin{matrix} \Omega_{i,mn}^2 - S_{11} & S_{13} \\ S_{21} & S_{23} \end{matrix} \right| / \left| \begin{matrix} \Omega^2 - S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & \Omega_{i,mn}^2 - S_{22} \end{matrix} \right| \quad (10.33b)$$

因此与 $\omega_{i,mn}$ 相应的位移振型为

$$U_{i,mn} = \bar{A}_{i,mn} \cos \frac{m\pi}{L} x \cos n\theta \quad (10.34a)$$

$$V_{i,mn} = \bar{B}_{i,mn} \sin \frac{m\pi}{L} x \sin n\theta \quad (10.34b)$$

$$W_{i,mn} = \sin \frac{m\pi}{L} x \cos n\theta \quad (10.34c)$$

按式(10.2), (10.3), (10.4)进一步可求得相应的应变、内力振型:

$$\theta_{x,mn}^* = -\frac{m\pi}{L} \cos \frac{m\pi}{L} x \cos n\theta \quad (10.35a)$$

$$\theta_{\theta,mn}^* = \frac{n + \bar{B}_{i,mn}}{R} \sin \frac{m\pi}{L} x \sin n\theta \quad (10.35b)$$

$$\varepsilon_{x,mn}^{0*} = -\bar{A}_{i,mn} \frac{m\pi}{L} \sin \frac{m\pi}{L} x \cos n\theta \quad (10.35c)$$

$$\varepsilon_{\theta,mn}^{0*} = \frac{1 + n\bar{B}_{i,mn}}{R} \sin \frac{m\pi}{L} x \cos n\theta \quad (10.35d)$$

$$\varepsilon_{x\theta,mn}^{0*} = \left( \frac{m\pi}{L} \bar{B}_{i,mn} - \frac{n}{R} \bar{A}_{i,mn} \right) \cos \frac{m\pi}{L} x \sin n\theta \quad (10.35e)$$

$$\chi_{x,mn}^* = \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \sin \frac{m\pi}{L} x \cos n\theta \quad (10.35f)$$

$$\chi_{\theta,mn}^* = \frac{n}{R^2} \left( n + \bar{B}_{i,mn} \right) \sin \frac{m\pi}{L} x \cos n\theta \quad (10.35g)$$

$$\chi_{x\theta,mn}^* = \frac{m\pi}{LR} (2n + \bar{B}_{i,mn}) \cos \frac{m\pi}{L} x \sin n\theta \quad (10.35h)$$

$$N_{x,mn}^* = K \left( \frac{\nu}{R} + \frac{\nu n}{R} \bar{B}_{i,mn} - \frac{m\pi}{L} \bar{A}_{i,mn} \right) \sin \frac{m\pi}{L} x \cos n\theta \quad (10.35i)$$

$$N_{\theta,mn}^* = K \left( \frac{1}{R} + \frac{n}{R} \bar{B}_{i,mn} - \nu \frac{m\pi}{L} \bar{A}_{i,mn} \right) \sin \frac{m\pi}{L} x \cos n\theta \quad (10.35j)$$

$$N_{x\theta,mn}^* = K \frac{(1-\nu)}{2} \left( \frac{m\pi}{L} \bar{B}_{i,mn} - \frac{n}{R} \bar{A}_{i,mn} \right) \cos \frac{m\pi}{L} x \sin n\theta \quad (10.35k)$$

$$M_{x, m n}^* = D \left[ \nu \frac{n^2}{R^2} + \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 + \frac{\nu n}{R^2} \bar{B}_{i, m n} \right] \sin \frac{m\pi}{L} x \cos n\theta \quad (10.35 l)$$

$$M_{\theta, m n}^* = D \left[ -\frac{n^2}{R^2} + \nu \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 + \frac{n}{R^2} \bar{B}_{i, m n} \right] \sin \frac{m\pi}{L} x \cos n\theta \quad (10.35 m)$$

$$M_{x\theta, m n}^* = D \frac{(1-\nu)}{2} \frac{m\pi}{L R} (2n + \bar{B}_{i, m n}) \cos \frac{m\pi}{L} x \sin n\theta \quad (10.35 n)$$

$$Q_{x, m n}^* = D \left( \frac{m\pi}{L} \right) \left[ \frac{n^2}{R^2} + \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 + \frac{n}{R^2} \left( \frac{1+\nu}{2} \right) \bar{B}_{i, m n} \right] \cos \frac{m\pi}{L} x \cos n\theta \quad (10.35 o)$$

$$Q_{\theta, m n}^* = -\frac{D}{R} \left\{ n \left[ \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left( \frac{n}{R} \right)^2 \right] + \left[ \left( \frac{1-\nu}{2} \right) \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left( \frac{n}{R} \right)^2 \right] \bar{B}_{i, m n} \right\} \sin \frac{m\pi}{L} x \sin n\theta \quad (10.35 p)$$

振型 (10.27) 中取  $n=1$  时将十分接近两端简支梁的振型。由一般结构动力学知, 两端简支梁有频率系数

$$\Omega_B^2 \approx m^4 \pi^4 \frac{(1-\nu^2)}{2} \left( \frac{R}{L} \right)^4 \quad (a)$$

将壳体理论的  $\Omega$  解 (10.32) 及梁理论的  $\Omega_B$  解 (a) 一起画在  $\Omega \sim \frac{L}{mR}$  图 (图10.2) 上。从图可以看出, 对于  $\frac{L}{mR} > 8$  的长圆柱壳, 梁理论结果和壳体理论结果相当接近。因此通常长壳的弯曲振动可以按梁来近似求解。

频率系数解 (10.32) 的部分数值结果可参见表10.3, 表10.4。

解 (10.32) 详细计算表明<sup>[82]</sup>, 对于一定  $\frac{L}{mR}$  值, 频率系数并不一定随  $n$  增大而增大。

对于较小的  $\frac{L}{mR}$  壳体 (短壳), 最低频率将相应于  $n > 1$  (相当周向有多个波的频率反而较低),  $\frac{L}{mR}$  越小, 最低频率相应的  $n$  越大。

#### 轴对称振动

两端简支圆柱壳固有振动另一类解为轴对称振动, 即所有力学量与  $\theta$  无关 (相当  $n=0$ ), 则基本方程 (10.5) 变为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial w}{R \partial x} = \frac{1}{K} \left( \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - q_x \right) \quad (10.36 a)$$

$$(1+k) \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{K} \left( \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - q_\theta \right) \quad (10.36 b)$$

$$\nu \frac{\partial u}{R \partial x} + \frac{w}{R^2} + k R^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{1}{K} \left( q_r - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \quad (10.36 c)$$

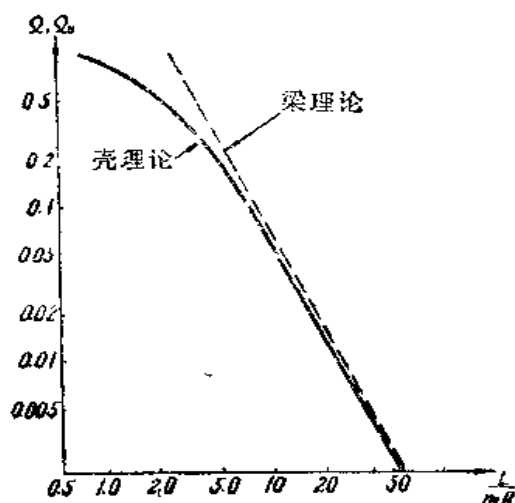


图 10.2

设满足边界条件振型解

$$U = A \cos \frac{m\pi}{L} x \quad (10.37a)$$

$$V = B \sin \frac{m\pi}{L} x \quad (m=1, 2, 3, \dots) \quad (10.37b)$$

$$W = C \sin \frac{m\pi}{L} x \quad (10.37c)$$

代入方程 (10.36) 相应的振型方程, 由系数行列式为零得频率方程

$$\begin{vmatrix} \Omega^2 - \xi^2 & 0 & \nu \xi \\ 0 & \Omega^2 - (1+k) \frac{(1-\nu)}{2} \xi^2 & 0 \\ \nu \xi & 0 & \Omega^2 - (1+k\xi^4) \end{vmatrix} = 0 \quad (10.38a)$$

式中

$$\xi = m\pi \frac{R}{L} \quad (10.38b)$$

显然, 这一方程可以解耦为两组方程: 一组相应于只有周向位移, 即扭转振型, 其振型为

$$V = B \sin \frac{m\pi}{L} x, \quad U = W = 0 \quad (10.39a)$$

其频率系数为

$$\Omega^2 = (1+k) \frac{(1-\nu)}{2} \xi^2 \quad (10.39b)$$

而  $m$  为轴向扭转半波数; 另一组相应于只有轴向及法向位移, 即扩展振型, 其振型为

$$U = A \cos \frac{m\pi}{L} x, \quad W = C \sin \frac{m\pi}{L} x, \quad V = 0 \quad (10.40a)$$

其频率方程为

$$\Omega^4 - (1 + \xi^2 + k\xi^4)\Omega^2 + \xi^2(1 + k\xi^4) - \nu^2\xi^2 = 0 \quad (10.40b)$$

可解得

$$\Omega^2_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ (1 + \xi^2 + k\xi^4) \mp \sqrt{(1 + \xi^2 + k\xi^4)^2 + 4\nu^2\xi^2 - 4\xi^2(1 + k\xi^4)} \right\} \quad (10.40c)$$

若忽略  $k^2$  高阶项则有

$$\Omega^2_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ (1 + \xi^2 + k\xi^4) \mp \sqrt{(1 - \xi^2)^2 + 4\nu^2\xi^2 + 2k\xi^4(1 - \xi^2)} \right\} \quad (10.40d)$$

而振型比为

$$\frac{A}{C} \Big|_{j,m} = \frac{\nu\xi}{\xi^2 - \Omega_{j,m}^2} \quad (j=1, 2) \quad (10.40e)$$

其中  $m$  为轴向扩展半波数,  $j$  相应于不同  $U$  及  $W$  比值。

上述轴向-法向振型再人为分离为两组非耦合振型:

纯轴向振型

$$U = A \cos \frac{m\pi}{L} x, \quad V = W = 0 \quad (10.41a)$$

则代入方程 (10.36) 相应的振型方程, 可得频率系数



$$\Omega_z^2 = \xi^2$$

$$(10.42a)$$

纯法向振型

$$W = C \sin \frac{m\pi}{L} x, \quad U = V = 0$$

$$(10.41b)$$

则代入方程 (10.36) 相应的振型方程, 可得频率系数

$$\Omega_z^2 = 1 + k\xi^4 \quad (10.42b)$$

将式 (10.40c), (10.42a),

(10.42b) 的结果均画在  $\Omega \approx \frac{\pi}{\xi} = \frac{L}{mR}$  图 (图10.3) 上, 可以看出, 当

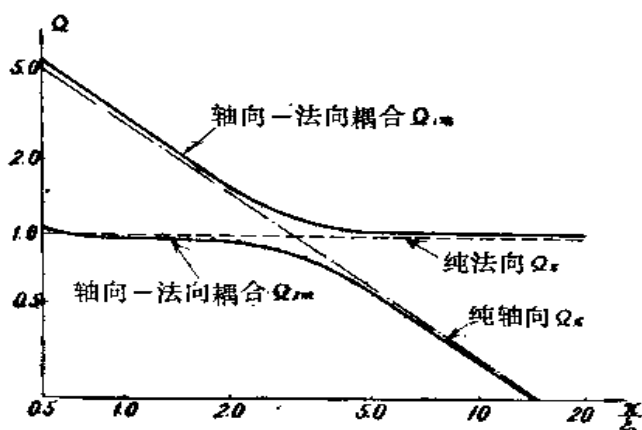


图 10.3

$\frac{\pi}{\xi} \gg 1$ , 即  $\xi \ll 1$  时, 轴向-法向耦合频率就可用非耦合频率公式 (10.42) 来表示, 也即对于长圆柱壳 (一般,  $\xi < 0.3$ ,  $\frac{L}{mR} > 10$ ) 可以认为轴向和法向振型是不耦合的。

综上所述对于长圆柱壳 ( $\frac{L}{mR} > 10$ ),  $n=0, 1$  的固有振动分析可以简化为分别按轴、柱、环、梁的一维理论公式进行; 而  $n \geq 2$  的固有振动分析则需按壳体理论公式 (10.32), (10.34) 进行分析。当然对于短圆柱壳, 则  $n=0$  按式 (10.39), (10.40);  $n \geq 1$  按式 (10.32), (10.34) 进行分析。

鉴于壳体频率公式 (10.32) 的计算相当繁琐, 作为工程上分析可以进一步简化, 主要为以下几种。

#### 第一种简化方法

对于  $n \geq 2$  的振型, 考虑到法向振型  $W$  是主要的, 因此在基本方程 (10.5) 中可以忽略中而内位移引起惯性力  $\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ ,  $\rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$  项, 则相应频率方程 (10.30a) 变为

$$\begin{vmatrix} -S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & -S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & \Omega^2 - S_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad (10.43a)$$

展开可得

$$b_0 \Omega^2 + C_0 = 0 \quad (10.43b)$$

而

$$b_0 = S_{11} S_{22} - S_{12}^2 \quad (10.43c)$$

$$c_0 = c = S_{11} S_{23}^2 + S_{22} S_{31}^2 + S_{33} S_{12}^2 + 2 S_{12} S_{23} S_{31} - S_{11} S_{22} S_{33} \quad (10.43d)$$

式中  $S_{ij}$  ( $i, j=1, 2, 3$ ) 见式 (10.29), 从而解得频率系数的直接解析表达式

$$\Omega^2 = -\frac{c_0}{b_0} = \left\{ \frac{(1-\nu)}{2} [(1-\nu^2)\xi^4 + k(n^2 + \xi^2)^4] + \frac{(1-\nu)}{2} k \left[ \frac{1}{2} \cdot (5+3\nu)\xi^2 n^2 + n^4 - 2(2+\nu)\xi^4 n^2 - 2(3+\nu)\xi^2 n^4 - 2n^6 \right] \right\} +$$

$$+ \left\{ \frac{(1-\nu)}{2} (\xi^2 + n^2)^2 + k \left[ \frac{1-\nu}{2} \xi^4 + \left( \frac{5-2\nu+\nu^2}{2} \right) \xi^2 n^2 + \frac{1-\nu}{2} n^4 \right] \right\} \quad (10.43e)$$

一般来说, 近似解 (10.43) 比精确解 (10.32) 偏高 (除  $n=0$ ), 随着  $n$  增大  $\frac{L}{mR}$  减小, 近似公式 (10.43) 的误差减小。因此式 (10.43) 适用于短壳之轴向、周向多波振型。近似解 (10.43) 的误差与  $\frac{h}{R}$  基本上无关, 因此对于不同理论, 其误差大小是一样的。

### 第二种简化方法

当周向波长  $\frac{2\pi R}{n}$  远小于轴向波长  $\frac{2L}{m}$ , 即  $n^2 \gg \xi^2$  时, 则相对  $n^2$  项可以忽略  $\xi^2$  项, 有频率方程 (10.30), (10.31) 及振型 (10.34), (10.33) 中

$$\left. \begin{aligned} S_{11} &= \frac{1-\nu}{2} n^2 & S_{12} &= S_{21} = \frac{(1+\nu)}{2} n \xi \\ S_{22} &= (1+k) n^2 & S_{13} &= S_{31} = \nu \xi \\ S_{33} &= 1 + k n^4 & S_{23} &= S_{32} = -n(1 + k n^2) \end{aligned} \right\} \quad (10.44)$$

现在我们利用上述振型解来讨论一下圆柱壳的变形能组成。在变形能表达式 (10.8b) 中已经指出, 变形能可分为两大部分: 弯曲变形能与薄膜变形能。它们的分配和振型波数及几何尺寸有关。将上述振型结果代入变形能表达式分析表明: 对于小的  $n$ , 全部变形能中薄膜变形能占主要成份, 随  $n$  增大, 逐渐变为弯曲变形能占主要成份; 而对于无量纲参数  $\xi = \frac{m\pi R}{L}$ , 当  $\xi$  逐渐减小时, 弯曲变形能的比例就逐渐增大, 在  $\xi$  很小时, 几乎全部是弯曲变形能。这一结果启示我们, 在  $n$  很小时, 可以用无矩壳理论 (第十三章) 来近似, 在  $n$  很大,  $\xi$  很小时, 可用无薄膜力理论 (§ 9.11)。

## § 10.4 圆柱壳振动的简化理论

上面各节是用经典理论来讨论圆柱壳的固有振动问题。下面将用简化理论来分析, 从一般性方程出发, 再具体到圆柱壳和求解无限长及两端简支圆柱壳的固有振动问题。

在一般正交曲线坐标系中, 简化理论的固有振动方程根据式 (9.76) 有

$$D \nabla^2 \nabla^2 w + \nabla_1^2 f + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (10.45a)$$

$$E h \nabla_1^2 w - \nabla^2 \nabla^2 f = 0 \quad (10.45b)$$

式中

$$\nabla^2 = \frac{1}{AB} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \right] \quad (10.46a)$$

$$\nabla_1^2 = \frac{1}{AB} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{B}{AR_s} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{A}{BR_s} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \right] \quad (10.46b)$$

设

$$w(\alpha, \beta, t) = W(\alpha, \beta) \sin(\omega t + \varphi) \quad (10.47a)$$

$$f(\alpha, \beta, t) = F(\alpha, \beta) \sin(\omega t + \varphi) \quad (10.47b)$$

测振型方程有

$$D\nabla^2\nabla^2W + \nabla_1^2F - \rho h\omega^2W = 0 \quad (10.48a)$$

$$Eh\nabla_1^2W - \nabla^2\nabla^2F = 0 \quad (10.48b)$$

对式 (10.48a) 进行  $\nabla^2\nabla^2$  运算, 对式 (10.48b) 进行  $\nabla_1^2$  运算, 然后相加, 消去  $F$ , 可得关于  $W$  的八阶齐次独立方程

$$D\nabla^2\nabla^2\nabla^2\nabla^2W + Eh\nabla_1^2\nabla_1^2W - \rho h\omega^2\nabla^2\nabla^2W = 0 \quad (10.49)$$

代入圆柱壳基本关系 (10.1), 有基本方程 (10.49) 中算子

$$\nabla^2\nabla^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{2}{R^2} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{R^4} \frac{\partial^4}{\partial \theta^4} \quad (10.50a)$$

$$\nabla_1^2\nabla_1^2 = \frac{1}{R^2} \frac{\partial^4}{\partial x^4} \quad (10.50b)$$

对封闭圆柱壳, 设振型

$$W(x, \theta) = W_n(x) \cos n\theta \quad (10.51)$$

代入基本方程 (10.49), (10.50), 有  $W_n(x)$  所应满足的常微分方程

$$D\left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{n^2}{R^2}\right)^4 W_n(x) + \frac{Eh}{R^2} \frac{d^4 W_n(x)}{dx^4} - \rho h\omega^2 \left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{n^2}{R^2}\right)^2 W_n(x) = 0 \quad (10.52)$$

按常微分方程理论, 可设解

$$W_n(x) = e^{\lambda x} \quad (10.53)$$

代入方程 (10.52) 可得关于  $\lambda$  的八次代数方程

$$D\left[\lambda^2 - \frac{n^2}{R^2}\right]^4 + \frac{Eh}{R^2} \lambda^4 - \rho h\omega^2 \left[\lambda^2 - \frac{n^2}{R^2}\right]^2 = 0 \quad (10.54)$$

解得八个根

$$\lambda_j = \pm \alpha_1, \pm i\alpha_2, \pm(\alpha_3 + i\alpha_4), \pm(\alpha_3 - i\alpha_4) \quad (j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) \quad (10.55)$$

从而得一般解

$$W_n(x) = C_1 \sinh \alpha_1 x + C_2 \cosh \alpha_1 x + C_3 \sin \alpha_2 x + C_4 \cos \alpha_2 x + C_5 e^{\alpha_3 x} \sin \alpha_4 x + C_6 e^{\alpha_3 x} \cos \alpha_4 x \\ + C_7 e^{-\alpha_3 x} \sin \alpha_4 x + C_8 e^{-\alpha_3 x} \cos \alpha_4 x \quad (10.56)$$

根据两端八个边界条件 (10.7) 可建立关于  $C_1 \sim C_8$  的齐次线代方程组, 由系数行列式为零, 可得频率方程以及各阶频率与振型。

鉴于上述过程仍相当繁琐, 故一般常引入上节圆柱壳第二种简化方法的假定: 周向波长远小于轴向波长, 即  $\frac{n^2}{R^2} \gg \lambda^2$ , 因而方程 (10.54) 简化为四次代数方程

$$\frac{Eh}{R^2} \lambda^4 + \left(\frac{n}{R}\right)^4 \left[ D\left(\frac{n}{R}\right)^4 - \rho h\omega^2 \right] = 0 \quad (10.57)$$

这一方程很容易给出直接结果

$$\lambda_j = \pm \alpha, \pm i\alpha \quad (j = 1, 2, 3, 4) \quad (10.58a)$$

$$\alpha = \frac{n}{R} \sqrt[4]{\frac{R^2}{Eh} \left[ D\left(\frac{n}{R}\right)^4 - \rho h\omega^2 \right]} \quad (10.58b)$$

按式 (10.53) 有一般解

$$W_n(x) = A \sinh \alpha x + B \cosh \alpha x + C \sin \alpha x + D \cos \alpha x \quad (10.59)$$

由于基本方程简化为四阶, 故每端应满足两个边界条件

$$x=0, L: \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \text{ 或 } M_x^* = 0 \quad (10.60a)$$

$$W=0 \text{ 或 } Q_x^* + \frac{\partial M_x^* \theta}{R \partial \theta} = 0 \quad (10.60b)$$

从而可建立关于  $A, B, C, D$  的齐次线代方程组, 由系数行列式为零, 可得频率方程以及各阶频率与振型。

应该指出, 解 (10.59) 及边界条件 (10.60) 和单向板的解 (3.5a) 及边界条件 (3.9) 是类似的, 因此可以利用 § 3.1 节单向板解分析圆柱壳简化理论近似解, 只是从  $\alpha$  转换到固有频率  $\omega$  的公式 (10.58b) 与单向板的式 (3.4b) 不同。具体的将在下节给出。

应该说明, 上述近似解对于  $n=0$  是不适用的, 并随  $n$  的增加, 精度有所改善。

利用简化理论分析圆柱壳固有振动的另一途径可以从唐纳尔理论假定出发, 建立位移  $u, v, w$  的联立方程组。

根据圆柱壳基本关系式 (10.1) 及唐纳尔理论的转角关系式 (9.71) 有

$$\theta_x = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \theta_\theta = -\frac{\partial w}{R \partial \theta} \quad (10.61)$$

按式 (10.2a), (10.2b) 有中面应变分量

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_\theta^0 = \frac{\partial v}{R \partial \theta} + \frac{w}{R}, \quad \varepsilon_{x\theta}^0 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{R \partial \theta} \quad (10.62a)$$

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_\theta = -\frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \theta^2}, \quad \kappa_{x\theta} = -2 \frac{\partial^2 w}{R \partial x \partial \theta} \quad (10.62b)$$

按简化理论的式 (9.73) 及式 (10.4c) 一式 (10.4e) 有动力平衡方程

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{x\theta}}{R \partial \theta} = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - q_x, \quad (10.63a)$$

$$\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{\partial N_\theta}{R \partial \theta} = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - q_\theta, \quad (10.63b)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_\theta}{R \partial \theta} - \frac{N_\theta}{R} = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q_z, \quad (10.63c)$$

及剪力表达式

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \theta^2} \right) \quad (10.64a)$$

$$Q_\theta = -D \frac{\partial}{R \partial \theta} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \theta^2} \right) \quad (10.64b)$$

另外, 按式 (10.3) 有内力分量

$$N_x = K \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{R \partial \theta} + \nu \frac{w}{R} \right) \quad (10.65a)$$

$$N_\theta = K \left( \frac{\partial v}{R \partial \theta} + \frac{w}{R} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (10.65b)$$

$$N_{x\theta} = K \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{R \partial \theta} \right) \quad (10.65c)$$

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \theta^2} \right) \quad (10.65d)$$

$$M_\theta = -D \left( \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (10.65e)$$

$$M_{x\theta} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{R \partial x \partial \theta} \quad (10.65f)$$

将式 (10.64), (10.65) 代入式 (10.63), 可得简化理论的圆柱壳位移方程组

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 u}{R^2 \partial \theta^2} + \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 v}{R \partial x \partial \theta} + \nu \frac{\partial w}{R \partial x} = \frac{1}{K} \left[ \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - q_x \right] \quad (10.66a)$$

$$\frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 u}{R \partial x \partial \theta} + \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{R^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial w}{R^2 \partial \theta} = \frac{1}{K} \left[ \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - q_\theta \right] \quad (10.66b)$$

$$\frac{12}{h^2} \left[ \nu \frac{\partial u}{R \partial x} + \frac{\partial u}{R^2 \partial \theta} + \frac{w}{R^2} \right] + \nabla^2 \nabla^2 w = \frac{1}{D} \left[ q_z - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] \quad (10.66c)$$

比较简化理论方程 (10.66) 和经典理论方程 (10.5) 可以发现它们之间只差含  $h$  项, 也就是在经典理论方程中取  $h=0$ , 则即为简化理论方程。因此在上一节中所述无限长圆柱壳及两端简支圆柱壳的所有结果中取相当  $h$  为零, 即为简化理论相应结果。下面将分别直接列出。

无限长圆柱壳第一类振动 ( $\lambda \neq 0$ ) 按式 (10.14) 有频率方程

$$\begin{vmatrix} \left[ \Omega^2 - \left( \lambda^2 + \frac{1-\nu}{2} n^2 \right) \right] & \left( \frac{1+\nu}{2} \lambda n \right) & (\nu \lambda) \\ \left( \frac{1+\nu}{2} \lambda n \right) & \left[ \Omega^2 - \left( \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 + n^2 \right) \right] & (-n) \\ (\nu \lambda) & (-n) & [\Omega^2 - 1 - k(\lambda^2 + n^2)^2] \end{vmatrix} = 0 \quad (10.67a)$$

无限长圆柱壳第二类振动 ( $\lambda=0, u=0$ ) 按式 (10.20) 有频率方程

$$\begin{vmatrix} (n^2 - \Omega^2) & n \\ n & (1 + kn^4 - \Omega^2) \end{vmatrix} = 0 \quad (10.67b)$$

无限长圆柱壳第三类振动 ( $\lambda=0, u \neq 0$ ) 按式 (10.21d) 有频率系数

$$\Omega^2 = \frac{1-\nu}{2} n^2 \quad (10.67c)$$

两端简支圆柱壳非轴对称振动 ( $n \neq 0$ ) 频率公式为式 (10.32), (10.31), 振型公式为式 (10.34), (10.33), 但其中系数

$$\left. \begin{aligned} S_{11} &= \xi^2 + \frac{1-\nu}{2} n^2, & S_{12} &= S_{21} = \frac{1+\nu}{2} \xi n \\ S_{22} &= \frac{1-\nu}{2} \xi^2 + n^2, & S_{13} &= S_{31} = \nu \xi \\ S_{33} &= 1 + k(\xi^2 + n^2)^2, & S_{23} &= S_{32} = -n \end{aligned} \right\} \quad (10.68a)$$

两端简支圆柱壳轴对称振动 ( $n=0$ ) 按式 (10.39), (10.40c) 有频率系数

$$\left. \begin{aligned} \Omega_0^2 &= \frac{1-\nu}{2} \xi^2 \\ \Omega_{\frac{1}{2}m}^2 &= \frac{1}{2} \left[ (1 + \xi^2 + k\xi^4) \mp \sqrt{(1 - \xi^2)^2 + 4\nu^2 \xi^2 + 2k\xi^4(1 - \xi^2)} \right] \end{aligned} \right\} \quad (10.68b)$$

相应振型为式 (10.37), (10.40d)。

两端简支圆柱壳第一种简化解 ( $n \neq 0$ ) 按式 (10.43) 频率系数为

$$\Omega^2 = \frac{(1-\nu^2)\xi^4 + k(n^2 + \xi^2)^4}{(\xi^2 + n^2)^2} \quad (10.68c)$$

两端简支圆柱壳第二种简化解 ( $n \neq 0$ ) 频率公式仍为式 (10.32), (10.31), 振型仍为式 (10.34), (10.33), 但其中系数

$$\left. \begin{aligned} S_{11} &= \frac{1-\nu}{2}n^2, & S_{12} &= S_{21} = \frac{1+\nu}{2}n\xi \\ S_{22} &= n^2, & S_{13} &= S_{31} = \nu\xi \\ S_{33} &= 1 + kn^4, & S_{23} &= S_{32} = -n \end{aligned} \right\} \quad (10.68d)$$

应该指出, 相对各种较精确理论解而言, 上述简化理论的解所具有的误差是在  $\frac{h^2}{R^2}$  量级, 因此壳体越薄, 简化理论解的误差越小。在第九章也早已指出, 其它各种薄壳振动理论间的差别也是  $\left(\frac{h}{R}\right)^2$  量级。下而对于  $\frac{h}{R} = 0.05$  及  $\frac{h}{R} = 0.002$  两种情况, 按各种理论, 计算无限长圆柱壳 ( $\lambda = 0$ ) 的频率系数  $\Omega$  解具体数字分别列于表10.1及表10.2; 计算两端简支圆柱壳的低频系数 ( $i=1$ )  $\Omega$  的具体数字分别列于表10.3, 表10.4。

从表10.1—表10.4可以看出, 对于薄壳 ( $\frac{h}{R} \leq 0.05$ ), 各种理论间差别是十分微小的 (其中简化理论差异稍大, 经典理论很接近其它几种理论值)。因此对工程计算而言, 各种理论结果均可应用, 主要是考虑其简易、实用性。当然, 在理论上探讨各种理论间关系与差别还是十分必要的。仔细研究表10.3, 表10.4可以发现, 在轴向相对波长  $\left(\frac{L}{mR}\right)$  较短, 周向波数

无限长圆柱壳频率系数  $\Omega$  ( $\lambda = 0, \nu = 0.3, \frac{h}{R} = 0.05$ )

表10.1

理论阶次		简化	经典	勒夫	斯氏	弗留格	桑德	符拉索夫
0	$U \neq 0$	0	0	0	0	0	0	0
	$U = 0$	min	0	0	0	0	0	0.00010
		max	1	1	1	1	1	1
1	$U \neq 0$	0.59161	0.59161	0.59161	0.59161	0.59161	0.59162	0.59161
	$U = 0$	min	0.01021	0.01476	0.01476	0.01250	0.01476	0
		max	1.41425	1.30676	1.30676	1.30657	1.30676	1.41416
2	$U \neq 0$	1.18322	1.18322	1.18322	1.18322	1.18322	1.18322	1.18322
	$U = 0$	min	0.05164	0.03873	0.03873	0.05477	0.03873	0.03873
		max	2.23622	2.23666	2.23666	2.23614	2.23666	2.23615
3	$U \neq 0$	1.77482	1.77482	1.77482	1.77482	1.77482	1.77487	1.77482
	$U = 0$	min	0.12325	0.10955	0.10955	0.12664	0.10955	0.10956
		max	3.16254	3.16334	3.16334	3.16301	3.16334	3.16249
4	$U \neq 0$	2.36643	2.36643	2.36643	2.36643	2.36643	2.36650	2.36643
	$U = 0$	min	0.22412	0.21008	0.21008	0.22760	0.21008	0.21010
		max	4.12348	4.12463	4.12463	4.12482	4.12463	4.12344

无限长圆柱壳频率系数 $\Omega$  ( $\lambda = 0$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\frac{h}{R} = 0.002$ )

表10.2

n	理论		简 化	经 典	勒 夫	哥 氏	弗 留 格	桑 德	符拉索夫
	阶 次								
0	$U \neq 0$		0	0	0	0	0	0	0
	$U = 0$	min	0	0	0	0	0	0	0.00001
		max	1	1	1	1	1	1	1
1	$U \neq 0$		0.59161	0.59161	0.59161	0.59161	0.59161	0.59161	0.59161
	$U = 0$	min	0.00041	0.00005	0.00005	0.00005	0.00005	0.00005	0
		max	1.41421	1.41421	1.41421	1.41421	1.41421	1.41421	1.41421
2	$U \neq 0$		1.18322	1.18322	1.18322	1.18322	1.18322	1.18322	1.18322
	$U = 0$	min	0.00207	0.00155	0.00155	0.00155	0.00219	0.00155	0.00155
		max	2.23607	2.23607	2.23607	2.23607	2.23607	2.23607	2.23607
3	$U \neq 0$		1.77482	1.77482	1.77482	1.77482	1.77482	1.77482	1.77482
	$U = 0$	min	0.00493	0.00438	0.00438	0.00438	0.00442	0.00438	0.00438
		max	3.16228	3.16228	3.16228	3.16228	3.16228	3.16228	3.16228
4	$U \neq 0$		2.36643	2.36643	2.36643	2.36643	2.36643	2.36643	2.36643
	$U = 0$	min	0.00896	0.00840	0.00840	0.00840	0.00792	0.00840	0.00840
		max	4.12311	4.12311	4.12311	4.12311	4.12311	4.12311	4.12311

两端简支圆柱壳频率系数 $\Omega$  ( $i=1$ ,  $\nu=0.3$ ,  $\frac{h}{R}=0.05$ )

表10.3

n	理论		简 化	经 典	勒 夫	哥 氏	弗 留 格	桑 德	符拉索夫
	$L/mR$								
0	0.1		14.277	14.272	14.270	14.262	14.263	14.269	14.271
	0.25		2.4701	2.4699	2.4697	2.4692	2.4656	2.4700	2.4660
	1		0.95972	0.95952	0.95971	0.95971	0.95875	0.95971	0.95914
	4		0.46466	0.46461	0.46465	0.46478	0.46460	0.46474	0.46464
	20		0.092930	0.092920	0.092948	0.092966	0.092929	0.092946	0.092926
1	0.1		14.291	14.287	14.283	14.276	14.278	14.282	14.285
	0.25		2.4810	2.4805	2.4801	2.4796	2.4759	2.4801	2.4766
	1		0.85855	0.85786	0.85778	0.85761	0.85701	0.85778	0.85736
	4		0.25739	0.25697	0.25696	0.25694	0.25689	0.25698	0.25680
	20		0.019148	0.016127	0.016103	0.016102	0.016098	0.016104	0.015998
2	0.1		14.338	14.329	14.326	14.319	14.320	14.325	14.328
	0.25		2.5137	2.5125	2.5121	2.5114	2.5081	2.5120	2.5088
	1		0.67967	0.67738	0.67690	0.67636	0.67616	0.67684	0.67663
	4		0.12713	0.12167	0.12143	0.12118	0.12135	0.12127	0.12132
	20		0.052168	0.039331	0.039299	0.039272	0.039280	0.039269	0.039284

两端简支圆柱壳频率系数 $\Omega$  ( $i=1, \nu=0.3, \frac{h}{R}=0.002$ )

表10.4

$n$	理 论 $L/mR$	简 化	经 典	勒 夫	哥 氏	弗 留 格	桑 德	符拉索夫
0	0.1	1.110	1.110	1.110	1.110	1.110	1.110	1.110
	0.25	0.9580	0.9580	0.9580	0.9580	0.9580	0.9580	0.9580
	1	0.9492	0.9492	0.9492	0.9492	0.9492	0.9492	0.9492
	4	0.4646	0.4646	0.4646	0.4646	0.4646	0.4646	0.4646
	20	0.09293	0.09293	0.09293	0.09293	0.09293	0.09293	0.09293
	100	0.01859	0.01859	0.01859	0.01859	0.01859	0.01859	0.01859
1	0.1	1.1105	1.1105	1.1105	1.1105	1.1105	1.1105	1.1105
	0.25	0.9520	0.9520	0.9520	0.9520	0.9520	0.9520	0.9520
	1	0.8449	0.8449	0.8449	0.8449	0.8449	0.8449	0.8449
	4	0.2569	0.2569	0.2569	0.2569	0.2569	0.2569	0.2569
	20	0.01611	0.01610	0.01610	0.01610	0.01610	0.01610	0.01610
	100	0.003128	0.002665	0.002665	0.002665	0.002665	0.002665	0.002664
2	0.1	1.1089	1.1089	1.1089	1.1089	1.1089	1.1089	1.1089
	0.25	0.9345	0.9345	0.9345	0.9345	0.9345	0.9345	0.9345
	1	0.6521	0.6521	0.6521	0.6521	0.6521	0.6521	0.6521
	4	0.1127	0.1127	0.1127	0.1127	0.1127	0.1127	0.1127
	20	0.005453	0.005453	0.005453	0.005452	0.005453	0.005452	0.005452
	100	0.002076	0.001563	0.001563	0.001563	0.001563	0.001563	0.001563

( $n$ ) 较少, 厚 径 比  $\left(\frac{h}{R}\right)$  较小时, 简化理论与别的精确化理论间差别将较小。详细情况可参见文献[154]。

## § 10.5 其它边界的有限长圆柱壳

### 一、有限长圆柱壳振动的一般解

首先介绍有限长闭合圆柱壳的一般性解法,<sup>[80]</sup> 它适合于求解可能出现的一百多种边界条件组合的闭合圆柱壳。为了简便起见, 具体推导将针对简化理论振动方程(10.66)进行, 实际上本方法也同样适用于经典理论与其它各种薄壳振动理论, 只是含  $k$  项系数有所差别。

对于周向封闭的有限圆柱壳可设振型解

$$U(x, \theta) = \bar{U}(x) \cos n\theta \quad (10.69a)$$

$$V(x, \theta) = \bar{V}(x) \sin n\theta \quad (10.69b)$$

$$W(x, \theta) = \bar{W}(x) \cos n\theta \quad (10.69c)$$

代入式 (10.66) 相应的振型方程, 可得未知函数  $\bar{U}(x)$ ,  $\bar{V}(x)$ ,  $\bar{W}(x)$  所应满足的联立



齐次常微分方程组

$$\bar{U}'' + \frac{1+\nu}{2} \frac{n}{R} \bar{V}' + \frac{\nu}{R} \bar{W}' + \left( \frac{\rho h}{K} \omega^2 - \frac{1-\nu}{2} \frac{n^2}{R^2} \right) \bar{U} = 0 \quad (10.70a)$$

$$\frac{1-\nu}{2} \bar{V}'' - \frac{1+\nu}{2} \frac{n}{R} \bar{U}' - \frac{n}{R^2} \bar{W} + \left( \frac{\rho h}{K} \omega^2 - \frac{n^2}{R^2} \right) \bar{V} = 0 \quad (10.70b)$$

$$\frac{\nu}{R} \bar{U}' + \frac{n}{R^2} \bar{V} + k R^2 \left( \bar{W}'' - 2 \frac{n^2}{R^2} \bar{W}' + \frac{n^4}{R^4} \bar{W} \right) + \left( \frac{1}{R^2} - \frac{\rho h}{K} \omega^2 \right) \bar{W} = 0 \quad (10.70c)$$

根据常微分方程组解法可设

$$\bar{U}(x) = A e^{\frac{\lambda}{R} x}, \quad \bar{V}(x) = B e^{\frac{\lambda}{R} x}, \quad \bar{W}(x) = C e^{\frac{\lambda}{R} x} \quad (10.71)$$

代入到方程 (10.70), 可得关于系数  $A, B, C$  的线代方程组

$$\begin{pmatrix} \left[ \frac{\rho h}{K} \omega^2 + \frac{\lambda^2}{R^2} - \frac{1-\nu}{2} \frac{n^2}{R^2} \right] & \left( \frac{1+\nu}{2} \frac{n\lambda}{R^2} \right) & \left( \frac{\nu\lambda}{R^2} \right) \\ \left( \frac{1+\nu}{2} \frac{n\lambda}{R^2} \right) & \left[ \frac{n^4}{R^2} - \frac{1-\nu}{2} \frac{\lambda^2}{R^2} - \frac{\rho h}{K} \omega^2 \right] & \left( \frac{n}{R^2} \right) \\ \left( \frac{\nu\lambda}{R^2} \right) & \left( \frac{n}{R^2} \right) & \left[ k \left( \frac{\lambda^4}{R^2} - 2 \frac{n^2\lambda^2}{R^2} + \frac{n^4}{R^2} \right) + \frac{1}{R^2} - \frac{\rho h}{K} \omega^2 \right] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = 0 \quad (10.72)$$

为得非零解, 其系数行列式为零, 得  $\lambda$  方程

$$\lambda^8 + a_3 \lambda^6 + a_2 \lambda^4 + a_1 \lambda^2 + a_0 = 0 \quad (10.73)$$

式中

$$a_3 = \left( \frac{3-\nu}{1-\nu} \right) \Omega^2 - 4n^2 \quad (10.74a)$$

$$a_2 = 6n^4 - \frac{3(3-\nu)}{1-\nu} n^2 \Omega^2 + \frac{2}{1-\nu} \Omega^4 + \frac{1}{k} (1-\nu^2 - \Omega^2) \quad (10.74b)$$

$$a_1 = \frac{n^2 \Omega^2}{1-\nu^2} [3(3-\nu)n^2 - 4\Omega^2] - 4n^6 + \frac{\Omega^2}{k} [3 + 2\nu + 2n^2 - \frac{3-\nu}{1-\nu} \Omega^2] \quad (10.74c)$$

$$a_0 = \frac{1}{k(1-\nu)} [(1-\nu)n^2 - 2\Omega^2] [kn^6 - \Omega^2(1 + kn^4 + n^2 - \Omega^2)] \quad (10.74d)$$

其中  $\Omega^2$  表达式见式 (10.15a)

八次代数方程 (10.73) 可解得八个根

$$\lambda_i = \pm \alpha_1, \pm i\alpha_2, \pm(\alpha_3 + i\alpha_4), \pm(\alpha_3 - i\alpha_4) \quad (i=1, 2, 3, \dots, 8) \quad (10.75)$$

而  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  均为正实数<sup>[117]</sup>。

将  $\lambda_i$  代回方程 (10.72), 求得系数比  $\eta_j, \xi_j (j=1, 2, 3, 4)$ , 再代回式 (10.69) 进行组合, 按常微分方程组理论, 有振型一般解

$$\begin{aligned} U(x, \theta) = & \left\{ c_1 \eta_1 e^{\frac{\alpha_1}{R} x} - c_2 \eta_1 e^{-\frac{\alpha_1}{R} x} - c_3 \eta_2 \sin \frac{\alpha_2}{R} x + c_4 \eta_2 \cos \frac{\alpha_2}{R} x \right. \\ & + c_5 e^{\frac{\alpha_3}{R} x} \left( \eta_3 \cos \frac{\alpha_4}{R} x - \eta_4 \sin \frac{\alpha_4}{R} x \right) + c_6 e^{-\frac{\alpha_3}{R} x} \left( \eta_4 \cos \frac{\alpha_4}{R} x + \eta_3 \sin \frac{\alpha_4}{R} x \right) \\ & \left. - c_7 e^{-\frac{\alpha_3}{R} x} \left( \eta_5 \cos \frac{\alpha_4}{R} x + \eta_4 \sin \frac{\alpha_4}{R} x \right) + c_8 e^{-\frac{\alpha_3}{R} x} \left( \eta_4 \cos \frac{\alpha_4}{R} x - \eta_3 \sin \frac{\alpha_4}{R} x \right) \right\} \\ & \times \cos n\theta \end{aligned} \quad (10.76a)$$

$$\begin{aligned}
V(x, \theta) = & \left\{ c_1 \xi_1 e^{\frac{\alpha_1}{R} x} + c_2 \xi_1 e^{-\frac{\alpha_1}{R} x} + c_3 \xi_2 \cos \frac{\alpha_2}{R} x + c_4 \xi_2 \sin \frac{\alpha_2}{R} x \right. \\
& + c_5 e^{\frac{\alpha_3}{R} x} \left( \xi_3 \cos \frac{\alpha_4}{R} x - \xi_4 \sin \frac{\alpha_4}{R} x \right) + c_6 e^{\frac{\alpha_3}{R} x} \left( \xi_1 \cos \frac{\alpha_4}{R} x + \xi_3 \sin \frac{\alpha_4}{R} x \right) \\
& + c_7 e^{-\frac{\alpha_3}{R} x} \left( \xi_3 \cos \frac{\alpha_4}{R} x + \xi_4 \sin \frac{\alpha_4}{R} x \right) - c_8 e^{-\frac{\alpha_3}{R} x} \left( \xi_4 \cos \frac{\alpha_4}{R} x - \xi_3 \sin \frac{\alpha_4}{R} x \right) \Big\} \\
& \times \sin n\theta
\end{aligned} \quad (10.76b)$$

$$\begin{aligned}
W(x, \theta) = & \left\{ c_1 e^{\frac{\alpha_1}{R} x} + c_2 e^{-\frac{\alpha_1}{R} x} + c_3 \cos \frac{\alpha_2}{R} x + c_4 \sin \frac{\alpha_2}{R} x \right. \\
& + c_5 e^{\frac{\alpha_3}{R} x} \cos \frac{\alpha_4}{R} x + c_6 e^{\frac{\alpha_3}{R} x} \sin \frac{\alpha_4}{R} x + c_7 e^{-\frac{\alpha_3}{R} x} \cos \frac{\alpha_4}{R} x \\
& \left. + c_8 e^{-\frac{\alpha_3}{R} x} \sin \frac{\alpha_4}{R} x \right\} \cos n\theta
\end{aligned} \quad (10.76c)$$

式中系数

$$\xi_k = \frac{n[(-1)^{k+1} \alpha_k^2 (\nu^2 + \nu - 2) + (1 - \nu)n^2 - 2\Omega^2]}{(1 - \nu)\alpha_k^4 + (-1)^{k+1} \alpha_k^2 [2n^2(\nu - 1) + (3 - \nu)\Omega^2] + (n^2 - \Omega^2)[(1 - \nu)n^2 - 2\Omega^2]} \quad (k = 1, 2) \quad (10.77a)$$

$$\eta_k = \frac{(-1)^k \alpha_k [\alpha_k^2 \nu (1 - \nu) + (-1)^{k+1} 2\nu(\Omega^2 - n^2) + (-1)^{k+1} n^2(1 + \nu)]}{(1 - \nu)\alpha_k^4 + (-1)^{k+1} \alpha_k^2 [2n^2(\nu - 1) + (3 - \nu)\Omega^2] + (n^2 - \Omega^2)[(1 - \nu)n^2 - 2\Omega^2]} \quad (k = 1, 2) \quad (10.77b)$$

$$\xi_3 = \frac{R_1 Q_1 + R_2 Q_2}{Q_1^2 + Q_2^2}, \quad \xi_4 = \frac{R_2 Q_1 - R_1 Q_2}{Q_1^2 + Q_2^2} \quad (10.77c)$$

$$\eta_3 = \frac{S_1 Q_1 + S_2 Q_2}{Q_1^2 + Q_2^2}, \quad \eta_4 = \frac{S_2 Q_1 - S_1 Q_2}{Q_1^2 + Q_2^2} \quad (10.77d)$$

而

$$R_1 = n[(\alpha_3^2 - \alpha_4^2)(\nu^2 + \nu - 2) + (1 - \nu)n^2 - 2\Omega^2] \quad (10.77e)$$

$$R_2 = 2n\alpha_3\alpha_4(\nu^2 + \nu - 2) \quad (10.77f)$$

$$S_1 = -\alpha_3[\nu(1 - \nu)(\alpha_3^2 - 3\alpha_4^2) + 2\nu(\Omega^2 - n^2) + n^2(1 + \nu)] \quad (10.77g)$$

$$S_2 = -\alpha_4[\nu(1 - \nu)(3\alpha_3^2 - \alpha_4^2) + 2\nu(\Omega^2 - n^2) + n^2(1 + \nu)] \quad (10.77h)$$

$$Q_1 = (1 - \nu)[(\alpha_3^2 - \alpha_4^2)^2 - 4\alpha_3^2\alpha_4^2] + (\alpha_3^2 - \alpha_4^2)[2n^2(\nu - 1) + (3 - \nu)\Omega^2] + (n^2 - \Omega^2)[(1 - \nu)n^2 - 2\Omega^2] \quad (10.77i)$$

$$Q_2 = 4\alpha_3\alpha_4(\alpha_3^2 - \alpha_4^2)(1 - \nu) + 2\alpha_3\alpha_4[2n^2(\nu - 1) + (3 - \nu)\Omega^2] \quad (10.77j)$$

振型一般解 (10.76) 中八个待定常数  $c_1, c_2, c_3, c_5, c_6, c_7, c_8 = 0$ ,  $c_4 \neq 0$ ,  $\alpha_2 = \xi$ , 即得

$$x = 0, l, \quad U = 0 \text{ 或 } N_{,x}^* = 0 \quad (10.78a)$$

$$V = 0 \text{ 或 } N_{,x}^* + \frac{M_{,x\theta}^*}{R} = 0 \quad (10.78b)$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} = 0 \text{ 或 } M_{,x}^* = 0 \quad (10.78c)$$

$$W = 0 \text{ 或 } Q_{,x}^* + \frac{\partial M_{,x\theta}^*}{R \partial \theta} = 0 \quad (10.78d)$$

确定, 从而求得八元齐次线代方程组。由其系数行列式为零给出频率方程, 求得相应频率与振型。例如, 两端简支边界条件相应于  $c_1, c_2, c_3, c_5, c_6, c_7, c_8 = 0$ ,  $c_4 \neq 0$ ,  $\alpha_2 = \xi$ , 即得

原振型解 (10.34)。对于其它各种边界条件, 原则上均可按解 (10.76), (10.78) 进行计算, 但可以想象, 过程和结果是相当繁琐的。

为了简化起见, 可采用两端简支圆柱壳第二种简化解类似假定<sup>[288]</sup>; 轴向波长远大于周向波长, 即  $n^2 \gg \lambda^2$ 。在式 (10.72) 中引入了这一简化假定, 则  $\lambda$  方程 (10.73) 变为

$$(1-\nu)(1-\nu^2)\lambda^4 - 2\Omega^2 + [2 + (3-\nu)n^2 + 2kn^4]\Omega^2 - [(1-\nu)n^2(n^2+1) + (3-\nu)kn^6]\Omega + (1-\nu)kn^8 = 0 \quad (10.79)$$

可直接解出

$$\lambda_j = \pm \alpha, \pm i\alpha \quad (j=1, 2, 3, 4) \quad (10.80a)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{2\Omega^2 - [2 + (3-\nu)n^2 + 2kn^4]\Omega^2 + [(1-\nu)n^2(n^2+1) + (3-\nu)kn^6]\Omega - (1-\nu)kn^8}{(1-\nu)(1-\nu^2)}} \quad (10.80b)$$

从而给出振型一般解

$$U(x, \theta) = \left[ c_1 \eta e^{\frac{\alpha}{R}x} - c_2 \eta e^{-\frac{\alpha}{R}x} - c_3 \eta \sin \frac{\alpha}{R}x + c_4 \eta \cos \frac{\alpha}{R}x \right] \cos n\theta \quad (10.81a)$$

$$V(x, \theta) = \left[ c_1 \xi e^{\frac{\alpha}{R}x} + c_2 \xi e^{-\frac{\alpha}{R}x} + c_3 \xi \cos \frac{\alpha}{R}x + c_4 \xi \sin \frac{\alpha}{R}x \right] \sin n\theta \quad (10.81b)$$

$$W(x, \theta) = \left[ c_1 e^{\frac{\alpha}{R}x} + c_2 e^{-\frac{\alpha}{R}x} + c_3 \cos \frac{\alpha}{R}x + c_4 \sin \frac{\alpha}{R}x \right] \cos n\theta \quad (10.81c)$$

式中

$$\eta = \frac{\lambda[2\nu\Omega + (1-\nu)n^2]}{2\Omega^2 - (3-\nu)n^2\Omega + (1-\nu)n^4} \quad (10.82a)$$

$$\xi = \frac{-2n\Omega + (1-\nu)n^3}{2\Omega^2 - (3-\nu)n^2\Omega + (1-\nu)n^4} \quad (10.82b)$$

其中四个待定系数  $c_1, c_2, c_3, c_4$  由四个边界条件

$$x=0, L: \quad \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \text{ 或 } M_x^* = 0 \quad (10.83a)$$

$$W=0 \text{ 或 } Q_x^* + \frac{\partial M_{x\theta}^*}{R\partial\theta} = 0 \quad (10.83b)$$

确定, 同样可求取相应频率与振型。可以看出, 这一简化的引入使计算工作大为简化, 但由于方程降为四阶, 每端只能满足两个边界条件。当然这一解法只能适用于周向波数较多, 轴向波数较少的长圆柱壳。

## 二、梁函数组合法解

在平板振动分析中广泛应用梁函数组合法, 这是利用了二维板振型的一维分布和相应边界条件梁振型函数接近的力学特性。在圆柱壳振动分析中类似具有这样特性, 即圆柱壳振型的轴向分布接近于相应边界条件梁振型函数, 因此可用轴向梁函数和周向三角函数的组合来逼近圆柱壳的振型函数<sup>[287]</sup>。

一般可设有限长圆柱壳位移振型解为

$$U(x, \theta) = \sum_{m=1}^p A_m \frac{dX_m(x)}{d(x/L)} \cos n\theta \quad (10.84a)$$

$$V(x, \theta) = \sum_{n=1}^p B_n X_n(x) \sin n\theta \quad \left( \begin{matrix} n=0, 1, 2, 3 \dots \\ m=1, 2, 3 \dots \end{matrix} \right) \quad (10.84b)$$

$$W(x, \theta) = \sum_{n=1}^p C_n X_n(x) \cos n\theta \quad (10.84c)$$

式中  $X_n(x)$  为与轴向两端边界条件相应的梁  $m$  阶振型函数 (详见附录 I),  $A_n, B_n, C_n$  为待定系数。将振型解 (10.48) 代入变分方程 (10.9), (10.8) 进行变分, 对于固有振动, 可建立关于  $A_n, B_n, C_n$  的线代方程组, 从而求取频率与振型。

为了叙述简化起见, 下面仅列出在式 (10.84) 中只取一项 (第  $m$  项) 的结果 (相应于轴向有  $m$  个半波的近似解)。系数  $A_m, B_m, C_m$  将满足线代方程组

$$\begin{bmatrix} S_{11} - H_m \Omega^2 & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} - \Omega^2 & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} - \Omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_m \\ B_m \\ C_m \end{Bmatrix} = 0 \quad (10.85)$$

由系数行列式为零给出频率方程

$$\begin{aligned} & H_m \Omega^6 - (S_{11} + H_m S_{22} + H_m S_{33}) \Omega^4 \\ & - (S_{12}^2 + S_{13}^2 + H_m S_{23}^2 - H_m S_{22} S_{33} - S_{11} S_{33} - S_{11} S_{22}) \Omega^2 \\ & + (S_{12}^2 S_{33} + S_{23}^2 S_{11} + S_{13}^2 S_{22} - S_{11} S_{22} S_{33} + 2 S_{12} S_{23} S_{13}) = 0 \end{aligned} \quad (10.86)$$

式中

$$\begin{aligned} S_{11} &= \beta_m^2 + \frac{1}{2}(1+k)(1-\nu)n^2 H_m \\ S_{22} &= n^2 + \frac{1}{2}(1+3k)(1-\nu)\beta_m^2 H_m \\ S_{33} &= 1 + k[\beta_m^4 + (n^2-1)^2 - 2\nu n^2 \beta_m^2 E_m + 2(1-\nu)n^2 \beta_m^2 H_m] \\ S_{12} &= S_{21} = \nu n \beta_m E_m - \frac{1-\nu}{2} n \beta_m H_m \\ S_{13} &= S_{31} = \nu \beta_m E_m + k \beta_m \left[ \frac{1-\nu}{2} n^2 H_m - \beta_m^2 \right] \\ S_{23} &= S_{32} = n + k n \beta_m^2 \left[ \frac{3}{2}(1-\nu) H_m - \nu E_m \right] \end{aligned} \quad (10.87a)$$

而

$$\begin{aligned} \Omega^2 &= \frac{\rho(1-\nu^2)}{E} \omega^2 R^2 \\ \beta_m &= (\alpha L)_m \frac{R}{L} \\ k &= \frac{h^2}{12R^2} \\ E_m &= L \int_0^L \dot{X}_m' X_m dx \\ H_m &= L \int_0^L (X_m')^2 dx \end{aligned} \quad (10.87b)$$

其中相应各种边界条件的梁的第  $m$  阶频率系数  $(\alpha b)_m$  及梁函数积分值  $E_m, H_m$  见附录 I。

从式 (10.86) 解得  $\Omega_{im}$  ( $i=1, 2, 3$ ), 则有固有频率

$$\omega_{imn} = \frac{\Omega_{imn}}{R} \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}} \quad (10.88a)$$

相应各阶振型比

$$\left(\frac{A}{C}\right)_{imn} = \frac{(S_{33} - \Omega_{imn}^2)(S_{22} - \Omega_{imn}^2) - S_{23}^2}{S_{12}S_{23} - (S_{22} - \Omega_{imn}^2)S_{13}} \quad (10.88b)$$

$$\left(\frac{B}{C}\right)_{imn} = \frac{S_{12}(S_{33} - \Omega_{imn}^2) - S_{13}S_{23}}{(S_{22} - \Omega_{imn}^2)S_{13} - S_{23}S_{12}} \quad (10.88c)$$

按解(10.86), (10.87)求得的固定-固定, 固定-自由, 自由-自由圆柱壳的频率系数 $\Omega$ 值分别列于表10.5—表10.7。 $\Omega$ 是与 $n$ ,  $\frac{h}{R}$ ,  $\frac{R}{L}$ 以及通过相应边界条件梁频率系数 $(\alpha L)_m$ 而与 $m$ 有关。可以看出, 频率系数随 $\frac{h}{R}$ ,  $(\alpha L)_m$ ,  $\frac{R}{L}$ 增加而增加。但不同 $\frac{h}{R}$ ,  $(\alpha L)_m$ ,  $\frac{R}{L}$ 值, 按频率系数大小排列的 $n$ 值次序是在变化的<sup>[88]</sup>。

固定-固定圆柱壳频率系数 $\Omega$

表10.5

$n$	$\frac{h}{R}$	$(\alpha L)_m \frac{R}{L}$								
		0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
2	0	0	0.048	0.151	0.273	0.383	0.469	0.539	0.601	0.659
	0.01	0.007	0.051	0.152	0.274	0.384	0.469	0.540	0.602	0.661
	0.05	0.036	0.067	0.170	0.280	0.390	0.480	0.563	0.634	0.704
	0.075	0.057	0.085	0.181	0.291	0.401	0.496	0.589	0.676	0.761
	0.1	0.076	0.104	0.197	0.318	0.420	0.529	0.637	0.729	0.827
3	0	0	0.027	0.071	0.157	0.235	0.308	0.370	0.434	0.496
	0.01	0.024	0.034	0.074	0.160	0.237	0.310	0.372	0.436	0.497
	0.05	0.112	0.119	0.158	0.219	0.282	0.364	0.437	0.510	0.573
	0.075	0.168	0.172	0.210	0.269	0.333	0.419	0.501	0.581	0.671
	0.1	0.224	0.228	0.266	0.322	0.399	0.479	0.577	0.682	0.781
4	0	0	0.018	0.050	0.102	0.160	0.220	0.270	0.323	0.371
	0.01	0.047	0.051	0.064	0.114	0.171	0.231	0.281	0.333	0.381
	0.05	0.218	0.222	0.228	0.261	0.302	0.351	0.420	0.472	0.549
	0.075	0.321	0.328	0.337	0.366	0.419	0.471	0.539	0.621	0.701
	0.1	0.422	0.429	0.448	0.478	0.536	0.602	0.684	0.772	0.879
5	0	0	0.013	0.034	0.068	0.113	0.157	0.206	0.248	0.300
	0.01	0.070	0.073	0.079	0.101	0.133	0.176	0.225	0.267	0.319
	0.05	0.334	0.342	0.355	0.369	0.399	0.439	0.474	0.532	0.600
	0.075	0.513	0.524	0.534	0.556	0.580	0.635	0.681	0.758	0.829
	0.1	0.673	0.681	0.701	0.734	0.770	0.831	0.891	0.974	1.071

固定—自由圆柱壳频率系数 $\Omega$ 

表10.6

$n$	$\frac{h}{R}$	$(\alpha L) \cdot \frac{R}{L}$								
		0	0.025	0.50	0.075	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
2	0	0	0.014	0.052	0.107	0.173	0.233	0.304	0.372	0.433
	0.01	0.011	0.016	0.054	0.108	0.173	0.234	0.305	0.373	0.433
	0.05	0.038	0.040	0.070	0.122	0.178	0.248	0.316	0.381	0.450
	0.075	0.061	0.062	0.079	0.131	0.187	0.256	0.325	0.393	0.463
	0.1	0.077	0.078	0.098	0.141	0.196	0.266	0.334	0.405	0.474
3	0	0	0.009	0.023	0.051	0.083	0.128	0.177	0.224	0.274
	0.01	0.019	0.022	0.032	0.057	0.086	0.130	0.178	0.225	0.275
	0.05	0.111	0.112	0.113	0.126	0.149	0.177	0.223	0.268	0.316
	0.075	0.168	0.169	0.171	0.178	0.201	0.228	0.269	0.314	0.363
	0.1	0.222	0.223	0.225	0.232	0.253	0.277	0.322	0.363	0.411
4	0	0	0.007	0.019	0.028	0.059	0.082	0.122	0.154	0.188
	0.01	0.041	0.040	0.049	0.056	0.073	0.096	0.128	0.160	0.197
	0.05	0.218	0.219	0.220	0.224	0.228	0.249	0.278	0.291	0.323
	0.075	0.319	0.321	0.324	0.327	0.338	0.359	0.377	0.404	0.430
	0.1	0.421	0.423	0.426	0.431	0.450	0.472	0.491	0.522	0.553
5	0	0	0.008	0.013	0.021	0.032	0.054	0.076	0.103	0.126
	0.01	0.068	0.069	0.071	0.074	0.078	0.097	0.114	0.129	0.151
	0.05	0.334	0.336	0.340	0.348	0.353	0.368	0.376	0.391	0.412
	0.075	0.509	0.511	0.514	0.519	0.526	0.538	0.559	0.574	0.593
	0.1	0.675	0.677	0.679	0.686	0.700	0.718	0.731	0.761	0.778

对于进一步简化计算, 可以假定变形能中  $e_{\theta}^0 = e_{\theta}^z = 0$ , 则由式 (10.62a) 可以确定  $U$ ,  $V$ ,  $W$  间关系, 因而只剩下一个独立振型 (例如,  $W$ ), 振型解 (10.84) 也简化为 (只取一项)

$$U(x, \theta) = -C_m \frac{R}{n^2} X_m'(x) \cos n\theta \quad (10.89a)$$

$$V(x, \theta) = -C_m \frac{1}{n} X_m(x) \sin n\theta \quad (10.89b)$$

$$W(x, \theta) = C_m X_m(x) \cos n\theta \quad (10.89c)$$

采用上述类似过程, 则可建立关于  $\Omega^2$  的一次代数方程的频率方程, 直接解出频率系数

$$\Omega_{m,n}^2 = \frac{\beta_m^4 + kn^2 \beta_m^2 [n^2 \beta_m^2 - 2\nu n^2 (n^2 - 1) E_m + 2(1 - \nu)(n^2 - 1)^2 H_m] + kn^4 (n^2 - 1)^2}{\beta_m^2 H_m + n^2 (n^2 + 1)} \quad (10.90)$$

这一简化假定前提下给出公式 (10.90) 只能适用于  $n$  较大, 轴向波长 (或  $\frac{L}{mR}$ ) 较长的振

自由-自由圆柱壳频率系数 $\Omega$ 

表10.7

$(\alpha L) \frac{R}{L}$ $n \quad h/R$		0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
2	0	0	0.052	0.178	0.360	0.509	0.636	0.740
	0.01	0.007	0.053	0.180	0.361	0.510	0.636	0.741
	0.05	0.037	0.067	0.192	0.369	0.519	0.651	0.759
	0.075	0.056	0.082	0.207	0.379	0.531	0.664	0.777
	0.1	0.078	0.097	0.219	0.389	0.542	0.677	0.804
3	0	0	0.024	0.096	0.201	0.323	0.439	0.552
	0.01	0.024	0.033	0.098	0.202	0.324	0.440	0.553
	0.05	0.109	0.118	0.151	0.232	0.355	0.473	0.582
	0.075	0.164	0.171	0.200	0.277	0.391	0.518	0.628
	0.1	0.223	0.225	0.253	0.324	0.441	0.569	0.683
4	0	0	0.018	0.056	0.122	0.214	0.301	0.391
	0.01	0.042	0.048	0.076	0.132	0.217	0.304	0.396
	0.05	0.217	0.219	0.225	0.261	0.328	0.417	0.490
	0.075	0.319	0.322	0.329	0.370	0.429	0.514	0.591
	0.1	0.422	0.424	0.433	0.473	0.530	0.621	0.717
5	0	0	0.017	0.031	0.077	0.147	0.216	0.282
	0.01	0.071	0.073	0.077	0.115	0.167	0.231	0.300
	0.05	0.333	0.340	0.351	0.369	0.402	0.457	0.517
	0.075	0.512	0.517	0.524	0.549	0.582	0.632	0.702
	0.1	0.675	0.679	0.696	0.721	0.767	0.823	0.897

型, 正如 § 10.3 中指出那样, 这时由  $\varepsilon_0^0$ ,  $\varepsilon_2^0$  起作用的薄膜变形能才远小于弯曲变形能, 才可以忽略不计。这可以从表 10.8 所给出某些频率系数结果看出这一点<sup>[263]</sup>。

表 10.8 给出的是自由-自由圆柱壳分别按较精确的式 (10.86) 和简化的式 (10.90) 计算的频率系数。对于同一  $n$ ,  $\frac{L}{mR}$  值列在一起。可以看出, 对同一  $n$ , 则  $\frac{L}{mR}$  越大, 两者差别越小; 而对差不多大小的  $\frac{L}{mR}$ , 则大的  $n$  对应两者差别较小。另外, 简化计算结果之频率系数均偏高, 这是由于人为给予上述简化假定的约束的缘故。

自由-自由圆柱壳频率系数 $\Omega^2$ 比较 ( $\frac{h}{R} = 0.002, \nu = 0.3$ )

表10.8

$n = 2$						
$L/mR$	1.73	2.57	2.80	15.9	16.9	21.9
式 (10.90)	0.6223	0.4174	$1.180 \times 10^{-3}$	$1.120 \times 10^{-4}$	$1.118 \times 10^{-4}$	$1.107 \times 10^{-4}$
式 (10.86)	0.2266	0.2275	$1.036 \times 10^{-3}$	$1.025 \times 10^{-4}$	$1.037 \times 10^{-4}$	$1.006 \times 10^{-4}$

$L/mR$	1.70	2.37	3.30	4.8	6.9	22.3
式 (10.90)	$1.316 \times 10^{-2}$	$1.238 \times 10^{-2}$	$1.386 \times 10^{-4}$	$4.003 \times 10^{-4}$	$4.003 \times 10^{-4}$	$4.005 \times 10^{-4}$
式 (10.86)	$1.050 \times 10^{-2}$	$1.089 \times 10^{-2}$	$4.857 \times 10^{-4}$	$4.001 \times 10^{-4}$	$4.002 \times 10^{-4}$	$4.005 \times 10^{-4}$

### 三、简化理论解

在 § 10.4 中我们对圆柱壳振动的简化理论已经推导出关于振型  $W$  的独立八阶齐次方程 (10.49) 及振型一般解 (10.56), 在简化假定  $\frac{n^2}{R^2} \gg \lambda^2$  前提下, 导出了振型一般解 (10.59), 它应满足边界条件 (10.60)。这一组解可以类似单向板方法求取相应边界条件的频率与振型。下面举几个具体例子来加以说明。

**固定-固定圆柱壳** 振型一般解按式 (10.51), (10.59) 有

$$W(x, \theta) = W(x) \cos n\theta \quad (10.91a)$$

$$\bar{W}(x) = A \sinh \alpha x + B \cosh \alpha x + C \sin \alpha x + D \cos \alpha x \quad (10.91b)$$

边界条件按式 (10.60) 为

$$x=0, L: \quad W = \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \quad (10.91c)$$

显然, 解 (10.91b), 边界条件 (10.91c) 和固定-固定单向板的解 (3.5a), 边界条件 (3.9a) 完全一致, 那末可以直接引用其频率方程 (3.16a)

$$\cosh \alpha L \cos \alpha L - 1 = 0 \quad (10.92a)$$

而其频率系数  $(\alpha L)_m$  解 ( $m=1, 2, 3, \dots$ ) 可查附录 I 相应边界条件梁之  $(\alpha a)_m$  值。则按式 (10.57) 有固有圆频率解

$$\omega_{mn} = \sqrt{\frac{ER^2(\alpha L)_m^4}{\rho n^4 L^4} + \frac{Dn^4}{\rho h R^4}} \quad (10.93)$$

相应固有振型解按式 (3.18a), (10.51) 有

$$W_{mn}(x, \theta) = [(\cosh \alpha_m x - \cos \alpha_m x) - a_m (\sinh \alpha_m x - \sin \alpha_m x)] \cos n\theta \quad (10.92b)$$

其中,  $\alpha_m = \frac{(\alpha L)_m}{L}$ ,  $a_m$  查附录 I。

**固定-简支圆柱壳** 振型一般解仍为式 (10.91), 而边界条件按式 (10.59), (10.65d) 为

$$x=0: \quad W = \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \quad (10.94a)$$

$$W=L: \quad W=0 \quad (a)$$

$$M_x^* = -D \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{R^2 \partial \theta^2} \right) = -D \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 \quad (b)$$

即

$$W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 \quad (10.94b)$$

显然, 解 (10.91b), 边界条件 (10.94) 和固定-简支单向板的解 (3.5a), 边界条件 (3.9a), (3.9b) 完全一致, 同样可以直接引用其频率方程 (3.16c)



$$\operatorname{th} \alpha L - \operatorname{tg} \alpha L = 0 \quad (10.95a)$$

而频率系数  $(\alpha L)_m$  解 ( $m=1, 2, 3, \dots$ ) 可查附录 I 之相应边界条件梁之  $(\alpha a)_m$  值, 则其固有圆频率可按式 (10.93) 计算, 相应固有振型解按式 (3.18c), (10.51) 有

$$W_{mn}(x, \theta) = [(\operatorname{ch} \alpha_m x - \cos \alpha_m x) - a_m (\operatorname{sh} \alpha_m x - \sin \alpha_m x)] \cos n \theta \quad (10.95b)$$

其中,  $\alpha_m = \frac{(\alpha L)_m}{L}$ ,  $a_m$  查附录 I。

**简支-简支圆柱壳** 根据式 (10.94b), 其边界条件为

$$x=0, L: \quad W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 \quad (10.96)$$

在单向板振动分析中已知两端简支边界条件下的解为正弦函数, 因此可以直接确立振型

$$W_{mn}(x, \theta) = \sin \frac{m\pi}{L} x \cos n \theta \quad (10.97a)$$

在这种情况下, 可以不再引入  $\frac{n^2}{R^2} \gg \lambda^2$  简化假定, 而直接代入较为精确的简化理论原始方程 (10.49), 得到频率方程

$$D \left[ \left( \frac{n}{R} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \right]^4 + \frac{Eh}{R^2} \left( \frac{m\pi}{L} \right)^4 - \rho h \omega^2 \left[ \left( \frac{n}{R} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \right]^2 = 0 \quad (10.97b)$$

解得频率

$$\omega_{mn} = \sqrt{\frac{\left( \frac{m\pi R}{L} \right)^4}{\left[ \left( \frac{m\pi R}{L} \right)^2 + n^2 \right]^2} + \frac{\left( \frac{h}{R} \right)^2}{12(1-\nu^2)} \left[ \left( \frac{m\pi R}{L} \right)^2 + n^2 \right]^2} \sqrt{\frac{E}{\rho R^2}} \quad (10.97c)$$

如果, 在式 (10.93) 中直接引入两端简支梁的  $(\alpha L)_m = m\pi$ , 则就给出在式 (10.97b) 中相对  $n^2$  忽略  $\left( \frac{m\pi R}{L} \right)^2$  项的结果。这两种简化过程的结果是一致的。

解 (10.93) 或解 (10.97c) 可以明显看出是由两部分组成: 第一部分由薄膜刚度引起; 第二部份由弯曲刚度引起, 当  $n$  及  $\frac{m\pi R}{L}$  增加时弯曲部分逐渐处于主导地位 (这一点在圆柱壳经典理论分析中已指出过)。当然, 对于  $n=0$ , 式 (10.93) 是不成立的, 因为这违反了  $\frac{n^2}{R^2} \gg \lambda^2$  前提。

可以看到, 有限圆柱壳解 (10.92), (10.93), (10.95), (10.97) 等比前述各种解法简便、明瞭得多, 而且可以直接引用大家比较熟悉的梁函数有关结果。但应注意, 这是在  $\frac{n^2}{R^2} \gg \lambda^2$  前提下简化理论结果, 它只适用于轴向波长远大于周向波长的薄壳固有振动分析。(当然采用两端简支圆柱壳解 (10.97) 则不需要  $\frac{n^2}{R^2} \gg \lambda^2$  的前提)

## § 10.6 开口圆柱壳

开口圆柱壳沿周向不是封闭的, 因此圆柱壳具有四个边界: 端部两个弧边和侧边两个直边 (图10.4)。开口柱壳块具有一般平板承载功能, 而又具有比平板更大承载能力, 因此在工程上有广泛应用 [274]。

开口圆柱壳的基本方程和闭口圆柱壳一样, 对于经典理论为式 (10.5), 对于简化理论为式 (10.66)。其可能的四边边界条件为

$$x=0, L: u=0 \text{ 或 } N_x=0 \quad (10.98a)$$

$$v=0 \text{ 或 } N_{x\theta} + \frac{M_{x\theta}}{R} = 0 \quad (10.98b)$$

$$\theta_x=0 \text{ 或 } M_x=0 \quad (10.98c)$$

$$w=0 \text{ 或 } Q_x + \frac{\partial M_{x\theta}}{R \partial \theta} = 0 \quad (10.98d)$$

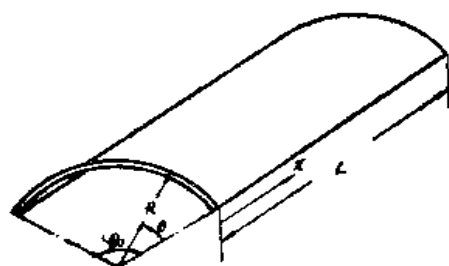


图 10.4

$$\theta=0, \theta_0: v=0 \text{ 或 } N_\theta=0 \quad (10.99a)$$

$$u=0 \text{ 或 } N_{x\theta}=0 \quad (10.99b)$$

$$\theta_\theta=0 \text{ 或 } M_\theta=0 \quad (10.99c)$$

$$w=0 \text{ 或 } Q_\theta + \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} = 0 \quad (10.99d)$$

前面在闭合圆柱壳讨论中已提到过, 就边界条件 (10.98) 而言已有一百多种组合可能。现对于开口圆柱壳的边界条件 (10.98), (10.99), 则有一万多种可能组合。当然最常见的是直边或弧边薄膜简支 (简称简支) 边界。

当张角  $\theta_0$  (相对  $2\pi$ ) 相当小时, 开口圆柱壳将作为“扁壳”的一种来处理, 详情将专门在 § 12.4 中加以讨论。因此本节中涉及的开口圆柱壳均是指  $\theta_0$  较大的深壳。

### 一、周边简支开口圆柱壳

周边简支的开口圆柱壳振型方程是式 (10.12), 按式 (10.98), (10.99) 振型边界条件为

$$V(0, \theta) = W(0, \theta) = N_x^*(0, \theta) = M_x^*(0, \theta) = 0 \quad (10.100a)$$

$$V(L, \theta) = W(L, \theta) = N_x^*(L, \theta) = M_x^*(L, \theta) = 0 \quad (10.100b)$$

$$U(x, 0) = W(x, 0) = N_\theta^*(x, 0) = M_\theta^*(x, 0) = 0 \quad (10.100c)$$

$$U(x, \theta_0) = W(x, \theta_0) = N_\theta^*(x, \theta_0) = M_\theta^*(x, \theta_0) = 0 \quad (10.100d)$$

设满足全部边界条件 (10.100) 的位移振型解

$$U(x, \theta) = A \cos \frac{m\pi}{L} x \sin \frac{n\pi}{\theta_0} \theta \quad (10.101a)$$

$$V(x, \theta) = B \sin \frac{m\pi}{L} x \cos \frac{n\pi}{\theta_0} \theta \quad (m, n=1, 2, 3, \dots) \quad (10.101b)$$

$$W(x, \theta) = C \sin \frac{m\pi}{L} x \sin \frac{n\pi}{\theta_0} \theta \quad (10.101c)$$

式中  $m, n$  分别为位移振型沿轴向、周向半波数。代入基本方程 (10.12) 有

$$(\Omega^2 - S_{11})A + S_{12}B + S_{13}C = 0 \quad (10.102a)$$

$$S_{21}A + (\Omega^2 - S_{22})B + S_{23}C = 0 \quad (10.102b)$$

$$S_{31}A + S_{32}B + (\Omega^2 - S_{33})C = 0 \quad (10.102c)$$

式中

$$S_{11} = \left( \frac{m\pi R}{L} \right)^2 + \frac{(1-\nu)}{2} \left( \frac{n\pi}{\theta_0} \right)^2 \quad (10.103a)$$

$$S_{12} = S_{21} = -\frac{(1+\nu)}{2} \left( \frac{m\pi R}{L} \right) \left( \frac{n\pi}{\theta_0} \right) \quad (10.103b)$$

$$S_{13} = S_{31} = \nu \left( \frac{m\pi R}{L} \right) \quad (10.103c)$$

$$S_{22} = (1+k) \left[ \frac{(1-\nu)}{2} \left( \frac{m\pi R}{L} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{\theta_0} \right)^2 \right] \quad (10.103d)$$

$$S_{23} = S_{32} = \left( \frac{n\pi}{\theta_0} \right) \left\{ 1 + k \left[ \left( \frac{m\pi R}{L} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{\theta_0} \right)^2 \right] \right\} \quad (10.103e)$$

$$S_{33} = 1 + k \left[ \left( \frac{m\pi R}{L} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{\theta_0} \right)^2 \right] \quad (10.103f)$$

可以注意到, 方程和两端简支闭合圆柱壳方程 (10.28) 完全相同, 只是  $S_{ij}(i, j=1, 2, 3)$  的内容有所改变。因此进一步求取频率方程、频率系数和固有频率值过程完全同式 (10.30), (10.31), (10.32)。而相应振型应为

$$U_{i,m,n} = \bar{A}_{i,m,n} \cos \frac{m\pi}{L} x \sin \frac{n\pi}{\theta_0} \theta \quad (10.104a)$$

$$V_{i,m,n} = \bar{B}_{i,m,n} \sin \frac{m\pi}{L} x \cos \frac{n\pi}{\theta_0} \theta \quad (10.104b)$$

$$W_{i,m,n} = \sin \frac{m\pi}{L} x \sin \frac{n\pi}{\theta_0} \theta \quad (10.104c)$$

式中振型系数  $\bar{A}_{i,m,n}, \bar{B}_{i,m,n}$  见式 (10.33), 而相应应变、内力振型表达式见式 (10.35), 只是其中  $n$  改为  $\frac{n\pi}{\theta_0}$ 。

周边简支开口圆柱壳也可采用两端简支闭合圆柱壳第一种简化方法, 即用式 (10.43) 求解固有频率, 式中  $S_{ij}(i, j=1, 2, 3)$  仍为式 (10.103)。

表10.9, 表 10.10 分别列出不同  $\frac{h}{R}$  情况下, 按式 (10.30) 及按式 (10.43) 计算的周边简支开口圆柱壳低频 ( $i=1$ ) 系数  $\Omega$  值。可以看出, 随  $\frac{n\pi}{\theta_0}$  增大,  $\frac{L}{mR}$  减小, 两者差别减小<sup>[154]</sup>, 这正如在 § 10.3 闭合圆柱壳分析中指出那样。

周边简支开口圆柱壳频率系数  $\Omega(i=1, \nu=0.3, \frac{h}{R}=0.05)$

表10.9

$L/mR$		0.1	0.25	1	4	20
$\frac{n\pi}{\theta_0}$	公 式					
$\frac{1}{3}$	(10.30)	14.265	2.4666	0.94552	0.42214	0.051597
	(10.43)	14.275	2.4681	0.95356	0.80835	0.17388
$\frac{1}{2}$	(10.30)	14.267	2.4681	0.92979	0.38134	0.037123
	(10.43)	14.277	2.4696	0.94099	0.67885	0.086423
$\frac{2}{3}$	(10.30)	14.270	2.4701	0.90911	0.33768	0.027536
	(10.43)	14.280	2.4717	0.92401	0.55448	0.050829

还应指出一点是, 当  $\theta_0 = \frac{\pi}{N}$  ( $N=1, 2, 3, \dots$ ) 时, 所有结果和闭合圆柱壳  $n=1, 2, 3, \dots$

相应结果完全相同, 只不过振型表达式坐标差个相位; 当  $\theta_0 \neq \frac{\pi}{N}$  时, 也可用闭合圆柱壳

$n=1, 2, 3, \dots$  结果 (表10.3, 表10.4) 插入求取近似值。

周边简支开口圆柱壳频率系数  $\Omega \left( i=1, \nu=0.3, \frac{h}{R}=0.002 \right)$

表10.10

$\frac{n\pi}{\theta_0}$ 公 式		$L/mR$	0.1	0.25	1	4	20
$\frac{1}{3}$	(10.30)		1.1110	0.95732	0.93574	0.42217	0.051430
	(10.43)		1.1110	0.95761	0.94334	0.80834	0.17334
$\frac{1}{2}$	(10.30)		1.1109	0.95649	0.91971	0.38137	0.036806
	(10.43)		1.110	0.95678	0.93039	0.67882	0.085694
$\frac{2}{3}$	(10.30)		1.1108	0.95532	0.89856	0.33772	0.027181
	(10.43)		1.1108	0.95563	0.91285	0.55445	0.050175

## 二、直边简支开口圆柱壳

对于两直线侧边 ( $\theta=0, \theta_0$ ) 简支, 而端部弧边 ( $x=0, L$ ) 为其它边界条件的开口圆柱壳, 其振型方程仍为式 (10.12), 而振型边界条件在侧边为式 (10.100c), (10.100d), 在端部按式 (10.98) 确定。

这类开口圆柱壳求解方法完全类同 § 10.5 第一小节 “有限长圆柱壳振动的一般解”, 只要设振型解

$$U(x, \theta) = \bar{U}(x) \sin \frac{n\pi}{\theta_0} \theta \quad (10.105a)$$

$$V(x, \theta) = \bar{V}(x) \cos \frac{n\pi}{\theta_0} \theta \quad (10.105b)$$

$$W(x, \theta) = \bar{W}(x) \sin \frac{n\pi}{\theta_0} \theta \quad (10.105c)$$

因而可求得类似于式 (10.73) 的  $\lambda$  方程, 式 (10.76) 的振型一般解, 从而根据式 (10.78) 的边界条件, 建立八元齐次线代方程组, 求出相应频率与振型。所不同的只是由于原解

(10.69) 中  $n$  改为  $\frac{n\pi}{\theta_0}$ , 正弦与余弦函数对换而引起系数表达式 (10.74), (10.77) 作相应变化。这里就不再重复列出。

对于张角  $\theta_0 = \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \dots$  等开口圆柱壳的解实际上完全可以取自该节相应边界条件闭合圆柱壳  $n=k, 2k, 3k, \dots$  ( $k=1, 2, 3, \dots$ ) 相应结果, 具体数值可查阅表 10.5, 表 10.6, 表 10.7 等。

## 三、弧边简支开口圆柱壳

对于端部两弧边 ( $x=0, L$ ) 简支, 而直线侧边 ( $\theta=0, \theta_0$ ) 为其它边界条件的开口圆柱壳, 其振型方程仍为式 (10.12), 而振型边界条件在端部为式 (10.100a)(10.100b), 在侧边按式 (10.99) 确定。

对于这类开口圆柱壳可设振型解

$$U(x, \theta) = \bar{U}(\theta) \cos \frac{m\pi}{L} x \quad (10.106a)$$

$$V(x, \theta) = \bar{V}(\theta) \sin \frac{m\pi}{L} x \quad (10.106b)$$

$$W(x, \theta) = \bar{W}(\theta) \sin \frac{m\pi}{L} x \quad (10.106c)$$

为了简便起见, 下面代入简化理论振动方程 (10.66) 相应的振型方程 (对于其它理论, 推导过程类同), 可得关于  $\bar{U}(\theta)$ ,  $\bar{V}(\theta)$ ,  $\bar{W}(\theta)$  的联立常微分方程组。然后设解

$$\bar{U}(\theta) = A e^{\frac{n\pi}{\theta_0} \theta}, \quad \bar{V}(\theta) = B e^{\frac{n\pi}{\theta_0} \theta}, \quad \bar{W}(\theta) = C e^{\frac{n\pi}{\theta_0} \theta} \quad (10.107)$$

代入可得系数  $A$ ,  $B$ ,  $C$  满足的线代方程组

$$\begin{pmatrix} \left[ \frac{\rho h}{K} \omega^2 - \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 + \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{n\pi}{R\theta_0} \right)^2 \right] & \frac{1+\nu}{2} \left( \frac{m\pi}{L} \right) \left( \frac{n\pi}{R\theta_0} \right) & \\ \frac{1+\nu}{2} \left( \frac{m\pi}{L} \right) \left( \frac{n\pi}{R\theta_0} \right) & \left[ \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 - \left( \frac{n\pi}{R\theta_0} \right)^2 - \frac{\rho h}{K} \omega^2 \right] & \\ \frac{\nu}{R} \left( \frac{m\pi}{L} \right) & -\frac{1}{R} \left( \frac{n\pi}{R\theta_0} \right) & \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = 0 \quad (10.108)$$

为得非零解, 由其系数行列式为零得关于  $n$  的八次代数方程, 求得八个  $n$  根。按常微分方程组理论, 给出类似式 (10.76) 的含有八个待定系数的振型一般解, 由侧边 ( $\theta = 0, \theta_0$ ) 八个边界条件 (10.99) 确定这八个待定系数所满足的齐次线代方程组。由其系数行列式为零, 给出频率方程及相应频率与振型。这些过程中有许多地方和上面所述内容类似, 这里就不再详细列出。

#### 四、其它边界开口圆柱壳

在 § 10.5 曾用梁函数-三角函数组合法求解各种边界闭合圆柱壳。同样方法可用来求解两个直边和两个弧边为各种边界条件组合的开口圆柱壳。不过原来沿周向的周期三角函数现改用与直线边边界条件相应的圆拱函数来代替<sup>[89]</sup>。

对于各种边界条件的开口圆柱壳均可设振型解

$$U(x, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} X'_m(x) \Theta_n(\theta) \quad (10.109a)$$

$$V(x, \theta) = \sum_{m=1}^p \sum_{n=1}^q B_{mn} X_m(x) \Theta'_n(\theta) \quad (10.109b)$$

$$W(x, \theta) = \sum_{m=1}^p \sum_{n=1}^q C_{mn} X_m(x) \Theta_n(\theta) \quad (10.109c)$$

式中  $X_m(x)$  为与轴向两端弧边边界条件相应的梁  $m$  阶振型函数, 详见附录 I,  $\Theta_n(\theta)$  为与周向两端直边边界条件相应的拱  $n$  阶振型函数, 详见一般结构动力学书籍或 [88],  $A_{mn}$ ,  $B_{mn}$ ,  $C_{mn}$  为待定系数。将振型解 (10.109) 代入变分方程 (10.9) (10.8) 进行变分。对于固有振动, 可建立关于  $A_{mn}$ ,  $B_{mn}$ ,  $C_{mn}$  的线代方程组, 从而求取频率与振型。

为了叙述简化起见, 下面仅列出在式 (10.109) 中只取第  $(m, n)$  项一项的结果 (相当于轴向有  $m$  个半波, 周向有  $n$  个半波振型的近似解)。则系数  $A_m$ ,  $B_m$ ,  $C_m$  满足的线代方程组为

$$\begin{pmatrix} S_{11} - H_m R_n \Omega^2 & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} - K_n \Omega^2 & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} - R_n \Omega^2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} A_{mn} \\ B_{mn} \\ C_{mn} \end{Bmatrix} = 0 \quad (10.110)$$

由其系数行列式为零可给出频率方程。式中

$$\begin{aligned} S_{11} &= \beta_m^2 R_n + \frac{1-\nu}{2} \beta_m^2 H_m K_n \\ S_{22} &= \beta_n^2 G_n + \frac{1-\nu}{2} \beta_n^2 H_m K_n + k[\beta_n^2 G_n + 2(1-\nu) \beta_n^2 H_m K_n] \\ S_{33} &= R_n + k[\beta_m^4 R_n + 2\nu \beta_m^2 E_m + \beta_m^2 F_n + 2(1-\nu) \beta_m^2 \beta_n^2 H_m K_n + \beta_n^4 G_n] \\ S_{12} &= S_{21} = \beta_m \beta_n \left[ \frac{1-\nu}{2} H_m K_n + \nu E_m F_n \right] \\ S_{13} &= S_{31} = -\nu \beta_m E_m R_n \\ S_{23} &= S_{32} = \beta_n \{ -F_n + k[\beta_n^2 G_n + 2(1-\nu) \beta_n^2 H_m K_n + \nu \beta_m^2 E_m F_n] \} \end{aligned} \quad (10.111a)$$

而

$$\begin{aligned} \Omega^2 &= \frac{\rho(1-\nu^2)}{E} \omega^2 R^2, \quad k = \frac{h^2}{12R^2}; \quad \beta_m = (\alpha a)_m \frac{R}{L}, \quad \beta_n = \frac{(\alpha b)_n}{\theta_0} \\ E_m &= \frac{L}{(\alpha a)_m^2} \int_0^L X_m'' X_m dx, \quad H_m = \frac{L}{(\alpha a)_m^2} \int_0^L (X_m')^2 dx \\ F_n &= \frac{L}{(\alpha b)_n^2} \int_0^{R\theta_0} \Theta_n'' \Theta_n R d\theta, \quad K_n = \frac{L}{(\alpha b)_n^2} \int_0^{R\theta_0} (\Theta_n')^2 R d\theta \\ G_n &= \frac{L^3}{(\alpha b)_n^4} \int_0^{R\theta_0} (\Theta_n'')^2 R d\theta, \quad R_n = \frac{1}{L} \int_0^{R\theta_0} \Theta_n^2 R d\theta \end{aligned} \quad (10.111b)$$

其中相应各种边界条件的梁的第  $m$  阶频率系数  $(\alpha a)_m$  及梁函数积分值  $L \int_0^L X_m'' X_m dx$  及  $L \int_0^L (X_m')^2 dx$  见附录 I; 相应各种边界条件的拱的第  $n$  阶频率系数  $(\alpha b)_n$  及拱函数积分值  $F_n, K_n, G_n, R_n$  分别见表 10.11 及表 10.12 或 [88]。而固定-固定, 自由-自由拱的反对称各阶频率系数可分别作为固定-简支, 自由-简支拱的各阶频率系数。

圆拱频率系数( $ab$ )。

表10.11

边界 $\theta_0 \quad n$	固定—固定					自由—自由					固定—自由				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
0	4.73	7.45	11.0	14.1	17.3	4.73	7.85	11.0	14.1	17.3	1.88	4.69	7.85	11.0	14.1
$\frac{\pi}{2}$	4.18	7.47	10.7	13.9	17.1	4.63	7.69	10.8	14.0	17.2	2.21	4.54	7.71	10.9	14.0
$\pi$	3.16	6.52	10.0	13.3	16.7	4.34	7.04	10.3	13.6	16.8	2.72	3.91	7.13	10.5	13.7

圆拱函数积分值

表10.12

边界 $\theta, n$		固定—固定					自由—自由					固定—自由			
		1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	2	3	4	5
$F_n$	0	-0.543	-0.762	-0.821	-0.854	-0.880	0.548	0.751	0.862	0.817	0.888	-0.601	-0.752	-0.861	-0.823
	$\frac{1}{4}\pi$	-0.572	-0.770	-0.829	-0.862	-0.887	0.562	0.771	0.870	0.826	0.891	-0.629	-0.771	-0.859	-0.829
	$\frac{1}{2}\pi$	-0.627	-0.787	-0.838	-0.873	-0.896	0.631	0.784	0.875	0.837	0.897	-0.712	-0.782	-0.862	-0.836
	$\frac{3}{4}\pi$	-0.797	-0.837	-0.859	-0.887	-0.906	0.801	0.832	0.887	0.868	0.905	-0.939	-0.828	-0.871	-0.860
	$\pi$	-1.29	-0.928	-0.901	-0.910	-0.919	1.30	0.923	0.921	0.901	0.919	-1.79	-0.931	-0.901	-0.896
$K_n$	0	0.542	0.737	0.822	0.857	0.880	2.21	1.76	1.56	1.43	1.34	2.34	1.75	1.54	1.40
	$\frac{1}{4}\pi$	0.572	0.764	0.832	0.862	0.885	2.30	1.79	1.56	1.44	1.35	2.42	1.78	1.55	1.41
	$\frac{1}{2}\pi$	0.631	0.782	0.843	0.871	0.893	2.47	1.84	1.58	1.45	1.36	2.66	1.85	1.58	1.43
	$\frac{3}{4}\pi$	0.802	0.828	0.862	0.889	0.903	2.83	1.94	1.63	1.47	1.38	3.27	1.94	1.64	1.45
	$\pi$	1.32	0.914	0.918	0.921	0.923	3.74	2.10	1.68	1.50	1.40	4.03	2.14	1.68	1.49
$G_n$	0	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	$\frac{1}{4}\pi$	1.12	1.05	1.04	1.02	1.01	1.13	1.06	1.05	1.03	1.02	1.08	1.06	1.05	1.03
	$\frac{1}{2}\pi$	1.33	1.11	1.08	1.04	1.03	1.34	1.19	1.17	1.15	1.14	1.36	1.13	1.07	1.04
	$\frac{3}{4}\pi$	2.22	1.27	1.14	1.08	1.06	2.22	1.29	1.22	1.18	1.16	2.38	1.29	1.13	1.07
	$\pi$	5.89	1.61	1.25	1.15	1.12	5.73	1.71	1.29	1.21	1.19	4.42	1.66	1.26	1.14
$R_n$	0	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	$\frac{1}{4}\pi$	0.972	0.996	0.997	0.998	0.999	0.973	0.991	0.994	0.995	0.996	0.977	0.989	0.991	0.993
	$\frac{1}{2}\pi$	0.944	0.969	0.976	0.978	0.984	0.946	0.974	0.979	0.985	0.987	0.939	0.972	0.979	0.982
	$\frac{3}{4}\pi$	0.913	0.931	0.956	0.969	0.977	0.921	0.919	0.966	0.977	0.982	0.881	0.932	0.962	0.974
	$\pi$	0.915	0.871	0.934	0.976	0.970	0.926	0.923	0.933	0.964	0.975	0.827	0.890	0.928	0.957

## 五、简化理论解

在 § 10.4 中我们对圆柱壳振动的简化理论曾推导出关于振型  $W$  的独立八阶齐次方程

(10.49), 这一方程同样适用于开口圆柱壳。例如, 对于周边简支圆柱壳可直接设其满足振型边界条件 (10.100) 的第  $(m, n)$  阶振型为

$$W_{mn}(x, \theta) = \sin \frac{m\pi}{L} x \cos \frac{n\pi}{\theta_0} \theta \quad (10.112a)$$

代入振型方程 (10.49) 得频率方程

$$D \left[ \left( \frac{n\pi}{R\theta_0} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \right]^4 + \frac{Eh}{R^2} \left( \frac{m\pi}{L} \right)^4 - \rho h \omega^2 \left[ \left( \frac{n\pi}{R\theta_0} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \right]^2 = 0 \quad (10.112b)$$

解得频率

$$\omega_{mn} = \sqrt{\frac{\left( \frac{m\pi R}{L} \right)^4}{\left[ \left( \frac{m\pi R}{L} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{\theta_0} \right)^2 \right]^2} + \frac{\left( \frac{h}{R} \right)^2}{12(1-\nu^2) \left[ \left( \frac{m\pi R}{L} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{\theta_0} \right)^2 \right]^2} \sqrt{\frac{E}{\rho R^2}}} \quad (10.112c)$$

这一结果清楚地直接表明了圆柱壳固有频率与材料参数  $E, \rho, \nu$ , 与特征尺度  $R, \theta_0$ , 与相对几何参数  $\frac{R}{L}, \frac{h}{R}, \frac{\pi}{\theta_0}$  以及阶次  $(m, n)$  的内在联系, 是壳体固有频率特性的一个典型结果。当然实际使用时应注意简化理论的前提与假设 (§9.11)。

对于其它边界条件, 可利用上述各小节振型表达式和方程 (10.49) 进行求解, 可使问题大为简化。

## § 10.7 其它截面形状的柱壳

以上各节是讨论截面为圆形的柱壳, 其横截面上各点曲率半径是一常量, 是柱壳中最常见的一种。在一般情况下, 横断面为非圆形, 则其横截面上各点曲率半径不是一常量, 因而导致数学上变系数偏微分方程组 [36][147][302]。

对于一般性柱壳 (图10.5) 的中面建立如下坐标: 沿母线方向的轴向坐标  $x$  及用弧长表示的周向坐标  $s$ , 周向坐标也可以用中面法线与某坐标平面夹角  $\theta$  表示。它们之间可通过周

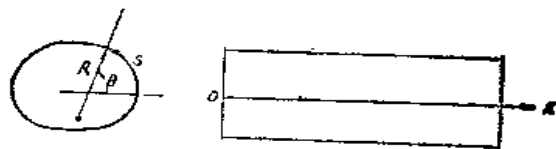


图 10.5

向曲率半径  $R(\theta) = R(s)$  建立联系:

$$ds = R d\theta \quad (10.113a)$$

因此一般性柱壳的基本参数可有两种:

$$\alpha = x, \beta = s, A = 1, B = 1, R_\alpha = \infty, R_\beta = R(s) \quad (10.113b)$$

或

$$\alpha = x, \beta = \theta, A = 1, B = R(\theta), R_\alpha = \infty, R_\beta = R(\theta) \quad (10.113c)$$

若将基本关系式 (10.113b) 代入第九章一般正交曲线坐标系的基本关系式中可以写出中面应变分量

$$\epsilon_x^0 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_s^0 = \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{w}{R}, \quad \epsilon_{xs}^0 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial s} \quad (10.114a)$$

$$\chi_x = \frac{\partial \theta_x}{\partial x}, \quad \chi_s = \frac{\partial \theta_s}{\partial s}, \quad \chi_{xs} = \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_s}{\partial s} \quad (10.114b)$$



$$\theta_x = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \theta_s = \frac{v}{R} - \frac{\partial w}{\partial s}$$

动平衡方程

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xs}}{\partial s} + q_x = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (10.115a)$$

$$\frac{\partial N_{xs}}{\partial x} + \frac{\partial N_s}{\partial s} + \frac{Q_s}{R} + q_s = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (10.115b)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_s}{\partial s} - \frac{N_s}{R} + q_x = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (10.115c)$$

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xs}}{\partial s} \quad (10.115d)$$

$$Q_s = \frac{\partial M_{xs}}{\partial x} + \frac{\partial M_s}{\partial s} \quad (10.115e)$$

而内力-中面应变关系式仍为式 (10.3) 各式。

将这些关系式进行 (和圆柱壳一样) 综合, 即可建立以中面位移分量表示的柱壳振动的基本方程组:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial s} + \nu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{w}{R} \right) = \frac{1}{K} \left( \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - q_x \right) \quad (10.116a)$$

$$\begin{aligned} \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial s} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{w}{R} \right) + k \left[ \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + R \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left( \frac{v}{R} \right) - R \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial s} \right. \\ \left. - R \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} \right] = \frac{1}{K} \left( \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - q_s \right) \end{aligned} \quad (10.116b)$$

$$\begin{aligned} - \frac{12}{h^2} \left\{ \frac{\nu}{R} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{R \partial s} + \frac{w}{R^2} - k R^2 \left[ \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial s} \left( \frac{v}{R} \right) + \frac{\partial^3}{\partial s^3} \left( \frac{v}{R} \right) \right] \right\} + \nabla^2 \nabla^2 w \\ = \frac{1}{L} \left( q_x - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \end{aligned} \quad (10.116c)$$

式中

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial s^2}, \quad k = \frac{h^2}{12R^2} \quad (10.117)$$

边界条件根据一般表达式 (10.41), (10.42) 代入柱壳基本参数 (10.113), 对齐次边界有

$$x = x_0: \quad u = 0 \text{ 或 } N_x = 0 \quad (10.118a)$$

$$v = 0 \text{ 或 } N_{xs} + \frac{M_{xs}}{R} = 0 \quad (10.118b)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \text{ 或 } M_x = 0 \quad (10.118c)$$

$$w = 0 \text{ 或 } Q_x + \frac{\partial M_{xs}}{\partial s} = 0 \quad (10.118d)$$

$$s = s_0: \quad v = 0 \text{ 或 } N_s = 0 \quad (10.118e)$$

$$u = 0 \text{ 或 } N_{xs} = 0 \quad (10.118f)$$

$$\frac{v}{R} - \frac{\partial w}{\partial s} = 0 \text{ 或 } M_s = 0 \quad (10.118g)$$

$$w = 0 \text{ 或 } Q_s + \frac{\partial M_{xs}}{\partial x} = 0 \quad (10.118h)$$

方程 (10.116) 也可从圆柱壳方程 (10.5) 代入一般关系 (10.113 a) 直接求得。由于非圆形柱壳的  $R = R(s)$ ，这将导致基本方程 (10.116) 为变系数偏微分方程组，因此采用精确分析方法将是十分困难的，而在实际分析中大多采用近似解法，其中包括各种变分解法与数值解法。详情可参见第七章、第十四章。

当非圆形柱壳的截面形状偏离圆形不大时，则可采用以截面非圆偏离度为摄动参数的摄动解法<sup>[138]</sup>，可收到比较满意效果。例如，椭圆形柱壳（图2.6）的中截面形状方程可表达为

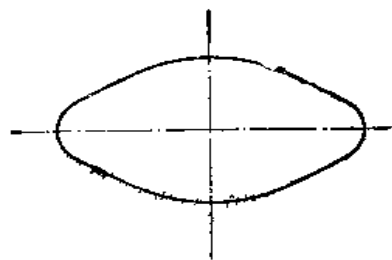


图 10.6

$$x^2 + \left(\frac{y}{1-\varepsilon}\right)^2 = R^2 \quad (10.119 a)$$

其中  $\varepsilon$  为偏离度。若  $\varepsilon = 0$ ，则式 (10.119 a) 即为圆方程； $\varepsilon$  越大，则椭圆的两个半轴比越大。对于以两垂直轴为对称的一般性卵形柱壳（图10.6），其中截面的曲率半径可表达为

$$R(s) = \frac{R_0}{1 + \varepsilon \cos\left(\frac{2s}{R_0}\right)} \quad (10.119 b)$$

其中， $\varepsilon$  为偏离度， $R_0 = \frac{s_0}{2\pi}$  为平均半径， $s_0$  为中截面整个周长。 $R(s)$  满足在  $s = 0, \frac{\pi R_0}{2}, \pi R_0, \frac{3}{2}\pi R_0, 2\pi R_0, \dots$  等处对称。当  $\varepsilon = 0$ ，则  $R(s) = R_0$ ，即为圆的曲率半径； $\varepsilon$  越大，则卵形形状越偏离圆形。

例如，对于两端简支柱壳可设振型解

$$U(x, s) = A \cos \frac{m\pi}{L} x \cos \frac{n}{R_0} s \quad (10.120 a)$$

$$V(x, s) = B \sin \frac{m\pi}{L} x \sin \frac{n}{R_0} s \quad (m, n = 1, 2, 3, \dots) \quad (10.120 b)$$

$$W(x, s) = C \sin \frac{m\pi}{L} x \cos \frac{n}{R_0} s \quad (10.120 c)$$

满足以  $s = s_0$  为周期的条件。进一步设固有频率解

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \omega_1^2 \varepsilon + \omega_2^2 \varepsilon^2 + \dots \quad (10.121)$$

若将式 (10.119)，(10.120)，(10.121) 等一起代入基本方程 (10.116)，比较  $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \dots$  的系数，可分别求得  $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots$  值（参见 §5.1）。其中  $\omega_0$  即为半径为  $R_0$  的圆柱壳固有频率，其它各项为固有频率对它的偏离值，与偏离度  $\varepsilon$  有关。具体数字计算表明，非圆形柱壳固有频率比半径与其平均曲率半径相等的圆柱壳高；偏离度越大，偏差越大；一般低频组偏差较高频组大。

## 第十一章 旋转壳的振动

工程上最常见的一类壳体是旋转壳，上一章所讨论的圆柱壳也是其特殊的一种。本章将探讨旋转壳的一般性情况，并介绍两种常用的旋转壳：锥壳与球壳的振动。

### § 11.1 旋转壳振动的基本方程

一根平面曲线绕位于同一平面内的一根直线旋转形成一旋转面，以此旋转面为中曲面形成的壳体为旋转壳。这根曲线为母线，这根直线为轴线，母线与轴线连成经线平面，母线上一点在旋转时形成的圆为纬线，纬线所在平面为纬线平面（图11.1a）。一般，取母线和纬线方向为正交曲线坐标系的两个主方向。中面上一点的坐标用  $(\varphi, \theta)$  来表示， $\varphi$  为中面在该点法线与轴线夹角， $\theta$  为纬线平面内该点所在半径和指定起算半径间夹角。即坐标为

$$\alpha = \varphi, \beta = \theta, \gamma = z \quad (11.1a)$$

按第九章主曲率半径定义，沿  $\alpha$  方向的主曲率半径为母线在经线平面内该点的曲率半径  $R_\varphi$ ；沿  $\beta$  方向的主曲率半径为中面在该点法线与轴线交点到该点距离  $R_\theta$ （图11.1a），即主曲率半径

$$R_\alpha = R_\varphi(\varphi), R_\beta = R_\theta(\varphi) \quad (11.1b)$$

中曲面上任一微段弧长

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= (d\alpha)^2 + (d\beta)^2 = (R_\varphi d\varphi)^2 + (R_\theta d\theta)^2 \\ &= (R_\varphi)^2 (d\varphi)^2 + (R_\theta \sin \varphi)^2 (d\theta)^2 \end{aligned} \quad (a)$$

按式 (9.4) 有拉梅参数

$$A = R_\varphi, B = R_\theta \sin \varphi \quad (11.1c)$$

我们切出一个经线平面（图11.1b），从几何关系可知

$$\overline{BC} = \overline{AC} \cdot \cos \varphi = (R_\varphi d\varphi) \cos \varphi \quad (b)$$

$$\overline{BC} = dR_\theta = d(R_\theta \sin \varphi) \quad (c)$$

因而有关系式

$$d(R_\theta \sin \varphi) = (R_\varphi \cos \varphi) d\varphi \quad (11.1d)$$

并记

$$R_\theta \sin \varphi = R_\theta(\varphi) \quad (11.1e)$$

应该指出，关系式 (11.1d) 也可从一般科达齐关系式  $\frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{B}{R_\beta} \right) = \frac{1}{R_\alpha} \frac{\partial B}{\partial \alpha}$  直接推出。

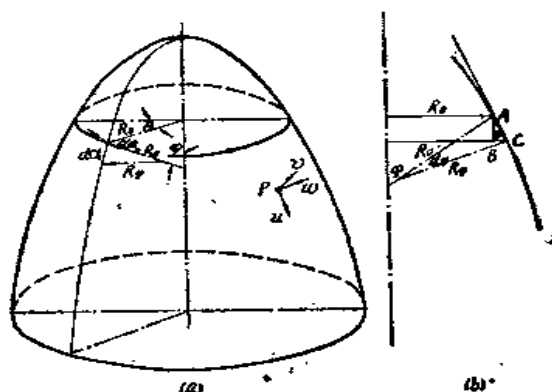


图 11.1

若壳体中曲面上一点  $P$  沿母线、纬线、法线方向的位移分别为  $u, v, w$  (图 11.1a), 则按第九章经典理论中的中面应变与中面位移一般关系式 (9.27), (9.28), 代入旋转壳基本参数 (11.1), 有

$$\varepsilon_{\varphi}^0 = \frac{1}{R_{\varphi}} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} + w \right) \quad (11.2a)$$

$$\varepsilon_{\theta}^0 = \frac{1}{R_{\theta}} \left( u \cos \varphi + \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \sin \varphi \right) \quad (11.2b)$$

$$\varepsilon_{\varphi\theta}^0 = \frac{1}{R_{\theta}} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{R_{\theta}}{R_{\varphi}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{v}{R_{\theta}} \right) \quad (11.2c)$$

$$\chi_{\varphi} = \frac{1}{R_{\varphi}} \frac{\partial \theta_{\varphi}}{\partial \varphi} \quad (11.2d)$$

$$\chi_{\theta} = \frac{1}{R_{\theta}} \left( \frac{\partial \theta_{\theta}}{\partial \theta} + \theta_{\varphi} \cos \varphi \right) \quad (11.2e)$$

$$\chi_{\varphi\theta} = \frac{1}{R_{\theta}} \frac{\partial \theta_{\varphi}}{\partial \theta} + \frac{R_{\theta}}{R_{\varphi}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\theta_{\theta}}{R_{\theta}} \right) \quad (11.2f)$$

$$\theta_{\varphi} = \frac{1}{R_{\varphi}} \left( u - \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \quad (11.2g)$$

$$\theta_{\theta} = \frac{1}{R_{\theta}} \left( v \sin \varphi - \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \quad (11.2h)$$

内力与中面应变一般性关系式 (9.35) 代入旋转壳基本参数 (11.1) 有

$$N_{\varphi} = K(\varepsilon_{\varphi}^0 + \nu \varepsilon_{\theta}^0) \quad (11.3a)$$

$$N_{\theta} = K(\varepsilon_{\theta}^0 + \nu \varepsilon_{\varphi}^0) \quad (11.3b)$$

$$N_{\varphi\theta} = N_{\theta\varphi} = K \frac{1-\nu}{2} \varepsilon_{\varphi\theta}^0 \quad (11.3c)$$

$$M_{\varphi} = D(\chi_{\varphi} + \nu \chi_{\theta}) \quad (11.3d)$$

$$M_{\theta} = D(\chi_{\theta} + \nu \chi_{\varphi}) \quad (11.3e)$$

$$M_{\varphi\theta} = M_{\theta\varphi} = D \frac{1-\nu}{2} \chi_{\varphi\theta} \quad (11.3f)$$

一般性内力动平衡方程 (9.40) 代入旋转壳基本参数 (11.1) 有

$$\frac{\partial(R_{\theta}N_{\varphi})}{\partial \varphi} + R_{\varphi} \frac{\partial N_{\varphi\theta}}{\partial \theta} - R_{\varphi} \cos \varphi N_{\theta} + R_{\theta}Q_{\varphi} + R_{\varphi}R_{\theta}q_{\varphi} = R_{\varphi}R_{\theta}\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (11.4a)$$

$$\frac{\partial(R_{\theta}N_{\theta\theta})}{\partial \varphi} + R_{\varphi} \frac{\partial N_{\theta}}{\partial \theta} + R_{\varphi} \cos \varphi N_{\varphi\theta} + R_{\varphi} \sin \varphi Q_{\theta} + R_{\varphi}R_{\theta}q_{\theta} = R_{\varphi}R_{\theta}\rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (11.4b)$$

$$\frac{\partial(R_{\theta}Q_{\varphi})}{\partial \varphi} + R_{\varphi} \frac{\partial Q_{\theta}}{\partial \theta} - R_{\varphi}R_{\theta} \left( \frac{N_{\varphi}}{R_{\varphi}} + \frac{N_{\theta}}{R_{\theta}} \right) + R_{\varphi}R_{\theta}q_z = R_{\varphi}R_{\theta}\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (11.4c)$$

其中剪力表达式 (9.39) 现为

$$Q_{\varphi} = \frac{1}{R_{\varphi}R_{\theta}} \left[ \frac{\partial(R_{\theta}M_{\varphi})}{\partial \varphi} + R_{\varphi} \frac{\partial M_{\varphi\theta}}{\partial \theta} - R_{\varphi} \cos \varphi M_{\theta} \right] \quad (11.4d)$$

$$Q_{\theta} = \frac{1}{R_{\varphi}R_{\theta}} \left[ \frac{\partial(R_{\theta}M_{\theta\theta})}{\partial \varphi} + R_{\varphi} \frac{\partial M_{\theta}}{\partial \theta} + R_{\varphi} \cos \varphi M_{\varphi\theta} \right] \quad (11.4e)$$

上面给出了旋转壳的三组基本关系式，至于其它关系式均可根据第九章一般性公式代入式 (11.1) 列出。

将式 (11.2) 代入式 (11.3)，再代入式 (11.4)，即可建立以中面位移分量  $u$ ， $v$ ， $w$  表示的旋转壳振动的基本微分方程组。具体表达式将在下面各节中给出。

以前已经分析过，这将是一组八阶偏微分方程组，每边将要满足四个边界条件。根据边界条件一般表达式 (9.41)，(9.42)，(9.43)，代入旋转壳基本参数 (11.1)，对于齐次边界有

$$\varphi = \varphi_0: \quad u = 0 \text{ 或 } N_\varphi = 0 \quad (11.5a)$$

$$v = 0 \text{ 或 } N_{\varphi\theta} + \frac{M_{\varphi\theta}}{R_\theta} = 0 \quad (11.5b)$$

$$u - \frac{\partial w}{\partial \varphi} = 0 \text{ 或 } M_\varphi = 0 \quad (11.5c)$$

$$w = 0 \text{ 或 } Q_\varphi + \frac{\partial M_{\varphi\theta}}{R_\theta \partial \theta} = 0 \quad (11.5d)$$

$$\theta = \theta_0: \quad v = 0 \text{ 或 } N_\theta = 0 \quad (11.5e)$$

$$u = 0 \text{ 或 } N_{\theta\varphi} + \frac{M_{\theta\varphi}}{R_\varphi} = 0 \quad (11.5f)$$

$$v \sin \varphi - \frac{\partial w}{\partial \theta} = 0 \text{ 或 } M_\theta = 0 \quad (11.5g)$$

$$w = 0 \text{ 或 } Q_\theta + \frac{\partial M_{\theta\varphi}}{R_\varphi \partial \varphi} = 0 \quad (11.5h)$$

实际存在的边界条件可能有 (以  $\varphi = \varphi_0$  边为例)

$$\text{完全 (第一类) 固定边: } u = v = \frac{\partial w}{\partial \varphi} = w = 0 \quad (11.6a)$$

$$\text{垂向自由的 (第二类) 固定边: } N_\varphi = v = u - \frac{\partial w}{\partial \varphi} = w = 0 \quad (11.6b)$$

$$\text{切向自由的 (第三类) 固定边: } u = N_{\varphi\theta} + \frac{M_{\varphi\theta}}{R_\theta} = \frac{\partial w}{\partial \varphi} = w = 0 \quad (11.6c)$$

$$\text{中面自由的 (第四类) 固定边: } N_\varphi = N_{\varphi\theta} + \frac{M_{\varphi\theta}}{R_\theta} = u - \frac{\partial w}{\partial \varphi} = w = 0 \quad (11.6d)$$

$$\text{垂向自由的 (第一类) 简支边: } N_\varphi = v = M_\varphi = w = 0 \quad (11.6e)$$

$$\text{切向自由的 (第二类) 简支边: } u = N_{\varphi\theta} + \frac{M_{\varphi\theta}}{R_\theta} = M_\varphi = w = 0 \quad (11.6f)$$

$$\text{中面自由的 (第三类) 简支边: } N_\varphi = N_{\varphi\theta} + \frac{M_{\varphi\theta}}{R_\theta} = M_\varphi = w = 0 \quad (11.6g)$$

$$\text{中面约束的 (第四类) 简支边: } u = v = M_\varphi = w = 0 \quad (11.6h)$$

$$\text{完全 (第一类) 自由边: } N_\varphi = N_{\varphi\theta} + \frac{M_{\varphi\theta}}{R_\theta} = M_\varphi = Q_\varphi + \frac{\partial M_{\varphi\theta}}{R_\theta \partial \theta} = 0 \quad (11.6i)$$

$$\text{垂向约束的 (第二类) 自由边: } u = N_{\varphi\theta} + \frac{M_{\varphi\theta}}{R_\theta} = M_\varphi = Q_\varphi + \frac{\partial M_{\varphi\theta}}{R_\theta \partial \theta} = 0 \quad (11.6j)$$

$$\text{切向约束的 (第三类) 自由边: } N_\varphi = v = M_\varphi = Q_\varphi + \frac{\partial M_{\varphi\theta}}{R_\theta \partial \theta} = 0 \quad (11.6k)$$

$$\text{中面约束的 (第四类) 自由边: } u = v = M_\varphi = Q_\varphi + \frac{\partial M_{\varphi\theta}}{R_\theta \partial \theta} = 0 \quad (11.6l)$$

$$\text{中面自由的 (第一类) 自由一筒支边: } N_{\varphi} = N_{\varphi\theta} + \frac{M_{\varphi\theta}}{R_{\theta}} = u - \frac{\partial w}{\partial \varphi} = Q_{\varphi} + \frac{\partial M_{\varphi\theta}}{R_{\theta} \partial \theta} = 0 \quad (11.6m)$$

$$\text{中面约束的 (第二类) 自由一筒支边: } u = v = \frac{\partial w}{\partial \varphi} = Q_{\varphi} + \frac{\partial M_{\varphi\theta}}{R_{\theta} \partial \theta} = 0 \quad (11.6n)$$

## § 11.2 旋转壳的轴对称振动

旋转壳在结构上是轴对称的, 如果载荷及边界也是轴对称的, 则只产生轴对称振动<sup>[129]</sup>。这时其任意力学量均不是  $\theta$  的函数, 在空间上只是坐标  $\varphi$  的函数, 因此问题简化得多。

上节中中面应变表达式 (11.2), 内力表达式 (11.3), 动平衡方程 (11.4) 中考虑到变量不是  $\theta$  函数以及所有非对称分量  $v, \varepsilon_{\varphi\theta}^0, x_{\varphi\theta}, \theta_{\theta}, N_{\varphi\theta}, M_{\varphi\theta}, q_{\theta}$  为零, 即得轴对称情况下旋转壳的

中面应变表达式

$$\varepsilon_{\varphi}^0 = \frac{1}{R_{\varphi}} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} + w \right) \quad (11.7a)$$

$$\varepsilon_{\theta}^0 = \frac{1}{R_{\theta}} (u \cos \varphi + w \sin \varphi) \quad (11.7b)$$

$$x_{\varphi} = \frac{1}{R_{\varphi}} \frac{\partial \theta_{\varphi}}{\partial \varphi} \quad (11.7c)$$

$$x_{\theta} = \frac{1}{R_{\theta}} \theta_{\varphi} \cos \varphi \quad (11.7d)$$

$$\theta_{\varphi} = \frac{1}{R_{\varphi}} \left( u - \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \quad (11.7e)$$

内力表达式

$$N_{\varphi} = K(\varepsilon_{\varphi}^0 + \nu \varepsilon_{\theta}^0) \quad (11.8a)$$

$$N_{\theta} = K(\varepsilon_{\theta}^0 + \nu \varepsilon_{\varphi}^0) \quad (11.8b)$$

$$M_{\varphi} = D(x_{\varphi} + \nu x_{\theta}) \quad (11.8c)$$

$$M_{\theta} = D(x_{\theta} + \nu x_{\varphi}) \quad (11.8d)$$

动平衡方程

$$\frac{\partial(R_{\theta} N_{\varphi})}{\partial \varphi} - R_{\varphi} \cos \varphi N_{\theta} + R_{\theta} Q_{\varphi} + R_{\varphi} R_{\theta} q_{\varphi} = R_{\varphi} R_{\theta} \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (11.9a)$$

$$\frac{\partial(R_{\theta} Q_{\varphi})}{\partial \varphi} - R_{\varphi} R_{\theta} \left( \frac{N_{\varphi}}{R_{\varphi}} + \frac{N_{\theta}}{R_{\theta}} \right) + R_{\varphi} R_{\theta} q_{\theta} = R_{\varphi} R_{\theta} \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (11.9b)$$

剪力表达式

$$Q_{\varphi} = \frac{1}{R_{\varphi} R_{\theta}} \left[ \frac{\partial}{\partial \varphi} (R_{\theta} M_{\varphi}) - R_{\varphi} \cos \varphi M_{\theta} \right] \quad (11.9c)$$

将式(11.7)代入式(11.8), 再代入式(11.9), 即得  $u, w$  所满足的二个基本方程, 相应边界条件也可根据式(11.5), (11.6) 确定。

关于轴对称振动的具体求解见下面锥、球壳各节。

### § 11.3 完全锥壳

旋转壳中常用的一种是圆锥壳〔86〕〔132〕〔169〕〔247〕。其中曲面由一根直线（母线）绕位于同一平面的轴线旋转而成，母线与轴线并不平行。若母线与轴线相交则形成完全锥壳；母线与轴线不相交则形成截头锥壳。母线绕轴线旋转 $360^\circ$ 形成闭合锥壳；母线绕轴线旋转不足 $360^\circ$ 形成开口锥壳。本节先介绍完全闭合锥壳的振动问题，将首先列出对各类圆锥壳都适用的锥壳振动基本方程及其一般解法。

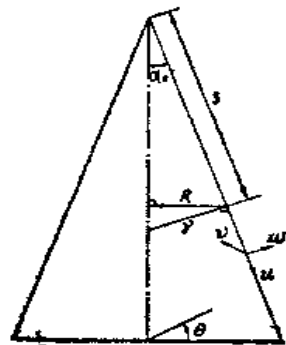


图 11.2

#### 一、圆锥壳振动的基本方程

取圆锥壳（图11.2）的母线和纬线方向为正交曲线坐标系的两个主方向。中面上一点的坐标用 $(s, \theta)$ 来表示， $s$ 为顶点起算到该点的母线长度， $\theta$ 定义同一般旋转壳。则有坐标

$$\alpha = s, \quad \beta = \theta, \quad \gamma = z \quad (11.10a)$$

按旋转壳曲率半径定义，有

$$R_\alpha = R_\beta = \infty, \quad R_\theta = R_\varphi = r = s \operatorname{tg} \alpha_0 \quad (11.10b)$$

式中 $\alpha_0$ 为母线与轴线夹角，它与旋转壳中 $\varphi$ 角间关系为

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{2} - \varphi, \quad \sin \varphi = \cos \alpha_0, \quad \cos \varphi = \sin \alpha_0 \quad (11.10c)$$

中曲面上任一微段弧长

$$(dS)^2 = (ds)^2 + (R_\theta d\theta)^2 \quad (a)$$

按式(9.4)有拉梅参数

$$A = 1, \quad B = R_\theta = R = s \cdot \sin \alpha_0 \quad (11.10d)$$

将式(a)与§11.1中式(a)相比知

$$R_\varphi d\varphi = ds, \quad R_\theta \sin \varphi = s \cdot \sin \alpha_0 \quad (11.10e)$$

将圆锥壳基本关系式(11.10)代入一般旋转壳的式(11.2)，(11.3)，(11.4)，可得圆锥壳的

中面应变表达式

$$\epsilon_s^0 = \frac{\partial u}{\partial s} \quad (11.11a)$$

$$\epsilon_\theta^0 = \frac{u}{s} + \frac{1}{s \cdot \sin \alpha_0} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{s \operatorname{tg} \alpha_0} \quad (11.11b)$$

$$\epsilon_{s\theta}^0 = \frac{1}{s \cdot \sin \alpha_0} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{v}{s} \quad (11.11c)$$

$$\kappa_s = \frac{\partial \theta_s}{\partial s} \quad (11.11d)$$

$$\kappa_\theta = \frac{\theta_s}{s} + \frac{1}{s \cdot \sin \alpha_0} \frac{\partial \theta_s}{\partial \theta} \quad (11.11e)$$

$$x_{,s} = \frac{1}{s \cdot \sin \alpha_0} \frac{\partial \theta_s}{\partial \theta} + s \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\theta_s}{s} \right) \quad (11.11 f)$$

$$\theta_s = - \frac{\partial w}{\partial s} \quad (11.11 g)$$

$$\theta_\theta = \frac{v}{s \operatorname{tg} \alpha_0} - \frac{1}{s \cdot \sin \alpha_0} \frac{\partial w}{\partial \theta} \quad (11.11 h)$$

内力表达式

$$N_s = K(\varepsilon_s^0 + \nu \varepsilon_\theta^0) \quad (11.12 a)$$

$$N_\theta = K(\varepsilon_\theta^0 + \nu \varepsilon_s^0) \quad (11.12 b)$$

$$N_{,s} = N_{,s} = K \frac{(1-\nu)}{2} \varepsilon_{,s}^0 \quad (11.12 c)$$

$$M_s = D(x_s + \nu x_\theta) \quad (11.12 d)$$

$$M_\theta = D(x_\theta + \nu x_s) \quad (11.12 e)$$

$$M_{,s} = M_{,s} = D \frac{1-\nu}{2} x_{,s} \quad (11.12 f)$$

动平衡方程

$$\frac{\partial N_s}{\partial s} + \frac{N_s}{s} + \frac{1}{s \cdot \sin \alpha_0} \frac{\partial N_{\theta s}}{\partial \theta} - \frac{N_\theta}{s} + q_s = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (11.13 a)$$

$$\frac{\partial N_{,s}}{\partial s} + \frac{N_{,s}}{s} + \frac{1}{s \cdot \sin \alpha_0} \frac{\partial N_{\theta s}}{\partial \theta} + \frac{N_{\theta s}}{s} + \frac{Q_\theta}{s \cdot \operatorname{tg} \alpha_0} + q_\theta = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (11.13 b)$$

$$\frac{\partial Q_s}{\partial s} + \frac{Q_s}{s} + \frac{1}{s \cdot \sin \alpha_0} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - \frac{N_\theta}{s \cdot \operatorname{tg} \alpha_0} + q_s = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (11.13 c)$$

剪力表达式

$$Q_s = \frac{\partial M_s}{\partial s} + \frac{M_s}{s} + \frac{1}{s \cdot \sin \alpha_0} \frac{\partial M_{\theta s}}{\partial \theta} - \frac{M_\theta}{s} \quad (11.13 d)$$

$$Q_\theta = \frac{\partial M_{,s}}{\partial s} + \frac{M_{,s}}{s} + \frac{1}{s \cdot \sin \alpha_0} \frac{\partial M_{\theta s}}{\partial \theta} + \frac{M_{\theta s}}{s} \quad (11.13 e)$$

将式 (11.11) 代入式 (11.12)，再代入式 (11.13)，即可建立以沿母线、周向、法向的中面位移分量  $u$ ， $v$ ， $w$  表示的圆锥壳振动的基本微分方程组。对于圆锥壳振动分析大多采用唐纳尔简化理论第一假定，即有简化算式 (9.71)

$$\theta_s = - \frac{\partial w}{\partial s}, \quad \theta_\theta = - \frac{1}{s \cdot \sin \alpha_0} \frac{\partial w}{\partial \theta} \quad (11.14)$$

并在头二个动平衡方程中忽略剪力项，则圆锥壳的基本方程可推得为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{(s \cdot \sin \alpha_0)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{u}{s^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{1}{(s \cdot \sin \alpha_0)} \frac{\partial^2 v}{\partial s \partial \theta} - \frac{3-\nu}{2} \frac{1/s}{(s \cdot \sin \alpha_0)} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{s \operatorname{tg} \alpha_0} \left( \nu \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{w}{s} \right) = \frac{1}{K} \left[ \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - q_s \right] \quad (11.15 a)$$

$$\frac{1+\nu}{2} \frac{1}{(s \cdot \sin \alpha_0)} \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial \theta} + \frac{3-\nu}{2} \frac{1/s}{(s \cdot \sin \alpha_0)} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \frac{1}{(s \cdot \sin \alpha_0)^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{s} \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{1-\nu}{2} \frac{v}{s^2} + \frac{\cos \alpha_0}{(s \cdot \sin \alpha_0)^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} = \frac{1}{K} \left[ \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - q_\theta \right] \quad (11.15 b)$$

$$\frac{12}{h^2} \left[ - \frac{1}{s \cdot \operatorname{tg} \alpha_0} \left( \nu \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{u}{s} \right) + \frac{\cos \alpha_0}{(s \cdot \sin \alpha_0)^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{(s \cdot \operatorname{tg} \alpha_0)^2} \right] + \nabla^2 \nabla^2 w$$



$$= \frac{1}{D} \left[ q_s - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] \quad (11.15 c)$$

式中

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{(s \cdot \sin \alpha_0)^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (11.16)$$

其边界条件根据旋转壳的一般表达式 (11.5) 有

$$s = s_0: \quad u = 0 \text{ 或 } N_s = 0 \quad (11.17 a)$$

$$v = 0 \text{ 或 } N_{\theta\theta} + \frac{M_{s\theta}}{s \operatorname{tg} \alpha_0} = 0 \quad (11.17 b)$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = 0 \text{ 或 } M_s = 0 \quad (11.17 c)$$

$$w = 0 \text{ 或 } Q_s + \frac{1}{s \cdot \sin \alpha_0} \frac{\partial M_{s\theta}}{\partial \theta} = 0 \quad (11.17 d)$$

$$\theta = \theta_0: \quad v = 0 \text{ 或 } N_\theta = 0 \quad (11.17 e)$$

$$u = 0 \text{ 或 } N_{ss} = 0 \quad (11.17 f)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \theta} = 0 \text{ 或 } M_\theta = 0 \quad (11.17 g)$$

$$w = 0 \text{ 或 } Q_\theta + \frac{\partial M_{\theta s}}{\partial s} = 0 \quad (11.17 h)$$

对于实际可能存在的边界条件也可根据式 (11.6) 类似确定。

如果我们对方程 (11.15), 按式 (11.10), 作如下变换:

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial x}, \quad s \cdot \sin \alpha_0 = R, \quad s \operatorname{tg} \alpha_0 = r, \quad \frac{1}{s} = \frac{\sin \alpha_0}{R} \quad (b)$$

则有基本方程组另一形式

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\sin \alpha_0}{R} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{\sin^2 \alpha_0}{R^2} u + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{R \partial x \partial \theta} \\ - \frac{3-\nu}{2} \frac{\sin \alpha_0}{R^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \left( \nu \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\sin \alpha_0}{R} w \right) = \frac{1}{K} \left[ \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - q_s \right] \end{aligned} \quad (11.18 a)$$

$$\begin{aligned} \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{R \partial x \partial \theta} + \frac{3-\nu}{2} \frac{\sin \alpha_0}{R^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{R^2 \partial \theta^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\sin \alpha_0}{R} \frac{\partial v}{\partial x} \\ - \frac{1-\nu}{2} \frac{\sin^2 \alpha_0}{R^2} v + \frac{\cos \alpha_0}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} = \frac{1}{K} \left[ \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - q_\theta \right] \end{aligned} \quad (11.18 b)$$

$$\frac{12}{h^3} \left[ \frac{1}{r} \left( \nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sin \alpha_0}{R} u \right) + \frac{\cos \alpha_0}{R^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{r^2} \right] + \nabla^2 \nabla^2 w = \frac{1}{D} \left[ q_s - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] \quad (11.18 c)$$

式中

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\sin \alpha_0}{R} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^2}{R^2 \partial \theta^2} \quad (11.18 d)$$

这样我们可以看出:

在上述方程中取  $\alpha_0 = 0$ ,  $r = R$ , 则完全化为唐纳尔理论 ( $h = 0$ ) 的圆柱壳振动基本方程 (10.5), (10.6)。因此, 圆柱壳只是圆锥壳当顶角为零时的特殊情况。

在上述方程中取  $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ ,  $R = r$ ,  $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r}$ ,  $r = \infty$ , 则式 (11.18 c), (11.18 d) 即化为第四章圆板振动基本方程 (4.1)。因此, 圆板也是圆锥壳当顶角为  $\pi$  时的特殊情况。

况。

如果同时采纳唐纳尔简化理论的第一、第二假定，即对于简化理论的基本方程(9.76)<sub>0</sub> (9.74)，代入圆锥壳基本关系，有基本微分方程

$$D \nabla^2 \nabla^2 w + \nabla_1^2 f + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q_r \quad (11.19a)$$

$$Eh \nabla_1^2 w - \nabla^2 \nabla^2 f = 0 \quad (11.19b)$$

其中算子应为

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{(s \cdot \sin \alpha_0)^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (11.19c)$$

$$\nabla_1^2 = \frac{1}{s \cdot \operatorname{tg} \alpha_0} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \quad (11.19d)$$

按式(9.75)可推得薄膜内力

$$N_r = \frac{1}{s} \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{1}{(s \cdot \sin \alpha_0)^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \quad (11.20a)$$

$$N_\theta = \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \quad (11.20b)$$

$$N_{r\theta} = N_{\theta r} = \frac{1}{(s \cdot \sin \alpha_0)} \left( \frac{1}{s} \frac{\partial f}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial \theta} \right) \quad (11.20c)$$

按式(11.12d-f)，(11.11d-f)，(11.14)可推得弯曲内力

$$M_r = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \nu \left( \frac{1}{s} \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{1}{(s \cdot \sin \alpha_0)^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] \quad (11.20d)$$

$$M_\theta = -D \left[ \left( \frac{1}{s} \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{1}{(s \cdot \sin \alpha_0)^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right] \quad (11.20e)$$

$$M_{r\theta} = M_{\theta r} = -\frac{(1-\nu)D}{s \cdot \sin \alpha_0} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta} - \frac{1}{s} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \quad (11.20f)$$

按式(11.13d)，(11.13e)可推得剪力

$$Q_r = -D \frac{\partial}{\partial s} (\nabla^2 w) \quad (11.20g)$$

$$Q_\theta = -\frac{D}{s \cdot \sin \alpha_0} \frac{\partial}{\partial \theta} (\nabla^2 w) \quad (11.20h)$$

## 二、闭合锥壳振动的一般解

对于周向封闭的(包括完全和截头的)圆锥壳均可设振型解为

$$U(s, \theta) = \bar{U}(s) \cos n\theta \quad (11.21a)$$

$$V(s, \theta) = \bar{V}(s) \sin n\theta \quad (11.21b)$$

$$W(s, \theta) = \bar{W}(s) \cos n\theta \quad (11.21c)$$

代入方程(11.15)相应的振型方程，可得未知 $\bar{U}(s)$ ， $\bar{V}(s)$ ， $\bar{W}(s)$ 所应满足的联立齐次常微分方程组：

$$\begin{aligned} \bar{U}'' + \frac{1}{s} \bar{U}' + \frac{1-\nu}{2} \frac{(-n^2)}{(s \cdot \sin \alpha_0)^2} \bar{U} - \frac{1}{s^2} \bar{U} + \frac{1+\nu}{2} \frac{n}{(s \cdot \sin \alpha_0)} \bar{V}' - \frac{3-\nu}{2} \frac{n}{s^2 \cdot \sin \alpha_0} \bar{V} \\ + \frac{1}{s \cdot \operatorname{tg} \alpha_0} \left( \nu \bar{W}' - \frac{\bar{W}}{s} \right) + \frac{\rho h}{s} \omega^2 \bar{U} = 0 \end{aligned} \quad (11.22a)$$

$$-\frac{(1+\nu)n}{2s \cdot \sin \alpha_0} \bar{U}' - \frac{(3-\nu)n}{2s^2 \cdot \sin \alpha_0} \bar{U} + \frac{1-\nu}{2} \bar{V}'' + \frac{1-\nu}{2s} \bar{V}' - \frac{n^2}{(s \cdot \sin \alpha_0)^2} \bar{V} - \frac{1-\nu}{2s^2} \bar{V} \\ - \frac{n \cos \alpha_0}{(s \cdot \sin \alpha_0)^2} \bar{W} + \frac{\rho h}{K} \omega^2 \bar{V} = 0 \quad (11.22b)$$

$$\frac{1}{s \cdot \tan \alpha_0} \left( \nu \bar{U}' + \frac{1}{s} \bar{U} \right) + \frac{n \cos \alpha_0}{(s \cdot \sin \alpha_0)^2} \bar{V} + \frac{1}{(s \cdot \tan \alpha_0)^2} \bar{W} + k R^2 \left[ \left( \bar{W}'' + \frac{1}{s} \bar{W}' \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{n^2}{(s \cdot \sin \alpha_0)^2} \bar{W} \right)' + \frac{1}{s} \left( \bar{W}'' + \frac{1}{s} \bar{W}' - \frac{n^2}{(s \cdot \sin \alpha_0)^2} \bar{W} \right)' \right. \\ \left. - \frac{n^2}{(s \cdot \sin \alpha_0)^2} \left( \bar{W}'' + \frac{1}{s} \bar{W}' - \frac{n^2}{(s \cdot \sin \alpha_0)^2} \bar{W} \right) \right] - \frac{\rho h}{K} \omega^2 \bar{W} = 0 \quad (11.22c)$$

和圆柱壳常系数联立常微分方程组 (10.70) 不一样, 圆锥壳的方程组 (11.22) 是变系数的, 但变系数均为  $s$  的幂函数, 因此可以采用幂级数法求解。可设

$$\bar{U}(s) = a_0 s^2 + a_1 s^3 + a_2 s^4 + \dots \quad (11.23a)$$

$$\bar{V}(s) = b_0 s^2 + b_1 s^3 + b_2 s^4 + \dots \quad (11.23b)$$

$$\bar{W}(s) = c_0 s^2 + c_1 s^3 + c_2 s^4 + c_3 s^5 + c_4 s^6 + \dots \quad (11.23c)$$

代入方程组 (11.22a), (11.22b), (11.22c), 并使  $s$  的同幂次项系数和为零, 即可将  $a_i, b_i (i \geq 2), c_j (j \geq 4)$  表达为  $a_0, a_1, b_0, b_1, c_0, c_1, c_2, c_3$  的函数。则有

$$\bar{U}(s) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i(a_0, a_1, b_0, b_1, c_0, c_1, c_2, c_3) s^{i+2} \quad (11.24a)$$

$$\bar{V}(s) = \sum_{i=0}^{\infty} B_i(a_0, a_1, b_0, b_1, c_0, c_1, c_2, c_3) s^{i+2} \quad (11.24b)$$

$$\bar{W}(s) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i(a_0, a_1, b_0, b_1, c_0, c_1, c_2, c_3) s^{i+2} \quad (11.24c)$$

代入  $s = s_1$  及  $s = s_2$  两端共八个边界条件, 即可确定关于八个常数  $a_0, a_1, b_0, b_1, c_0, c_1, c_2, c_3$  的齐次线性方程组, 由系数行列式为零可求得各阶固有频率  $\omega_{mn}$  及相应  $A_{i,mn}, B_{i,mn}, C_{i,mn} (i = 0, 1, 2, \dots)$ , 从而代入式 (11.23), (11.21), 求得相应振型  $U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}$ 。

### 三、完全锥壳的固有振动

对于完全锥壳只有一端边界, 另一端为锥顶。完全锥壳可以看成是截头锥壳当  $s_1 \rightarrow 0$  时的极限解。  $s = s_1$  端的边界条件常用的可分为两种, 考虑到顶端构造上特殊情况为:

$$\text{自由:} \quad u \sin \alpha_0 - w \cos \alpha_0 = v = \frac{\partial w}{\partial s} = N_s \cos \alpha_0 - Q_s \sin \alpha_0 = 0 \quad (11.25a)$$

$$\text{固定:} \quad u = v = w = \frac{\partial w}{\partial s} = 0 \quad (11.25b)$$

因此可以将解 (11.24) 代入顶端与底端边界条件 (11.25) 及 (11.17), 类似计算出固有频率  $\omega_{mn}$  及振型  $U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}$ , 并取  $s_1 \rightarrow 0$ , 即为完全锥壳固有振动解<sup>[69]</sup>。

例如, 对于顶端自由、底端固定圆锥壳有边界条件

$$s = 0: u \sin \alpha_0 - w \cos \alpha_0 = v = \frac{\partial w}{\partial s} = N_s \cos \alpha_0 - Q_s \sin \alpha_0 = 0 \quad (11.26a)$$

$$s = s_2: u = v = \frac{\partial w}{\partial s} = w = 0 \quad (11.26b)$$

其轴对称 ( $n=0$ ) 的频率系数  $\Omega = \omega r_2 \sqrt{\frac{\rho}{E}}$  解列于表11.1。

顶端自由底端固定完全圆锥壳频率系数  $\Omega$  ( $n=0, \nu=0.3$ )

表11.1

$\frac{12(1-\nu^2)}{\text{tg}^4 \alpha_0} \left(\frac{r_2}{h}\right)^2$	阶 次				
	1	2	3	4	5
0.1	32.39	125.8	281.8	500.2	781.1
0.4	16.34	62.96	140.9	256.1	390.6
1.0	10.51	39.89	89.19	158.2	247.1
4.0	5.663	20.11	44.71	79.21	123.6
10	4.041	12.94	28.43	50.21	78.26
100	2.469	4.969	9.663	16.40	25.17
1000	1.891	2.766	4.310	6.384	9.078
10000	1.558	1.947	2.560	3.286	4.216

对于顶端自由、底端自由圆锥壳有边界条件

$$s=0: u \sin \alpha_0 - w \cos \alpha_0 = v = \frac{\partial w}{\partial s} = N, \cos \alpha_0 - Q, \sin \alpha_0 = 0 \quad (11.27a)$$

$$s=s_2: N_s = N_{s0} + \frac{M_{s0}}{s \cdot \text{tg} \alpha_0} = M_s = Q_s + \frac{1}{s \cdot \sin \alpha_0} \frac{\partial M_{s0}}{\partial \theta} = 0 \quad (11.27b)$$

其轴对称 ( $n=0$ ) 的频率系数  $\Omega = \omega r_2 \sqrt{\frac{\rho}{E}}$  解列于表11.2。

顶端自由底端自由完全圆锥壳频率系数  $\Omega$  ( $n=0, \nu=0.3$ )

表11.2

$\frac{12(1-\nu^2)}{\text{tg}^4 \alpha_0} \left(\frac{r_2}{h}\right)^2$	阶 次				
	1	2	3	4	5
0.1	28.53	121.6	277.5	495.9	776.8
0.4	14.35	60.85	138.8	247.9	388.4
1.0	9.179	38.55	87.82	156.8	245.7
4.0	4.842	19.44	44.03	78.52	122.9
10	3.358	12.49	27.99	49.78	77.82
100	1.871	4.746	9.499	16.26	25.04
1000	1.410	2.563	3.672	6.306	9.011
10000	1.213	1.759	2.425	3.212	4.153

## § 11.4 截头锥壳与开口锥壳

### 一、截头锥壳的固有振动

原则上讲, 上节所述方法适用于截头锥壳两端各为式 (11.17a) — (11.17d) 组合

的16种边界条件之一的各种（计有256种）情况，但实际计算相当繁琐。下面仅列出一些已有数字结果的截头锥壳频率系数值。

固定-固定壳扭转振动<sup>〔86〕</sup>频率系数 $\Omega = \frac{\omega s_1}{\left(\frac{R_2}{R_1} - 1\right)} \sqrt{\frac{2(1+\nu)\rho}{E}}$  列于表11.3

固定-固定截头圆锥壳扭转振动频率系数 $\Omega$ 

表11.3

$\frac{R_2}{R_1}$	阶 次				
	1	2	3	4	5
1	3.142	6.283	9.425	12.57	15.71
2	3.197	6.312	9.444	12.58	15.72
5	3.389	6.445	9.541	12.66	15.78
10	3.547	6.598	9.673	12.77	15.88
20	3.667	6.749	9.830	12.92	16.02
50	3.760	6.887	9.990	13.10	16.21

简支-简支壳弯曲振动<sup>〔201〕</sup>沿轴向一个半波的最低频率系数 $\Omega = \omega(s_2 - s_1) \sqrt{\frac{\rho(1-\nu^2)}{E}}$

列于表11.4。

简支-简支截头圆锥壳弯曲振动最低频率系数 $\Omega(\nu=0.3)$ 

表11.4

$\alpha_0$	$h/R_2$				
	0.03	0.01	0.006	0.003	0.001
5°	0.963	0.643	0.537	0.408	0.283
10°	0.891	0.553	0.480	0.349	0.229
20°	0.809	0.504	0.414	0.307	0.194
40°	0.729	0.430	0.345	0.251	0.156
60°	0.562	0.337	0.271	0.193	0.119

上端固定-下端自由壳轴对称振动<sup>〔154〕</sup>基频系数 $\Omega = \omega r_2 \sqrt{\frac{\rho}{E}}$  列于表11.5。

上端固定下端自由截头圆锥壳轴对称振动基频系数 $\Omega(\nu=0.3)$ 

表11.5

$\frac{12(1-\nu^2)}{\lg^4 \alpha_0} \left(\frac{r_2}{h}\right)^2$	$R_1/R_2$			
	0.2	0.4	0.6	0.8
0.1	14.5	25.7	60.9	248
1.0	5.37	9.02	21.6	89.1
10	1.84	2.85	6.53	26.3
100	1.22	1.45	2.49	7.76
1000	0.891	1.12	1.43	3.20

另外, 对于顶角很小的圆锥壳( $\frac{R_2}{R_1} < 1.5$ ), 其固有频率可以近似取用  $R$  为  $\frac{R_1 + R_2}{2}$  的相应边界条件圆柱壳结果, 其误差不大于 20% [106]。

## 二、开口锥壳的固有振动

对于直线边为简支边界条件的开口锥壳, 可设振型解

$$U(s, \theta) = \bar{U}(s) \sin \frac{n\pi}{\theta_0} \theta \quad (11.28a)$$

$$V(s, \theta) = \bar{V}(s) \cos \frac{n\pi}{\theta_0} \theta \quad (11.28b)$$

$$W(s, \theta) = \bar{W}(s) \sin \frac{n\pi}{\theta_0} \theta \quad (11.28c)$$

式中  $\theta_0$  为开口锥壳张角。然后代入基本方程 (11.15), 建立类似方程 (11.22) 的  $\bar{U}(s)$ ,  $\bar{V}(s)$ ,  $\bar{W}(s)$  联立常微分方程组, 再用 § 11.3 节类似的幂级数法求解。当然, 当张角  $\theta_0 = \pi$ ,  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{\pi}{3}$  ... 等时, 开口圆锥壳解可以取用相应弧边边界条件的闭合圆锥壳  $n = k, 2k, 3k$  ... 相应结果。

## § 11.5 球壳

### 一、球壳振动的基本方程

球壳是另一种常见的旋转壳, 其中曲面由一个圆绕其直径旋转而成 [14][115][120][140]。球壳的几何参数很为简单, 其中曲面尺寸只取决于球半径  $R$

(图 11.3)。和一般旋转壳一样, 取母线和纬线方向为正交曲线坐标系的两个主方向。中面上一点的坐标用  $(\varphi, \theta)$  来表示,  $\varphi, \theta$  的定义见 § 11.1。即坐标为

$$\alpha = \varphi, \quad \beta = \theta, \quad \gamma = z \quad (11.29a)$$

由于母线为一圆弧, 而且轴线为其直径, 因此有

$$R_\alpha = R_\beta = R_\gamma = R_\theta = R \quad (11.29b)$$

代入式 (11.1c), 有球壳拉梅参数

$$A = R, \quad B = R \sin \varphi \quad (11.29c)$$

将球壳的基本参数 (11.29) 和旋转壳的基本参数 (11.1) 相比较, 可以发现, 球壳相当为  $R_\alpha = R_\beta = R$  特殊情况下的旋转壳。因此, 在式 (11.2), (11.3) (11.4) 中代以  $R_\alpha = R_\beta = R$ , 即可给出球壳的各种基本关系式与方程, 计有:

中面应变表达式

$$\varepsilon_\varphi^0 = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} + w \right) \quad (11.30a)$$

$$\varepsilon_\theta^0 = \frac{1}{R_0} \left( u \cos \varphi + \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \sin \varphi \right) \quad (11.30b)$$

$$\varepsilon_{\varphi\theta}^0 = \frac{1}{R_0} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{v}{R_r} \right) \quad (11.30c)$$

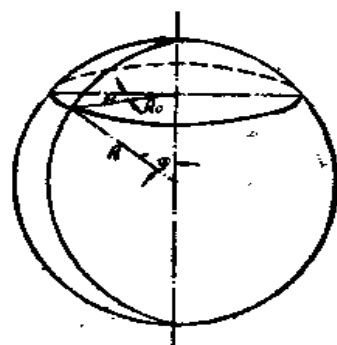


图 11.3

$$x_{\varphi} = -\frac{\partial \theta_{\varphi}}{R \partial \varphi} \quad (11.30d)$$

$$x_{\theta} = \frac{1}{R_0} \left( \frac{\partial \theta_{\theta}}{\partial \theta} + \theta_{\varphi} \cos \varphi \right) \quad (11.30e)$$

$$x_{\varphi\theta} = -\frac{1}{R_0} \frac{\partial \theta_{\varphi}}{\partial \theta} + \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\theta_{\theta}}{R_0} \right) \quad (11.30f)$$

$$\theta_{\varphi} = \frac{1}{R} \left( u - \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \quad (11.30g)$$

$$\theta_{\theta} = -\frac{1}{R_0} \left( v \sin \varphi - \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \quad (11.30h)$$

动平衡方程

$$\frac{\partial(R_0 N_{\varphi})}{\partial \varphi} + R \frac{\partial N_{\varphi\theta}}{\partial \theta} - R \cos \varphi N_{\theta} + R_0 Q_{\varphi} + R R_0 q_{\varphi} = R R_0 \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (11.31a)$$

$$\frac{\partial(R_0 N_{\theta\theta})}{\partial \varphi} + R \frac{\partial N_{\theta}}{\partial \theta} + R \cos \varphi N_{\varphi\theta} + R_0 Q_{\theta} + R R_0 q_{\theta} = R R_0 \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (11.31b)$$

$$\frac{\partial(R_0 Q_{\varphi})}{\partial \varphi} + R \frac{\partial Q_{\theta}}{\partial \theta} - R_0 (N_{\varphi} + N_{\theta}) + R R_0 q_{\varphi} = R R_0 \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (11.31c)$$

剪力表达式

$$Q_{\varphi} = \frac{1}{R R_0} \left[ \frac{\partial}{\partial \varphi} (R_0 M_{\varphi}) + R \frac{\partial M_{\varphi\theta}}{\partial \theta} - R \cos \varphi M_{\theta} \right] \quad (11.31d)$$

$$Q_{\theta} = \frac{1}{R R_0} \left[ \frac{\partial}{\partial \varphi} (R_0 M_{\varphi\theta}) + R \frac{\partial M_{\theta}}{\partial \theta} + R \cos \varphi M_{\varphi\theta} \right] \quad (11.31e)$$

而内力表达式仍为式 (11.3)。上述诸式中有

$$R_0 = R \sin \varphi \quad (11.29d)$$

将式 (11.30) 代入式 (11.3)，再代入式 (11.31)，可得关于  $u, v, w$  的基本微分方程组。非完整球壳的边界条件按式 (11.5) 为

$$\varphi = \varphi_{01} \quad u = 0 \text{ 或 } N_{\varphi} = 0 \quad (11.32a)$$

$$v = 0 \text{ 或 } N_{\varphi\theta} + \frac{M_{\varphi\theta}}{R} = 0 \quad (11.32b)$$

$$u - \frac{\partial w}{\partial \varphi} = 0 \text{ 或 } M_{\varphi} = 0 \quad (11.32c)$$

$$w = 0 \text{ 或 } Q_{\varphi} + \frac{\partial M_{\varphi\theta}}{R_0 \partial \theta} = 0 \quad (11.32d)$$

$$\theta = \theta_{01} \quad v = 0 \text{ 或 } N_{\theta} = 0 \quad (11.32e)$$

$$u = 0 \text{ 或 } N_{\varphi\theta} + \frac{M_{\varphi\theta}}{R} = 0 \quad (11.32f)$$

$$v \sin \varphi - \frac{\partial w}{\partial \theta} = 0 \text{ 或 } M_{\theta} = 0 \quad (11.31g)$$

$$w = 0 \text{ 或 } Q_{\theta} + \frac{\partial M_{\theta\varphi}}{R \partial \varphi} = 0 \quad (11.32h)$$

## 二、球壳轴对称振动一般解法

球壳一般性振动十分复杂。这里只研究常见的轴对称振动，但仍认为是有矩的和有限深

度的<sup>[181]</sup>。关于无矩球壳及扁球壳振动情况将专门分别在下两章讲述。

在轴对称情况下，式 (11.30)， (11.3)， 方程 (11.31)， 边界条件 (11.32) 中对  $\theta$  偏导数项及所有非轴对称分量  $v, \varepsilon_{\theta\theta}^0, x_{\varphi\theta}, \theta_0, N_{\varphi\theta}, M_{\varphi\theta}, q_\theta$  均为零，同时式 (11.30c)， (11.30f)， (11.30h)， (11.3c)， (11.3f)， (11.31b)， (11.31e) 等均消失。最后，只剩下十二个变量： $u, w, \varepsilon_{\varphi\varphi}^0, \varepsilon_{\theta\theta}^0, x_{\varphi\varphi}, x_{\theta\theta}, \theta_{\varphi\varphi}, N_{\varphi\varphi}, N_{\theta\theta}, M_{\varphi\varphi}, M_{\theta\theta}, Q_{\varphi\varphi}$  所应满足的十二个方程：(11.30a)， (11.30b)， (11.30d)， (11.30e)， (11.30g)， (11.3a)， (11.3b)， (11.3d)， (11.3e)， (11.31a)， (11.31c)， (11.31d)。下面将进一步整理合并成只有二个变量的联立方程组。

先由式 (11.30a)， (11.30d)， (11.3a)， (11.3b) 合并为一个协调方程

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} (N_\theta - \nu N_\varphi) + (\nu + \sec^2 \varphi) N_\theta - (1 + \nu \sec^2 \varphi) N_\varphi \\ = \frac{Eh}{R} \operatorname{tg} \varphi \left( \frac{\partial w}{\partial \varphi} + w \operatorname{tg} \varphi \right) \end{aligned} \quad (11.33a)$$

再由式 (11.31a)， (11.31d) 导出由中面位移表达的剪力

$$Q_\varphi = -\frac{D}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \nabla^2 w + \frac{2}{R^2} w \right] + \frac{\rho(1-\nu^2)}{R} \frac{D}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (11.33b)$$

其中

$$\nabla^2 = \frac{1}{R^2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \operatorname{ctg} \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \quad (11.34)$$

由式 (11.3a)， (11.3b) 及 (11.30b) 可推出

$$u = \operatorname{tg} \varphi \left[ \frac{R}{Eh} (N_\theta - \nu N_\varphi) - w \right] \quad (11.33c)$$

现引入应力函数  $f(\varphi, t)$ ，和薄膜力的关系具有

$$N_\varphi = \operatorname{ctg} \varphi \frac{\partial f}{\partial \varphi} + f - \frac{\rho(1+\nu)R^2}{E} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{D}{R} \left( \nabla^2 + \frac{2}{R^2} \right) w \quad (11.35a)$$

$$N_\theta = \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + f - \frac{\rho(1+\nu)R^2}{E} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{D}{R} \left( \nabla^2 + \frac{2}{R^2} \right) w \quad (11.35b)$$

再将式 (11.33c)， (11.35) 代入方程 (11.31a) 可得

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} L_1(f, w) = 0 \quad (11.36a)$$

将式 (11.35) 代入式 (11.33a) 有

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} L_1(f, w) = 0 \quad (11.36b)$$

从而给出第一个基本方程

$$\begin{aligned} L_1(f, w) = \nabla^2 f + (1-\nu)f - \frac{\rho(1-\nu^2)R^2}{E} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + (1-\nu) \frac{D}{R} \left( \nabla^2 + \frac{2}{R^2} \right) w \\ - \frac{Eh}{R} w = 0 \end{aligned} \quad (11.37a)$$

另一个基本方程可由式 (11.33b) 代入式 (11.31c)，并用式 (11.35) 消去  $N_\varphi, N_\theta$  得

$$R^2 \left( \nabla^2 + \frac{2}{R^2} \right) f + \frac{\rho(1+\nu)R^2}{E} \left( \frac{h^2}{12} \nabla^2 - 2 \right) \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + DR \left( \nabla^2 + \frac{2}{R^2} \right) \left( \nabla^2 \right.$$



$$+ \frac{2}{R^2} \Big) w + \rho h R \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (11.37b)$$

进一步将式 (11.37a), (11.37b) 消去  $f$ , 并代入无量纲频率系数

$$\Omega^2 = \omega^2 R^2 \frac{\rho}{E} \quad (11.38a)$$

可得  $w$  振型  $W(\varphi)$  所满足基本方程

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 W + \frac{1}{R^2} [4 + (1 - \nu^2) \Omega^2] \nabla^2 \nabla^2 W + \frac{12(1 - \nu^2)}{h^2 R^2} (1 - \Omega^2) \nabla^2 W \\ + \frac{12(1 - \nu^2)}{h^2 R^4} \{2 + \Omega^2 [1 + 3\nu - (1 - \nu^2) \Omega^2]\} W = 0 \end{aligned} \quad (11.39)$$

其解

$$W(\varphi) = \sum_{i=1}^3 [A_i P_{n_i}(\cos \varphi) + B_i Q_{n_i}(\cos \varphi)] \quad (11.40a)$$

式中

$$n_i = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \lambda_i} \quad (11.38b)$$

而  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 为下列三次代数方程的三个根:

$$\begin{aligned} \lambda^3 - [4 + (1 - \nu^2) \Omega^2] \lambda^2 + \frac{1 - \nu^2}{k} (1 - \Omega^2) \lambda \\ - \frac{1 - \nu^2}{k} \{2 + \Omega^2 [1 + 3\nu - (1 - \nu^2) \Omega^2]\} = 0 \end{aligned} \quad (11.41)$$

式中

$$k = \frac{h^2}{12R^2} \quad (11.38c)$$

$P_{n_i}(x)$ ,  $Q_{n_i}(x)$  分别为第一、二类球面函数<sup>[143]</sup>。

将解 (11.40a) 代入方程 (11.37b), 可解出  $f$  振型  $F(\varphi)$  解

$$\begin{aligned} F(\varphi) = \frac{Eh}{R} \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{\Omega^2 - \frac{k}{1 - \nu^2} (2 - \lambda_i)^2}{(1 + \nu) \Omega^2 (k \lambda_i + 2) + (2 - \lambda_i)} \right] [A_i P_{n_i}(\cos \varphi) \\ + B_i Q_{n_i}(\cos \varphi)] \end{aligned} \quad (11.40b)$$

有了  $W(\varphi)$ ,  $F(\varphi)$ , 则可进一步求取其它力学量的振型解。这些解中包含六个待定系数:

$A_i$ ,  $B_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), 它们取决于每端三个边界条件

$$\varphi = \varphi_0: \quad u = 0 \text{ 或 } N_\varphi = 0 \quad (11.42a)$$

$$u - \frac{\partial w}{\partial \varphi} = 0 \text{ 或 } M_\varphi = 0 \quad (11.42b)$$

$$w = 0 \text{ 或 } Q_\varphi = 0 \quad (11.42c)$$

例如,

$$\text{固定端:} \quad u = \frac{\partial w}{\partial \varphi} = w = 0 \quad (11.43a)$$

$$\text{自由端:} \quad N_\varphi = M_\varphi = Q_\varphi = 0 \quad (11.43b)$$

$$\text{中而自由的简支端:} \quad N_\varphi = M_\varphi = w = 0 \quad (11.43c)$$

$$\text{中面约束的简支端:} \quad u = M_\varphi = w = 0 \quad (11.43d)$$

将解 (11.40) 代入边界条件 (11.42), 可建立关于系数  $A_i, B_i$  的齐次线代方程组, 为求取非另解, 给出系数行列式为零的频率方程

$$|D_{ji}| = 0 \quad (11.44)$$

若球壳为两端开口, 则有六个边界条件, 因此方程 (11.44) 中  $j, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ; 若球壳为一端开口, 则有三个边界条件, 考虑到在  $\varphi = 0$  处,  $Q_{\alpha}(x)$  奇异, 故有  $B_i = 0$ , 从而建立  $A_i$  齐次线代方程组, 相应频率方程 (11.44) 中  $j, i = 1, 2, 3$ 。

有了上述诸式即可求取频率系数  $\Omega_n$  及相应振型系数  $A_{in}$  (12.5)。球壳的频率系数取决于厚径比  $\frac{h}{R}$ , 张角  $\varphi_0$ , 边界条件及阶次  $n$ 。例如, 对于给定  $\frac{h}{R} = 0.05$ ,  $\varphi_0 = 60^\circ$  之各种边界条件一端开口球壳各阶频率系数见表 11.6。显然, 边界约束越强, 频率越高。对于给定  $\varphi_0 = 60^\circ$ ,  $90^\circ$  之不同  $\frac{h}{R}$  的一端自由球壳各阶频率系数见表 11.7。可以看出, 张角越小, 频率随  $\frac{h}{R}$  变化越明显。对于自由端球壳, 当  $\varphi_0 \rightarrow 180^\circ$  时所给出完全球壳频率系数列于表 11.8。

各种边界条件开口球壳的频率系数  $\Omega_n$  ( $\frac{h}{R} = 0.05, \varphi_0 = 60^\circ, \nu = 0.3$ )

表 11.6

n	自 由	简 支		固 定
		中面自由	中面约束	
1	0.931	0.995	0.962	1.006
2	1.088	1.381	1.334	1.391
3	1.533	2.110	2.128	2.375
4	2.348	2.546	3.176	3.486
5	2.544	3.183	3.988	3.991
6	3.497	4.563	4.575	4.974
7	4.951	5.530	6.231	6.690

自由端开口球壳的频率系数  $\Omega_n$  ( $\nu = 0.3$ )

表 11.7

$\varphi_0 \backslash \frac{h}{R}$		0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
60°	1	0.901	0.904	0.909	0.915	0.922	0.931
	2	0.971	0.979	0.998	1.01	1.04	1.09
	3	0.985	1.02	1.11	1.21	1.35	1.53
90°	1	0.868	0.870	0.872	0.875	0.878	0.891
	2	0.942	0.946	0.955	0.967	0.983	1.00
	3	0.978	0.988	1.01	1.03	1.07	1.12

完全球壳的频率系数 $\Omega$ , ( $\nu = 0.3$ )

表11.8

$n \backslash h/R$	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
1	0.748	0.745	0.742	0.751	0.754
2	0.880	0.883	0.886	0.889	0.893
3	0.933	0.938	0.942	0.947	0.953
4	0.961	0.974	0.989	1.01	1.04
5	0.978	0.999	1.04	1.09	1.14
6	0.993	1.04	1.10	1.17	1.26
7	1.01	1.09	1.19	1.31	1.43
8	1.05	1.14	1.24	1.41	1.65

## 第十二章 扁壳的振动

上面两章我们讨论了两类主要壳体：圆柱壳与旋转壳的振动问题。可以看出，壳体振动分析是相当困难与繁琐的。为了工程上实用目的，多年来曾相继发展过多种壳体振动工程理论。这些工程理论的特点是引入一系列假定，使分析大为简化，当然也会带来一定误差，但是各种工程理论在特定使用范围内还是具有足够精度，能满足工程计算需要。这方面最主要的是扁壳理论与无矩壳理论。这将在下面两章分别介绍。

### § 12.1 基本方程的简化

所谓“扁壳”是指壳体的矢高远小于壳体所覆盖的底面的最小尺寸（一般两者比小于 1/5）的一类壳体<sup>〔114〕〔128〕〔228〕</sup>。从外形来看，很接近于与其底面相应的平板。同平板一样，在这样壳体中体内任一点位移有法向位移( $w$ )远大于中面方向位移( $u, v$ )的特点，因此可以在曲率及扭曲率表达式中只保留 $w$ 项，而略去 $u, v$ 项；动平衡中保留法向惯性力而略去中面方向的惯性力；另外，如同平面力平板一样，薄膜力的平衡不计入横向剪力影响<sup>〔288〕</sup>。

上述这些基本假定实际上就是我们在 § 9.11 中介绍的壳体振动的唐纳尔简化理论（简称“简化理论”）的主要假定。这一简化理论我们在前面已多次用过，不过那是用于一般尺寸的壳体。对于扁壳，则除了这一简化理论的所有基本方程均成立外，还进一步引入扁壳几何上特点： $\varphi$ （对圆柱壳为 0） $\ll \frac{\pi}{2}$ ，也即  $\cos \varphi \approx 1$ ， $\sin \varphi \approx \varphi$ 。

为了分析方便，下面将列出在 § 9.11 及第九章有关各节中所建立的简化理论基本关系式及方程，作为扁壳振动分析的基础。

中面应变表达式按式 (9.27)，(9.72)，(9.71) 有

$$e_{\alpha}^0 = \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{v}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{w}{R_{\alpha}} \quad (12.1a)$$

$$e_{\beta}^0 = \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{u}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{w}{R_{\beta}} \quad (12.1b)$$

$$e_{\alpha\beta}^0 = \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{u}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{v}{B} \right) \quad (12.1c)$$

$$\kappa_{\alpha} = -\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) - \frac{1}{AB^2} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial w}{\partial \beta} \quad (12.1d)$$

$$\kappa_{\beta} = -\frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) - \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \quad (12.1e)$$

$$\kappa_{\alpha\beta} = -\frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{A^2} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) - \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{B^2} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) \quad (12.1f)$$

$$\theta_{\alpha} = -\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \quad (12.1g)$$

$$\theta_\beta = -\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \quad (12.1h)$$

内力表达式按式 (9.35) 有

$$N_\alpha = K(\varepsilon_\alpha^0 + \nu \varepsilon_\beta^0) \quad (12.2a)$$

$$N_\beta = K(\varepsilon_\beta^0 + \nu \varepsilon_\alpha^0) \quad (12.2b)$$

$$N_{\alpha\beta} = N_{\beta\alpha} = K \frac{(1-\nu)}{2} \varepsilon_{\alpha\beta}^0 \quad (12.2c)$$

$$M_\alpha = D(\kappa_\alpha + \nu \kappa_\beta) \quad (12.2d)$$

$$M_\beta = D(\kappa_\beta + \nu \kappa_\alpha) \quad (12.2e)$$

$$M_{\alpha\beta} = M_{\beta\alpha} = D \frac{(1-\nu)}{2} \kappa_{\alpha\beta} \quad (12.2f)$$

动平衡方程按式 (9.73a), (9.73b), (9.40c) 有

$$\frac{\partial(BN_\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial(AN_{\beta\alpha})}{\partial \beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} N_\beta + \frac{\partial A}{\partial \beta} N_{\alpha\beta} = 0 \quad (12.3a)$$

$$\frac{\partial(AN_\beta)}{\partial \beta} + \frac{\partial(BN_{\alpha\beta})}{\partial \alpha} - \frac{\partial A}{\partial \beta} N_\alpha + \frac{\partial B}{\partial \alpha} N_{\beta\alpha} = 0 \quad (12.3b)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \frac{1}{A} \left[ \frac{\partial(BM_\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial(AM_{\beta\alpha})}{\partial \beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_\beta + \frac{\partial A}{\partial \beta} M_{\alpha\beta} \right] \right\} \\ & + \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ \frac{1}{B} \left[ \frac{\partial(AM_\beta)}{\partial \beta} + \frac{\partial(BM_{\alpha\beta})}{\partial \alpha} - \frac{\partial A}{\partial \beta} M_\alpha + \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_{\beta\alpha} \right] \right\} \\ & - AB \left( \frac{N_\alpha}{R_\alpha} + \frac{N_\beta}{R_\beta} \right) + AB \left( q_r - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (12.3c)$$

剪力表达式按式 (9.39) 有

$$Q_\alpha = \frac{1}{AB} \left[ \frac{\partial(BM_\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial(AM_{\beta\alpha})}{\partial \beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_\beta + \frac{\partial A}{\partial \beta} M_{\alpha\beta} \right] \quad (12.3d)$$

$$Q_\beta = \frac{1}{AB} \left[ \frac{\partial(AM_\beta)}{\partial \beta} + \frac{\partial(BM_{\alpha\beta})}{\partial \alpha} - \frac{\partial A}{\partial \beta} M_\alpha + \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_{\beta\alpha} \right] \quad (12.3e)$$

扁壳振动的基本微分方程按式 (9.76) 为

$$D \nabla^2 \nabla^2 w + \nabla_1^2 f + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q_r \quad (12.4a)$$

$$Eh \nabla_1^2 w - \nabla^2 \nabla^2 f = 0 \quad (12.4b)$$

按式 (9.74), 则其中算子

$$\nabla^2 = \frac{1}{AB} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \right] \quad (12.5a)$$

$$\nabla_1^2 = \frac{1}{AB} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{B}{AR_\beta} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{A}{BR_\alpha} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \right] \quad (12.5b)$$

边界条件按式 (9.41), 对齐次边界有

$$\alpha = \alpha_0: \quad u = 0 \text{ 或 } N_\alpha = 0 \quad (12.6a)$$

$$v = 0 \text{ 或 } N_{\alpha\beta} + \frac{M_{\alpha\beta}}{R_\beta} = 0 \quad (12.6b)$$

$$\theta_\alpha = 0 \text{ 或 } M_\alpha = 0 \quad (12.6c)$$

$$w = 0 \text{ 或 } Q_\alpha + \frac{1}{B} \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \beta} = 0 \quad (12.6d)$$

$$\beta = \beta_0, \quad v = 0 \text{ 或 } N_\beta = 0 \quad (12.6e)$$

$$u = 0 \text{ 或 } N_\alpha + \frac{M_{\beta\alpha}}{R_\alpha} = 0 \quad (12.6f)$$

$$\theta_\beta = 0 \text{ 或 } M_\beta = 0 \quad (12.6g)$$

$$w = 0 \text{ 或 } Q_\beta + \frac{1}{A} \frac{\partial M_{\beta\alpha}}{\partial \alpha} = 0 \quad (12.6h)$$

方程 (12.4) 中  $f$  为应力函数, 与薄膜力的关系按式 (9.75) 有

$$N_\alpha = \frac{1}{B} \left[ \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{B} \frac{\partial f}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{A^2} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial f}{\partial \alpha} \right] \quad (12.7a)$$

$$N_\beta = \frac{1}{A} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial f}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{B^2} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial f}{\partial \beta} \right] \quad (12.7b)$$

$$N_{\alpha\beta} = N_{\beta\alpha} = \frac{1}{AB} \left[ \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial f}{\partial \beta} - \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta} \right] \quad (12.7c)$$

将式 (12.1d—f) 代入式 (12.2d—f) 有

$$M_\alpha = -D \left\{ \left[ \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{AB^2} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right] + \nu \left[ \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right] \right\} \quad (12.7d)$$

$$M_\beta = -D \left\{ \left[ \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{AB^2} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right] + \nu \left[ \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{AB^2} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right] \right\} \quad (12.7e)$$

$$M_{\alpha\beta} = M_{\beta\alpha} = -D \frac{(1-\nu)}{2} \left[ \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{A^2} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{B^2} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) \right] \quad (12.7f)$$

从式 (12.7), (12.3) 可以看出, 薄膜力只与  $f$  有关, 弯矩、扭矩、剪力只与  $w$  有关。根据基本方程 (12.4), 按边界条件 (12.5), 解出  $f$  与  $w$  后, 其它力学量即可按上述公式进行计算。

在平板特殊情况下,  $\frac{1}{R_\alpha} = \frac{1}{R_\beta} = 0$ , 按式 (12.5b) 有  $\nabla^2 w = \nabla^2 f = 0$ , 所以基本方程 (12.4) 化为

$$D \nabla^2 \nabla^2 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q, \quad (12.8a)$$

$$\nabla^2 \nabla^2 f = 0 \quad (12.8b)$$

这就是大家熟知的平板振动方程 (12.8a) 及平面问题方程 (12.8b), 其中  $f$  即为平面问题中的艾雷 (Airy) 应力函数。因此扁壳振动方程可以看成是平板振动方程和平面问题方程加上由于曲率造成耦合 ( $\nabla^2$ ) 项而成。所以扁壳又称“曲板”。

## § 12.2 球形扁壳振动的一般解

若扁壳是球壳 (图11.3) 的一部分, 则为球形扁壳<sup>[200]</sup>。在上述诸方程中引入 § 11.5 球壳基本关系式

$$\alpha = \varphi, \quad \beta = \theta, \quad R_\alpha = R_\beta = R, \quad A = R, \quad B = R \sin \varphi = R \cdot \varphi \quad (12.9a)$$

则有算于间关系

$$\nabla_1^2 = \frac{1}{R} \nabla^2 \quad (12.9b)$$

因此有基本方程

$$D \nabla^2 \nabla^2 w + \frac{1}{R} \nabla^2 f + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q_v \quad (12.10a)$$

$$\frac{Eh}{R} \nabla^2 w - \nabla^2 \nabla^2 f = 0 \quad (12.10b)$$

式中算子

$$\nabla^2 = \frac{1}{R^2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{\varphi^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right\} \quad (12.11)$$

由式 (12.10) 可得  $w, f$  的振型  $W, F$  所满足的振型方程

$$D \nabla^2 \nabla^2 W + \frac{1}{R} \nabla^2 F - \rho h \omega^2 W = 0 \quad (12.12a)$$

$$\frac{Eh}{R} \nabla^2 W - \nabla^2 \nabla^2 F = 0 \quad (12.12b)$$

若引入新的函数  $\Phi(\varphi, \theta)$ , 其和  $W, F$  的关系为

$$W = \frac{1}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 \Phi \quad (12.13a)$$

$$F = \frac{1}{R} \nabla^2 \Phi \quad (12.13b)$$

则方程 (12.12b) 自动满足, 再代入方程 (12.12a) 可得  $\Phi$  满足的基本方程

$$\frac{D}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \Phi + \frac{1}{R^2} \nabla^2 \nabla^2 \Phi - \frac{\rho}{E} \omega^2 \nabla^2 \nabla^2 \Phi = 0 \quad (12.14)$$

进一步设解

$$\Phi(\varphi, \theta) = \psi(\varphi) \cos n\theta \quad (12.15a)$$

则有

$$\nabla^2 \Phi = \left[ \frac{d^2 \psi}{ds^2} + \frac{1}{s} \frac{d\psi}{ds} - \frac{n^2}{s^2} \right] \cos n\theta \quad (12.15b)$$

其中引入

$$s = R\varphi \quad (12.15c)$$

代入方程 (12.14) 有

$$L_1 \cdot L_2(\psi) = 0 \quad (12.16a)$$

进一步分解为两个方程

$$L_1(\psi) = \left( \frac{d^2}{ds^2} + \frac{1}{s} \frac{d}{ds} - \frac{n^2}{s^2} \right)^2 \psi(s) = 0 \quad (12.17a)$$

$$L_2(\psi) = \left[ \frac{D}{Eh} \left( \frac{d^2}{ds^2} + \frac{1}{s} \frac{d}{ds} - \frac{n^2}{s^2} \right)^2 + \left( \frac{1}{R^2} - \frac{\rho}{E} \omega^2 \right) \right] \psi(s) = 0 \quad (12.16b)$$

方程 (12.16b) 再分解为两个方程

$$L_2(\psi) = \frac{d^2 \psi}{ds^2} + \frac{1}{s} \frac{d\psi}{ds} + \left( \pm \alpha^2 - \frac{n^2}{s^2} \right) \psi = 0 \quad (12.17b)$$

式中

$$\alpha^2 = \left( \frac{\rho}{E} \omega^2 - \frac{1}{R^2} \right) \frac{Eh}{D} \quad (12.18)$$

因此基本方程一般解由式 (12.17) 的二个方程通解组成。可以发现, 方程 (12.17a) 类同于圆板静力问题的非对称弯曲方程<sup>[358]</sup>。 $\psi(s)$ 相当其挠度解中相应 $\sin n\theta$ 分量的径向分布函数, 因此有解

$$\psi_1(s) = C_1 g_{1n}(s) + C_2 g_{2n}(s) + C_3 g_{3n}(s) + C_4 g_{4n}(s) \quad (12.19a)$$

式中

$$g_{1n} = \begin{cases} 1 \\ s \\ s^n \end{cases}, \quad g_{2n} = \begin{cases} \lg s \\ s^{-1} \\ s^{-n} \end{cases}, \quad g_{3n} = \begin{cases} s^2 \\ s^3 \\ s^{n+2} \end{cases}, \quad g_{4n} = \begin{cases} s^2 \lg s (n=0) \\ s \lg s (n=1) \\ s^{-n+2} (n \geq 2) \end{cases} \quad (12.20)$$

方程 (12.17b) 类同于圆板振型的径向函数方程 (4.4b), 因此有解

$$\psi_2(s) = C_5 J_n(as) + C_6 Y_n(as) + C_7 I_n(as) + C_8 K_n(as) \quad (12.19b)$$

式中 $J_n$ ,  $Y_n$ ,  $I_n$ ,  $K_n$ 分别为 $n$ 阶第一、二类及第一、二类修正贝塞尔函数<sup>[359]</sup>。则球形扁壳振动方程一般解

$$\psi(s) = \psi_1(s) + \psi_2(s) \quad (12.19c)$$

式中八个待定系数由两端八个边界条件 (12.6) 确定。

对于封顶扁壳, 考虑到解中某些函数在 $s=0$ 的奇异性, 有 $C_2=C_4=C_6=C_8=0$ , 所以一般解为

$$\psi(s) = C_1 s^n + C_3 s^{n+2} + C_5 J_n(as) + C_7 I_n(as) \quad (12.21)$$

式中四个系数由边界 $\varphi=\varphi_0$ 的四个边界条件确定为齐次线代方程组, 由系数行列式为零给出频率方程, 从而求取固有频率及相应振型。

例如, 边界固定的球形扁壳<sup>[128][161]</sup>有边界条件

$$s=s_0=R\varphi_0, \quad u=v=\frac{\partial w}{\partial s}=w=0 \quad (12.22)$$

由式 (12.21) 可得频率方程

$$\begin{aligned} & \left\{ (as_0)^2 \left[ -1 + \frac{3-\nu}{1+\nu} \left( \frac{as_0}{\lambda} \right)^4 \right] - 8n(n+1) \right\} (as_0) I_n(as_0) J_{n-1}(as_0) \\ & - \left\{ (as_0)^2 \left[ -1 + \frac{3-\nu}{1+\nu} \left( \frac{as_0}{\lambda} \right)^4 \right] + 8n(n+1) \right\} (as_0) I_{n-1}(as_0) J_n(as_0) \\ & + 16n^2(n+1) J_n(as_0) I_n(as_0) + 4(n+1)(as_0)^2 J_{n-1}(as_0) I_{n-1}(as_0) = 0 \end{aligned} \quad (12.23a)$$

式中无量纲几何参数

$$\lambda^4 = 12(1-\nu^2)s_0^4/R^2h^2 \quad (12.23b)$$

从频率方程 (12.23a) 可以看出无量纲频率系数

$$(as_0)^4 = 12(1-\nu^2) \left( \frac{s_0}{h} \right)^2 \left[ \Omega^2 - \left( \frac{s_0}{R} \right)^2 \right] \quad (12.23c)$$

$$\Omega^2 = \frac{\rho s_0^2}{E} \omega^2 \quad (12.23d)$$

只取决于无量纲几何参数 $\lambda$ , 振型周向波数 $n$ 以及泊松比 $\nu$ , 而对应每组 $\lambda, n, \nu$ , 方程 (12.23a) 又有一系列 $(as_0)_{n,m}$  ( $m=1, 2, 3, \dots$ )。具体计算结果列于表12.1。从表中可以得到十分有用启示, 这将在下面再详加讨论。



周边固定球形扁壳频率系数( $\alpha S_0$ )( $\nu=0.3$ )

表12.1

$n$	$\lambda$ $m$	0	2.5	5.0	7.5	10.0	15.0	20.0
1	1	4.611	4.628	4.865	5.555	6.383	7.006	7.103
	2	7.799	7.801	7.828	7.956	8.389	9.988	10.42
	3	10.96	10.96	10.97	10.99	11.07	11.20	13.42
2	1	5.905	5.912	6.005	6.346	6.964	7.971	8.234
	2	9.197	9.198	9.213	9.279	9.478	10.64	11.52
	3	12.40	12.40	12.41	12.42	12.47	12.89	14.21
3	1	7.144	7.146	7.190	7.364	7.749	8.780	9.279
	2	10.54	10.54	10.55	10.59	10.69	11.40	12.45
	3	13.90	13.80	13.80	13.81	13.84	14.09	14.95
4	1	8.347	8.348	8.371	8.468	8.701	9.549	10.23
	2	11.84	11.84	11.84	11.87	11.94	12.37	13.28
	3	15.15	15.15	15.15	15.16	15.18	15.34	15.86

## § 12.3 球形扁壳的轴对称振动

上面讨论的球形扁壳固有振动解可适合于包括非轴对称振动的一般性情况(即  $n$  是任意正整数)。但实际常见的是轴对称振动( $n=0$ )。在轴对称振动情况下方程可以进一步简化<sup>[219]</sup>, 即有关方程及关系式中  $v = s_{\varphi}^0 = x_{\varphi} = \theta_{\varphi} = N_{\varphi} = M_{\varphi} = 0$  及一切量对  $\theta$  偏导数为零。振型方程仍为

$$D\nabla^2\nabla^2W + \frac{1}{R}\nabla^2F - \rho h\omega^2W = 0 \quad (12.24a)$$

$$\frac{Eh}{R}\nabla^2W - \nabla^2\nabla^2F = 0 \quad (12.24b)$$

但式中

$$\nabla^2 = \frac{1}{R^2}\left[\frac{d^2}{d\varphi^2} + \frac{1}{\varphi}\frac{d}{d\varphi}\right] = \left[\frac{d^2}{ds^2} + \frac{1}{s}\frac{d}{ds}\right] \quad (12.24c)$$

将式(12.24a)进行  $\frac{Eh}{R}\nabla^2$  运算; 对式(12.24b)进行  $D\nabla^2\nabla^2$  运算, 然后相减, 并代入按式(12.13a), (12.13b), 所给出的关系式, 有

$$W = \frac{R}{Eh}\nabla^2F \quad (12.13c)$$

$$D\nabla^2\nabla^2\nabla^2\nabla^2F + \frac{Eh}{R^2}\nabla^2\nabla^2F - \rho h\omega^2\nabla^2\nabla^2F = 0 \quad (12.25)$$

方程(12.25)为八阶常微分方程, 类似方程(12.14)之  $n=0$  解(12.15a), (12.19), (12.20), 有解

$$F(s) = C_1 + C_2 \lg s + C_3 s^2 + C_4 s^2 \lg s + C_5 J_0(as) + C_6 Y_0(as) \\ + C_7 I_0(as) + C_8 K_0(as) \quad (12.26a)$$

代入式 (12.13c), 并注意到贝塞尔函数公式

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 J_0 &= -\alpha^2 J_0, & \nabla^2 Y_0 &= -\alpha^2 Y_0 \\ \nabla^2 I_0 &= \alpha^2 I_0, & \nabla^2 K_0 &= \alpha^2 K_0 \end{aligned} \right\} \quad (12.27)$$

有  $W$  解

$$W(s) = B_1 + B_2 \lg s + B_3 J_0(\alpha s) + B_4 Y_0(\alpha s) + B_5 I_0(\alpha s) + B_6 K_0(\alpha s) \quad (12.26b)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= \frac{4R}{Eh}(C_3 + C_4), & B_2 &= \frac{4R}{Eh}C_4 \\ B_3 &= -\frac{R\alpha^2}{Eh}C_6, & B_4 &= -\frac{R\alpha^2}{Eh}C_7 \\ B_5 &= \frac{R\alpha^2}{Eh}C_7, & B_6 &= \frac{R\alpha^2}{Eh}C_8 \end{aligned} \right\} \quad (12.28)$$

对于封顶扁壳, 考虑到  $s = 0$  处解成立, 有解

$$W(s) = B_1 + B_3 J_0(\alpha s) + B_5 I_0(\alpha s) \quad (12.29a)$$

$$F(s) = C_1 + \frac{Eh}{4R} B_1 s^2 - \frac{Eh}{R\alpha^2} [B_3 J_0(\alpha s) - B_5 I_0(\alpha s)] \quad (12.29b)$$

式中常数  $C_1$  对位移、应力均无意义, 其它三个常数  $B_1, B_3, B_5$  由周边边界条件定。

固定边球扁壳 振型边界条件为

$$U(s_0) = 0 \quad (12.30a)$$

$$\frac{dW}{ds}(s_0) = 0 \quad (12.30b)$$

$$W(s_0) = 0 \quad (12.30c)$$

将解 (12.29a) 代入式 (12.30b), (12.30c) 给出二个方程

$$B_1 + B_3 J_0(\alpha s_0) + B_5 I_0(\alpha s_0) = 0 \quad (12.31a)$$

$$B_3 J'_0(\alpha s_0) + B_5 I'_0(\alpha s_0) = 0 \quad (12.31b)$$

再由式 (12.1b), 考虑到球扁壳基本关系 (12.9a), 代入式 (12.30), 有结果

$$e_\theta^0(s_0) = \frac{1}{R\varphi} \frac{\partial U(s_0)}{\partial \theta} + \frac{W(s_0)}{R} = 0 \quad (12.32a)$$

而按内力关系式 (12.2a), (12.2b) 又有

$$e_\theta^0 = \frac{1}{Eh}(N_\theta - \nu N_\varphi) \quad (12.32b)$$

将上面二式相结合, 并注意到  $N_\theta, N_\varphi$  表达式 (12.7a), (12.7b) 现为

$$N_\varphi = \frac{1}{s} \frac{\partial F}{\partial s}, \quad N_\theta = \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} \quad (12.32c)$$

则有

$$\begin{aligned} [F'' - \nu s^{-1} F']_{s=s_0} &= [\nabla^2 F - (1+\nu)s^{-1} F']_{s=s_0} \\ &= \left[ \frac{Eh}{R} W - (1+\nu)s^{-1} F' \right]_{s=s_0} = 0 \end{aligned} \quad (12.32d)$$

此式代入解 (12.29) 得第三个方程

$$\left[ B_1 + B_3 J_0 + B_5 I_0 - \frac{1+\nu}{2} B_1 - \frac{1+\nu}{\alpha s} (-B_3 J'_0 + B_5 I'_0) \right]_{s=s_0}$$

$$= \frac{1-\nu}{2} B_1 + \left[ J_0(s_0) - \frac{1+\nu}{\alpha s_0} J_1(s_0) \right] B_3 + \left[ I_0(s_0) - \frac{1+\nu}{\alpha s_0} I_1(s_0) \right] B_5 = 0 \quad (12.31c)$$

从而给出频率方程

$$\begin{pmatrix} 1 & J_0(\alpha s_0) & I_0(\alpha s_0) \\ 0 & -J_1(\alpha s_0) & I_1(\alpha s_0) \\ \frac{1-\nu}{2} & \left[ J_0(s_0) - \frac{1+\nu}{\alpha s_0} J_1(s_0) \right] & \left[ I_0(s_0) - \frac{1+\nu}{\alpha s_0} I_1(s_0) \right] \end{pmatrix} = 0 \quad (12.33)$$

由方程 (12.33) 可以计算出基频系数

$$(\alpha s_0)^4 = 12(1-\nu) \left( \frac{s_0}{h} \right)^2 \left[ \Omega^2 - \left( \frac{s_0}{R} \right)^2 \right] \quad (12.34a)$$

与无量纲几何参数

$$\lambda^4 = 12(1+\nu)^2 s_0^4 / R^2 h^2 \quad (12.34b)$$

的关系见表12.2。

周边固定球扁壳轴对称振动基频系数 ( $\alpha s_0$ )

表12.2

$\lambda^4$	0	10	20	50	100	200	300	500	700
$(\alpha s_0)$	3.196	3.235	3.273	3.380	3.537	3.792	4.000	4.328	4.575
$\lambda^4$	1000	1400	1800	2000	2500	3000	4000	5000	10000
$(\alpha s_0)$	4.855	5.112	5.285	5.360	5.482	5.570	5.665	5.723	5.828

自由边球扁壳 振型边界条件为

$$N_\varphi^*(s_0) = M_\varphi^*(s_0) = Q_\varphi^*(s_0) = 0 \quad (12.35a)$$

按内力表达式 (12.7), (12.3) 有

$$(s^{-1} F')_{s=s_0} = 0 \quad (12.35b)$$

$$(W^* + \nu s^{-1} W')_{s=s_0} = 0 \quad (12.35c)$$

$$(\nabla^2 W)'_{s=s_0} = 0 \quad (12.35d)$$

将解 (12.29) 代入, 给出下面三个方程

$$B_1 - \frac{2}{\alpha s_0} J_0'(\alpha s_0) B_3 + \frac{2}{\alpha s_0} I_0'(\alpha s_0) B_5 = 0 \quad (12.36a)$$

$$\left[ J_0''(\alpha s_0) + \frac{\nu}{\alpha s_0} J_0'(\alpha s_0) \right] B_3 + \left[ I_0''(\alpha s_0) + \frac{\nu}{\alpha s_0} I_0'(\alpha s_0) \right] B_5 = 0 \quad (12.36b)$$

$$\left[ J_0''(\alpha s_0) + \frac{1}{\alpha s_0} J_0''(\alpha s_0) - \frac{1}{(\alpha s_0)^2} J_0'(\alpha s_0) \right] B_3 + \left[ I_0''(\alpha s_0) + \frac{1}{\alpha s_0} I_0''(\alpha s_0) - \frac{1}{(\alpha s_0)^2} I_0'(\alpha s_0) \right] B_5 = 0 \quad (12.36c)$$

由齐次方程组 (12.36) 的系数行列式为零给出频率方程。由于式 (12.36b), (12.36c) 均无  $B_1$  项, 故频率方程可由式 (12.36b), (12.36c) 组成的二阶齐次方程组行列式为零

给出。而  $B_1$  为任取 (相当刚体位移), 可取为零。由于挠度振型解 (12.29a), 边界条件 (12.36b), (12.36c) 完全同周边自由的圆板, 因此频率方程可取用第四章式 (4.13a), 不过取其中  $m = 0$ , 有

$$\frac{I_0(\alpha s_0)}{I_1(\alpha s_0)} + \frac{J_0(\alpha s_0)}{J_1(\alpha s_0)} = \frac{2(1-\nu)}{\alpha s_0} \quad (12.37)$$

而且频率系数  $(\alpha s_0)$  可查表 4.6 中  $m = 0$  一列, 表中不同  $n$  表示节圆数。对于其它  $\nu$  值基频系数可参见表 12.3。但是由  $(\alpha s_0)$  求  $\omega$  则需根据式 (12.23c), (12.23d) 进行, 即

$$\omega^2 = \frac{E}{\rho s_0^2} \left[ \frac{(\alpha s_0)^4}{12(1-\nu)} \left( \frac{h}{s_0} \right)^2 + \left( \frac{s_0}{R} \right)^2 \right] \quad (12.38)$$

周边自由球扁壳轴对称振动基频系数  $(\alpha s_0)$

表 12.3

$\nu$	0	0.3	0.33	0.5
$(\alpha s_0)$	2.87	3.00	3.01	3.07

## § 12.4 具有矩形底面的扁壳的振动

### 一、柱形扁壳

当 § 10.6 图 10.4 中的开口圆柱壳的张角  $\theta_0$  相当小时就可看成为具有矩形底面的柱形扁壳<sup>[200]</sup>。现取周向坐标仍为  $\theta$ , 但轴向采用相对坐标

$$\xi = \frac{x}{R} \quad (12.39)$$

则现在圆柱壳基本关系 (10.1) 改为

$$\alpha = \xi, \quad \beta = \theta, \quad A = B = R, \quad R_\alpha = \infty, \quad R_\beta = R \quad (12.40)$$

扁壳一般性方程 (12.4) 变为

$$D \nabla^2 \nabla^2 w + \frac{1}{R^3} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q, \quad (12.41a)$$

$$\frac{Eh}{R^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \nabla^2 \nabla^2 f = 0 \quad (12.41b)$$

式中算子

$$\nabla^2 = \frac{1}{R^2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] \quad (12.41c)$$

相应振型  $W$ ,  $F$  所满足的方程为

$$D \nabla^2 \nabla^2 W + \frac{1}{R^3} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} - \rho h \omega^2 W = 0 \quad (12.42a)$$

$$\frac{Eh}{R^3} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} - \nabla^2 \nabla^2 F = 0 \quad (12.42b)$$

类同式 (12.13), 引入函数  $\Phi(\xi, \theta)$  使

$$W = R^4 \nabla^2 \nabla^2 \Phi \quad (12.43a)$$

$$F = EhR \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} \quad (12.43b)$$

则方程 (12.42b) 自动满足, 再代入方程 (12.42a), 可得  $\Phi$  应满足的基本方程

$$C^2 R^8 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \Phi + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^4} - \frac{\rho}{E} \omega^2 R^6 \nabla^2 \nabla^2 \Phi = 0 \quad (12.44)$$

而

$$C^2 = \frac{D}{E h R^2} \quad (12.45)$$

弧端简支柱形扁壳 有边界条件

$$\xi = 0, \quad \xi = \frac{L}{R} = \xi_0, \quad V = W = N_z^* = M_z^* = 0 \quad (12.46)$$

可设满足边界条件 (12.46) 的解

$$\Phi(\xi, \theta) = \sin \frac{m\pi R}{L} \xi \cdot \psi(\theta) \quad (12.47)$$

代入方程 (12.44) 得

$$C^2 \left[ \frac{d^2 \psi}{d\theta^2} - \left( \frac{m\pi R}{L} \right)^2 \psi \right]^4 - \frac{\rho}{E} \omega^2 R^2 \left[ \frac{d^2 \psi}{d\theta^2} - \left( \frac{m\pi R}{L} \right)^2 \psi \right]^2 + \left( \frac{m\pi R}{L} \right)^4 \psi = 0 \quad (12.48)$$

常微分方程 (12.48) 的特征方程为

$$C^2 \left[ k^2 - \left( \frac{m\pi R}{L} \right)^2 \right]^4 - \frac{\rho}{E} \omega^2 R^2 \left[ k^2 - \left( \frac{m\pi R}{L} \right)^2 \right]^2 + \left( \frac{m\pi R}{L} \right)^4 = 0 \quad (12.49a)$$

可解得八个根

$$k = \pm \sqrt{\pm \sqrt{\frac{\rho \omega^2 R^2}{2EC^2} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4C^2 m^4 \pi^4 E^2}{\omega^4 L^4 \rho^2}} \right]} + \frac{m^2 \pi^2 R^2}{L^2}} \\ = \pm k_1, \pm k_2, \pm i k_3, \pm i k_4 \quad (12.49b)$$

其中  $k_1, k_2, k_3, k_4$  均为实根。则有一般解

$$\psi(\theta) = C_1 \operatorname{sh} k_1 \beta + C_2 \operatorname{ch} k_1 \beta + C_3 \operatorname{sh} k_2 \beta + C_4 \operatorname{ch} k_2 \beta \\ + C_5 \sin k_3 \beta + C_6 \cos k_3 \beta + C_7 \sin k_4 \beta + C_8 \cos k_4 \beta \quad (12.50)$$

式中八个常数由两直线边  $\theta = 0, \theta_0$  的八个边界条件确定, 从而建立频率方程, 求取固有频率与振型。

四边简支柱形扁壳 有边界条件

$$\xi = 0, \quad \xi = \frac{L}{R_0} = \xi_0, \quad V = W = N_z^* = M_z^* = 0 \quad (12.51a)$$

$$\theta = 0, \theta_0, \quad U = W = N_\theta^* = M_\theta^* = 0 \quad (12.51b)$$

可直接设满足上述边界条件解

$$W(\xi, \theta) = A_{mn} \sin \frac{m\pi R}{L} \xi \sin \frac{n\pi}{\theta_0} \theta \quad (12.52a)$$

$$F(\xi, \theta) = B_{mn} \sin \frac{m\pi R}{L} \xi \sin \frac{n\pi}{\theta_0} \theta \quad (12.52b)$$

代入基本方程组 (12.42), 导出关于  $A_{mn}, B_{mn}$  的齐次线代方程组, 由其系数行列式为零直接给出第  $(m, n)$  阶频率

$$\omega_{mn}^2 = \frac{1}{\rho h R^2} \left\{ \frac{D}{R^2} \left[ \left( \frac{m\pi R}{L} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{\theta_0} \right)^2 \right]^2 + \frac{E h \frac{m^4 \pi^4 R^4}{L^4}}{\left[ \left( \frac{m\pi R}{L} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{\theta_0} \right)^2 \right]^2} \right\} \quad (12.53)$$

## 二、双曲扁壳

常用的双曲扁壳的主曲率沿每个主方向上是一常量，而沿两个正交方向可以是不同的，一般称为常曲率双曲扁壳（图12.1）。现取壳体上一点坐标为其底面上投影的直角坐标系坐标  $(x, y)$ ，则有基本关系式

$$\begin{aligned} \alpha = x, \quad \beta = y, \quad A = B = 1, \quad R_x = R_y \\ = \text{const.}, \quad R_\theta = R_\varphi = \text{const.} \end{aligned} \quad (12.54a)$$

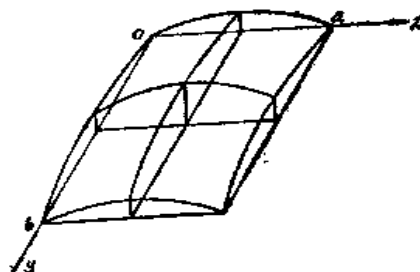


图 12.1

按式 (12.5) 有算子

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \nabla_1^2 = \frac{1}{R_y} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{R_x} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (12.54b)$$

则扁壳一般性方程 (12.4) 现为

$$D \nabla^2 \nabla^2 w + \frac{1}{R_y} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{R_x} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q_v \quad (12.55a)$$

$$\frac{1}{R_y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{R_x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{E h} \nabla^2 \nabla^2 f = 0 \quad (12.55b)$$

相应振型  $W, F$  所满足的振型方程为

$$D \nabla^2 \nabla^2 W + \frac{1}{R_y} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{1}{R_x} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \rho h \omega^2 W = 0 \quad (12.56a)$$

$$\frac{1}{R_y} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{1}{R_x} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{1}{E h} \nabla^2 \nabla^2 F = 0 \quad (12.56b)$$

四边简支双曲扁壳 (200) 有边界条件

$$x = 0, \quad a: \quad V = W = N_x^* = M_x^* = 0 \quad (12.57a)$$

$$y = 0, \quad b: \quad U = W = N_y^* = M_y^* = 0 \quad (12.57b)$$

可直接设满足边界条件 (12.57) 解

$$W(x, y) = A_{mn} \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y \quad (12.58a)$$

$$F(x, y) = B_{mn} \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y \quad (12.58b)$$

代入基本方程组 (12.56)，导出关于  $A_{mn}, B_{mn}$  的齐次线代方程组，由其系数行列式为零，直接给出第  $(m, n)$  阶频率公式

$$\omega_{mn}^2 = \frac{1}{\rho h} \left\{ D \left[ \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{b} \right)^2 \right]^2 + \frac{E h \left[ \frac{1}{R_y} \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 + \frac{1}{R_x} \left( \frac{m\pi}{b} \right)^2 \right]^2}{\left[ \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{m\pi}{b} \right)^2 \right]^2} \right\} \quad (12.59)$$

## § 12.5 扁壳振动的实用解法

在上面各节的介绍中已经可以看出, 扁壳振动频率与同底面形状的平板振动频率之间存在某种联系。当然, 当  $R_a = R_b = \infty$  时, 扁壳的频率应该是精确等于相应平板频率的。本节就来仔细研究这一问题, 从而导出求解扁壳振动频率的一种实用而且统一的公式。

首先让我们来研究边界固定球形扁壳的频率方程 (12.23)。从式 (12.23 b) 知, 当壳体形状越来越扁时,  $\frac{s_0}{R}$  越来越小, 则  $\lambda \rightarrow 0$ 。因此方程 (12.23 a) 中含  $\left(\frac{1}{\lambda}\right)^4$  项变得很大, 从而可以略去不含  $\lambda$  的其它项。所以频率方程可用

$$I_n(\alpha s_0) J_{n-1}(\alpha s_0) - I_{n-1}(\alpha s_0) J_n(\alpha s_0) = 0 \quad (a)$$

来近似代替。可以发现上式即为固定圆板的频率方程 (4.12 a)。因此  $(\alpha s_0)_{mn}$  解可直接取用固定圆板的频率系数解——表 4.4 中  $\lambda_{mn}$  值。所不同的只是  $(\alpha s_0)_{mn}$  与圆频率  $\omega_{mn}$  的关系应按式 (12.23 c) 有

$$(\alpha s_0)_{mn}^4 = \lambda_{mn}^4 = 12(1 - \nu^2) \left( \frac{a}{h} \right)^3 \left[ \frac{\rho a^2}{E} \omega_{mn}^2 - \left( \frac{a}{R} \right)^2 \right] \quad (12.60 a)$$

即

$$\begin{aligned} \omega_{mn}^2 &= \frac{E}{\rho a^2} \left[ \frac{\lambda_{mn}^4}{12(1 - \nu^2)} \left( \frac{h}{a} \right)^2 + \left( \frac{a}{R} \right)^2 \right] \\ &= \frac{D}{\rho h a^4} \lambda_{mn}^4 + \frac{E}{\rho R^2} \end{aligned} \quad (12.60 b)$$

按板的公式 (4.9) 有

$$\frac{D}{\rho h a^4} \lambda_{mn}^4 = \omega_{mn}^2 \quad (12.60 c)$$

所以扁壳的固有频率可近似按

$$\omega_{mn} = \left[ \omega_{mn}^2 + \frac{E}{\rho R^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (12.61)$$

计算。这就是扁壳固有频率的实用计算公式。这对底面为其它形状的扁壳也是成立的。

式 (12.61) 表明, 扁壳固有频率的实用计算可以用相应平板公式加附加项按式 (12.61) 进行。所取平板与所计算的扁壳要具有: (1) 同样厚度, (2) 同样材料常数, (3) 同样边界条件, (4) 平板的形状与平面尺寸和扁壳底面是一致的。而且扁壳振型与该平板同阶振型相同。对于非球形扁壳, 式 (12.61) 中曲率半径  $R$  不是一个常值, 则一般可取全域曲率半径平均值来进行计算。当然式 (12.61) 中  $R \rightarrow \infty$ , 即为平板频率结果。

式 (12.61) 将给各种边界条件、各种形状的扁壳振动计算带来极大方便。因为对于各种边界条件、各种形状以及带有各种附加条件的平板的频率与振型在第三—八章中已进行广泛深入研究, 并具有大量可供实用的公式与数据表格。这为解决工程上大量扁壳振动问题提供一种有效、可行方法, 使复杂的壳体振动分析问题直接简化为简单得多的平板振动分析问题。

式 (12.61) 非常实用, 但也具有一定近似性。  $\lambda = [12(1 - \nu^2)s_0^4 / R^2 h^2]^{\frac{1}{4}}$  越小,  $n, m$  越大, 则精度越高。当壳体较深时, 式 (12.61) 就不再适用。这就需要对于实用算式 (12.61) 提出一个适用的范围。计算实践表明, 如果满足条件

$$[\lambda - 2(n + m)] \leq 0 \quad (12.62)$$

则应用式 (12.61) 就具有足够精度 (误差一般不超过 5%)。

现在就用具体数值来说明这一判别准则可靠程度。表12.1是球形扁壳原始方程的频率系数结果。对于平板, 即  $\frac{s_0}{R} = \lambda = 0$ , 即为表中第一列结果。实用公式 (12.61) 即认为不管  $\lambda$  为多少, 均取用  $\lambda = 0$  的频率系数 ( $\alpha_{s_0}$ ) 结果。因此表12.1其它各列与第一列相对误差即能估计实用公式 (12.61) 误差。现将这一误差计算结果列于表12.4中, 并将准则 (12.62) 所体现的界限在表中用粗线划出。显然, 在粗线以左的值 (即满足式 (12.62)) 均小于5%误差, 而粗线以右的值则误差较大。再以表12.2为例, 此时  $n = 0$ ,  $m = 1$ , 则按准则 (12.62) 有  $\lambda \leq 2$ ,  $\lambda^4 \leq 16$ , 从表中查出  $(\alpha_{s_0}) \leq 3.258$ , 若用实用公式计算, 相当取  $(\alpha_{s_0}) = 3.196$ , 两者差别小于2%。

用实用公式 (12.61) 计算周边固定球形扁壳的频率系数误差 (%)

表12.4

$n$	$\lambda$ $m$	2.5	5.0	7.5	10.0	15.0	20.0
1	1	0.4	5	16	27	34	35
	2	0.02	0.3	2	7	22	25
	3	0	0.1	0.3	1	2	18
2	1	0.1	1.6	6	15	26	28
	2	0.01	0.2	0.9	3	13	20
	3	0	0.1	0.2	0.6	4	12
3	1	0.02	0.6	3	8	19	23
	2	0	0.1	0.5	1	8	15
	3	0	0	0.07	0.3	2	8
4	1	0.01	0.3	1	4	12	18
	2	0	0	0.3	0.8	4	11
	3	0	0	0.07	0.2	1	5

实用公式 (12.61) 首先由文献[239]提出, 并作了一般性说明, 随后不少学者作过这方面的研究。这里只是从本书已有材料出发来说明这一方法原理。

公式 (12.61) 只给出扁壳弯曲振动频率实用公式, 而扁壳扭转振动的频率实用公式可采用文献[235]建议的公式:

$$\omega_n = \frac{\lambda_n^2}{R} \left[ \frac{E}{\rho(1-\nu^2)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (12.62a)$$

式中

$$\lambda_n^4 = \frac{1-\nu}{2(1+5k)} \left[ \left( \frac{\alpha_n}{\varphi_0} \right)^2 - 2 \right], \quad k = \frac{h^2}{12R^2} \quad (12.62b)$$

而  $\alpha_n$  列于表12.5



扁壳扭转振动计算系数 $\alpha_n$

表12.5

$n$ 边 界	1	2	3	4
自 由	5.136	8.417	11.62	14.80
固 定	3.832	7.016	10.17	13.32

## 第十三章 无矩壳的振动

无矩壳理论又称薄膜理论是壳体振动工程理论中十分重要的一种 [167]，无论在应用与理论上均占有十分重要的地位。这将集中在本章中专门加以论述。

### § 13.1 无矩壳理论的提出与应用

我们在第九章薄壳振动理论基本方程讨论中已经指出，壳体内力、应力以及壳体变形能均可明显分为“薄膜”与“弯曲”两大部分，前者和薄膜刚度 $K$ 有关，后者和弯曲刚度 $D$ 有关。

按应力表达式 (9.37) 壳体表面应力可写为

$$\sigma_{\alpha} = \frac{N_{\alpha}}{h} + \frac{6M_{\alpha}}{h^2} = \sigma_{1m} + \sigma_{1f} \quad (13.1a)$$

$$\sigma_{\beta} = \frac{N_{\beta}}{h} + \frac{6M_{\beta}}{h^2} = \sigma_{2m} + \sigma_{2f} \quad (13.1b)$$

$$\tau_{\alpha\beta} = \frac{N_{\alpha\beta}}{h} + \frac{6M_{\alpha\beta}}{h^2} = \sigma_{3m} + \sigma_{3f} \quad (13.1c)$$

式 (13.1) 各式中前项均为薄膜应力 $\sigma_{Km}$ ，后项均为弯曲应力 $\sigma_{Kf}$  ( $K=1, 2, 3$ )。下面按第九章的基本关系式来估算一下这两项的量级。

按式 (13.1)，(9.35)，(9.36)，(9.27) 有

$$\sigma_{Km} \approx \frac{N}{h} \approx \frac{K\varepsilon}{h} \approx E \frac{W}{R} \quad (13.2a)$$

按式 (13.1)，(9.35)，(9.36)，(9.28) 有

$$\sigma_{Kf} \approx \frac{M}{h^2} \approx \frac{\kappa}{h^2} \approx Eh \frac{W}{R^2} \quad (13.2b)$$

式中有关符号均指相应量的量级。因此有

$$\sigma_{Kf} \approx \left(\frac{h}{R}\right) \sigma_{Km} \quad (13.2c)$$

上式表明，壳体中弯曲应力量级一般为薄膜应力量级乘 $\left(\frac{h}{R}\right)$ 。而在薄壳中有 $h < R$ ，因此总体来看有：弯曲应力小于薄膜应力（这并不排斥局部地区有较大的弯曲应力）。由此给我们启发，在下列两种情况下将可采用忽略弯曲应力，只考虑薄膜应力的无矩壳理论：

(1) 当壳体厚度非常薄的情况， $h \ll R$ 时，弯曲应力远小于薄膜应力而可忽略。实际上这种壳体又如一种薄膜曲面体，只能承受张力，不能承受弯矩。但和绝对柔软壳体概念不同，因为薄膜力还包括压力。

(2) 虽然壳体厚度不是十分薄，但如果壳体形状、载荷及边界适当，使壳体内部实际弯曲应力远小于薄膜应力的话，则无矩壳理论也是成立的。要实现这一应力状态一般应满足下列诸条件：(a) 壳体曲率半径、厚度、材料常数沿空间曲面坐标变化非常缓慢或者不

变。(b)壳体上外载(包括惯性力)分布沿空间曲面坐标变化非常缓慢或者不变。(c)边界上无转角及垂直中面方向位移的约束,无弯矩、扭矩与剪力。这种条件我们在拱的静力问题中已经很熟悉了,例如均布铅垂外载作用下抛物线拱,自重作用下悬链线拱。对于壳体动力问题,能满足上述条件的典型例子可以是等厚度、匀质、完全球壳的扩展振动。

下面将可看到,由于采用“无矩”前提,壳体方程将有很大简化,使得问题分析变得容易得多。因此无矩壳振动理论是目前发展得比较快和完善的壳体振动理论。

无矩壳振动理论的实际应用是多方面的。最主要的是壳体振动的简化近似计算,当然这需要考虑上面所提到的一些条件与前提,其次是估算由于实际弯曲应力存在所带来的误差(这可参见下面各节中所进行的定量分析);另外,壳体实现薄膜应力状态是一种理想、经济的结构承载形式,因此无矩壳振动理论的研究将有助于工程壳体结构的有效结构设计;还有,工程计算中往往可以先用整体按无矩壳理论计算,再在局部地区叠加有矩壳理论结果,这也为实际计算提供方便。

从这里我们也可以看到,壳体结构比平板结构具有较好承载特性就是在于在平板中全部是靠弯曲内力来传递外载的,而壳体主要是靠薄膜内力来传递外载,应力在壳体内分布比较均匀,因此比较经济、有效,若能实现无矩壳应力状态,那将更为有利。

## § 13.2 无矩壳振动理论的基本方程

无矩壳振动理论的基本方程可以简单从第九章有矩壳振动理论基本方程中取 $D=0$ 求得。由式(9.35), (9.39)知,有 $M_\alpha=M_\beta=M_{\alpha\beta}=\theta_\alpha=\theta_\beta=0$ ,且 $x_\alpha, x_\beta, x_{\alpha\beta}$ 也无意义。因此按式(9.26), (9.27), (9.35)有

应变分量

$$\epsilon_\alpha = \epsilon_\alpha^0 = \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{v}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{w}{R_\alpha} \quad (13.3a)$$

$$\epsilon_\beta = \epsilon_\beta^0 = \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{u}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{w}{R_\beta} \quad (13.3b)$$

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta}^0 = \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{u}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{v}{B} \right) \quad (13.3c)$$

内力分量

$$N_\alpha = K(\epsilon_\alpha + \nu \epsilon_\beta) \quad (13.4a)$$

$$N_\beta = K(\epsilon_\beta + \nu \epsilon_\alpha) \quad (13.4b)$$

$$N_{\alpha\beta} = N_{\beta\alpha} = K \frac{(1-\nu)}{2} \epsilon_{\alpha\beta} \quad (13.4c)$$

动力平衡方程(9.40)变为

$$\frac{\partial(BN_\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial(AN_{\beta\alpha})}{\partial \beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} N_\beta + \frac{\partial A}{\partial \beta} N_{\alpha\beta} + AB \left( q_\alpha - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (13.5a)$$

$$\frac{\partial(AN_\beta)}{\partial \beta} + \frac{\partial(BN_{\alpha\beta})}{\partial \alpha} - \frac{\partial A}{\partial \beta} N_\alpha + \frac{\partial B}{\partial \alpha} N_{\beta\alpha} + AB \left( q_\beta - \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (13.5b)$$

$$\frac{N_a}{R_a} + \frac{N_\beta}{R_\beta} - q_v + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (13.5c)$$

将式 (13.3) 代入式 (13.4)，再代入式 (13.5)，即可得无矩壳振动理论的一般性基本方程，这是关于  $u$ ， $v$ ， $w$  的三元四阶联立偏微分方程组。它的求解需要每边给定两个边界条件。因此原来有矩壳振动理论八阶方程所满足的每边四个边界条件 (9.44)，现只需也只能满足两个。由于考虑到无矩壳前提是一切弯矩、剪力为零，因此在边界也应满足这一前提，所以原边界 (9.44c)，(9.44d) 中  $M_a = 0$ ， $V_a = 0$  是本理论事先给定的，而只剩下式 (9.44a)，(9.44b)，即无矩壳的一般性边界条件为

$$N_a = \bar{N}_a \text{ 或 } u_a = \bar{u}_a \quad (13.6a)$$

$$N_{a'} = \bar{N}_{a'} \text{ 或 } u_{a'} = \bar{u}_{a'} \quad (13.6b)$$

按式 (9.50) 无矩壳的变形能为

$$U = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \iint \left[ (\varepsilon_a + \varepsilon_\beta)^2 - 2(1-\nu) \left( \varepsilon_a \varepsilon_\beta - \frac{\varepsilon_{a\beta}^2}{4} \right) \right] AB da d\beta \quad (13.7)$$

而动能表达式仍为式 (9.48)。

### § 13.3 柱形无矩壳

#### 一、柱形无矩壳的一般性基本方程

对于具有任意截面形状的柱壳 (图10.5) 在 § 10.7 中已经研究过，其基本参数有

$$a = x, \beta = s, A = 1, B = 1, R_a = \infty, R_\beta = R(s) \quad (13.8)$$

因此上节中一些基本关系式和方程变为

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_s = \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{w}{R}, \quad \varepsilon_{xs} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial s} \quad (13.9a)$$

$$N_x = K(\varepsilon_x + \nu \varepsilon_s), \quad N_s = K(\varepsilon_s + \nu \varepsilon_x), \quad N_{xs} = K \frac{(1-\nu)}{2} \varepsilon_{xs} \quad (13.9b)$$

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xs}}{\partial s} + q_x = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (13.9c)$$

$$\frac{\partial N_{xs}}{\partial x} + \frac{\partial N_s}{\partial s} + q_s = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (13.9d)$$

$$\frac{N_s}{R(s)} - q_r + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (13.9e)$$

将这些关系式和方程综合，即可建立用位移分量表示的柱形无矩壳的基本方程组

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial s} + \nu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{w}{R} \right) = \frac{1}{K} \left( \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - q_x \right) \quad (13.10a)$$

$$\frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial s} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{w}{R} \right) = \frac{1}{K} \left( \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - q_s \right) \quad (13.10b)$$

$$\frac{\nu}{R} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{R \partial s} + \frac{w}{R^2} = \frac{1}{K} \left( q_r - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \quad (13.10c)$$

按式 (13.6), 对齐次边界现有边界条件

$$x = x_0: \quad u = 0 \text{ 或 } N_x = 0 \quad (13.11a)$$

$$v = 0 \text{ 或 } N_{x\theta} = 0 \quad (13.11b)$$

$$s = s_0: \quad v = 0 \text{ 或 } N_s = 0 \quad (13.11c)$$

$$u = 0 \text{ 或 } N_{s\theta} = 0 \quad (13.11d)$$

## 二、圆柱形无矩壳的基本方程

对于圆柱形无矩壳 (图10.1) 在 § 10.1 中已经研究过, 其基本参数有

$$\alpha = x, \quad \beta = \theta, \quad A = 1, \quad B = R, \quad R_\alpha = \infty, \quad R_\beta = R \quad (13.12)$$

因此上节中一些基本关系式和方程变为

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_\theta = \frac{\partial v}{R \partial \theta} + \frac{w}{R}, \quad e_{x\theta} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{R \partial \theta} \quad (13.13a)$$

$$N_x = K(e_x + \nu e_\theta), \quad N_\theta = K(e_\theta + \nu e_x), \quad N_{x\theta} = K \frac{(1-\nu)}{2} e_{x\theta} \quad (13.13b)$$

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{x\theta}}{R \partial \theta} + q_x = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (13.13c)$$

$$\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{\partial N_\theta}{R \partial \theta} + q_\theta = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (13.13d)$$

$$\frac{N_\theta}{R} - q_x + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (13.13e)$$

将这些关系式和方程综合, 即可建立用位移分量表示的圆柱形无矩壳振动的基本方程组

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{R^2 \partial \theta^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{R \partial x \partial \theta} + \nu \frac{\partial w}{R \partial x} = \frac{1}{K} \left( \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - q_x \right) \quad (13.14a)$$

$$\frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{R \partial x \partial \theta} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{R^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial w}{R^2 \partial \theta} = \frac{1}{K} \left( \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - q_\theta \right) \quad (13.14b)$$

$$\nu \frac{\partial u}{R \partial x} + \frac{\partial v}{R^2 \partial \theta} + \frac{w}{R^2} = \frac{1}{K} \left( q_x - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \quad (13.14c)$$

按式 (13.6), 对齐次边界现有边界条件

$$x = x_0: \quad u = 0 \text{ 或 } N_x = 0 \quad (13.15a)$$

$$v = 0 \text{ 或 } N_{x\theta} = 0 \quad (13.15b)$$

$$\theta = \theta_0: \quad v = 0 \text{ 或 } N_\theta = 0 \quad (13.15c)$$

$$u = 0 \text{ 或 } N_{s\theta} = 0 \quad (13.15d)$$

按式 (10.8), 圆柱形无矩壳的动能与变形能表达式分别为

$$T = \iint \frac{\rho h}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] R dx d\theta \quad (13.16a)$$

$$U = \iint \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \left\{ \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{R} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) \right]^2 - \frac{2(1-\nu)}{R} \left[ \frac{\partial u}{\partial \theta} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) \right] \right. \\ \left. + \frac{(1-\nu)}{2} \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right]^2 \right\} R dx d\theta \quad (13.16b)$$

## 三、无限长圆柱形无矩壳的振动

与圆柱形无矩壳振动基本方程 (13.14) 相应的位移振型  $U, V, W$  应满足的基本振型方程为

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 U}{R^2 \partial \theta^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 V}{R \partial x \partial \theta} + \nu \frac{\partial W}{R \partial x} + \frac{\rho h}{K} \omega^2 U = 0 \quad (13.17a)$$

$$\frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 U}{R \partial x \partial \theta} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{R^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial W}{R \partial \theta} + \frac{\rho h}{K} \omega^2 V = 0 \quad (13.17b)$$

$$\nu \frac{\partial U}{R \partial x} + \frac{\partial V}{R^2 \partial \theta} + \frac{W}{R^2} - \frac{\rho h}{K} \omega^2 W = 0 \quad (13.17c)$$

在第十章无限长圆柱形有矩壳振动分析中已经指出, 无限长圆柱壳的固有振动可分为五类: 轴向、扭转、扩展、环向、弯曲。下面将分别叙述无限长圆柱形无矩壳的这几类振动。

**轴向振动** 设

$$U = A \cos n\theta, \quad V = W = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (13.18a)$$

则代入振型方程 (13.17) 可得频率系数

$$\Omega^2 = \frac{1-\nu}{2} n^2 \quad (13.18b)$$

式中无量纲频率系数

$$\Omega^2 = \frac{\rho h}{K} R^2 \omega^2 \quad (13.19)$$

这种振动相应于壳体各点只有轴向位移, 而且沿轴向不变, 沿周向有  $n$  个波,  $n = 0$  时相当于刚体平移。

**扭转振动** 设

$$V = B, \quad U = W = 0 \quad (13.20a)$$

则代入振型方程 (13.17), 可得频率系数

$$\Omega^2 = 0 \quad (13.20b)$$

这种振动相应于壳体各点只有周向位移, 而且沿轴向、周向均不变, 相当于刚体转动

**扩展振动** 设

$$W = C, \quad U = V = 0 \quad (13.21a)$$

则代入振型方程 (13.17) 可得频率系数

$$\Omega^2 = 1 \quad (13.21b)$$

这种振动相应于壳体各点只有法向位移, 而且沿轴向、周向均不变。

**环向振动** 设

$$U = 0, \quad V = B \sin n\theta, \quad W = C \cos n\theta \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (13.22a)$$

则代入振型方程 (13.17), 可得频率系数

$$\Omega^2 = 1 + n^2 \quad (13.22b)$$

这种振动相应于壳体各点在自身截面内运动的平面应变问题, 沿周向有  $n$  个波, 相当于环的振动。

**弯曲振动** 设

$$U = A \cos \frac{\lambda}{R} x \cos n\theta$$

$$V = B \sin \frac{\lambda}{R} x \sin n\theta \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$W = C \sin \frac{\lambda}{R} x \cos n\theta \quad (13.23 a)$$

则代入振型方程 (13.17), 可得频率方程

$$\begin{vmatrix} \left( \Omega^2 - \lambda^2 - \frac{1-\nu}{2} n^2 \right) & \left( \frac{1+\nu}{2} \lambda n \right) & (\nu \lambda) \\ \left( \frac{1+\nu}{2} \lambda n \right) & \left( \Omega^2 - \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 - n^2 \right) & (-n) \\ (\nu \lambda) & (-n) & (\Omega^2 - 1) \end{vmatrix} = 0 \quad (13.23 b)$$

这种振动相应于壳体各点运动沿周向有  $n$  个波, 沿轴向在一个圆周长度内有  $\lambda$  个波。对应于一组  $(n, \lambda)$  又有三个频率相应于三个位移振型间不同比值。

按上述诸式计算的  $\lambda = 0$  各阶频率系数和无限长圆柱形有矩壳经典理论相应结果比较列表 13.1, 表 13.2。数据表明, 当  $\lambda$  很小, 即轴向波长很长时无矩壳结果十分接近有矩壳, 当  $\frac{h}{R}$  变小时, 两者更为接近 [154]。

无限长圆柱壳频率系数  $\Omega$  比较 ( $\lambda = 0, \nu = 0.3, \frac{h}{R} = 0.05$ )

表 13.1

阶次 理论	0			1			2		
	$U \neq 0$	$U = 0$		$U \neq 0$	$U = 0$		$U \neq 0$	$U = 0$	
		min	max		min	max		min	max
无矩壳	0	0	1	0.59161	0	1.41421	1.18322	0	2.23607
有矩壳	0	0	1	0.59161	0.01476	1.30676	1.18322	0.03673	2.23666

续上表

阶次 理论	3			4		
	$U \neq 0$	$U = 0$		$U \neq 0$	$U = 0$	
		min	max		min	max
无矩壳	1.77482	0	3.16228	2.36643	0	4.12311
有矩壳	1.77482	0.10955	3.16334	2.36643	0.21008	4.12463

无限长圆柱壳频率系数  $\Omega$  比较 ( $\lambda = 0, \nu = 0.3, \frac{h}{R} = 0.002$ )

表 13.2

阶次 理论	0			1			2		
	$U \neq 0$	$U = 0$		$U \neq 0$	$U = 0$		$U \neq 0$	$U = 0$	
		min	max		min	max		min	max
无矩壳	0	0	1	0.59161	0	1.41421	1.18322	0	2.23607
有矩壳	0	0	1	0.59161	0.00005	1.41421	1.18322	0.00155	2.23607

续上表

理论阶次	3		4	
	$U \neq 0$	$U = 0$		$U \neq 0$
		min	max	
无矩壳	1.77482	0	3.16228	2.36643
有矩壳	1.77482	0.00438	3.16228	2.36643

## 四、两端简支圆柱形无矩壳的振动

两端简支圆柱形无矩壳 (图10.1) 的振型方程仍为式 (13.17), 其边界条件可根据简支有矩壳边界条件 (10.26) 和无矩壳一般性边界条件表达式 (13.15) 确定为

$$V(0, \theta) = N_z^*(0, \theta) = 0 \quad (13.24a)$$

$$V(L, \theta) = N_z^*(L, \theta) = 0 \quad (13.24b)$$

在第十章两端简支圆柱形有矩壳振动分析中已经指出, 两端简支圆柱壳的固有振动可分为轴对称振动和非轴对称振动, 而轴对称振动又可分为扭转振动及轴向-法向振动, 后者又可人为分离为纯轴向振动及纯法向振动。下面将分别叙述两端简支圆柱形无矩壳的这几类振动。

**轴对称振动** 即所有力学量与  $\theta$  无关, 则振型方程 (13.17) 简化为

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \nu \frac{dW}{Rdx} + \frac{\rho h}{K} \omega^2 U = 0 \quad (13.25a)$$

$$\frac{1-\nu}{2} \frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{\rho h}{K} \omega^2 V = 0 \quad (13.25b)$$

$$\nu \frac{dU}{Rdx} + \frac{W}{R^2} - \frac{\rho h}{K} \omega^2 W = 0 \quad (13.25c)$$

设满足边界条件的轴对称振型解

$$U = A \cos \frac{m\pi}{L} x \quad (13.26a)$$

$$V = B \sin \frac{m\pi}{L} x \quad (13.26b)$$

$$W = C \sin \frac{m\pi}{L} x \quad (13.26c)$$

代入方程 (13.25), 由系数行列式为零得频率方程

$$\begin{vmatrix} (\Omega^2 - \xi^2) & 0 & (\nu \xi) \\ 0 & \left( \Omega^2 - \frac{1-\nu}{2} \xi^2 \right) & 0 \\ (\nu \xi) & 0 & (\Omega^2 - 1) \end{vmatrix} = 0 \quad (13.27a)$$

式中

$$\xi = m\pi \frac{R}{L} \quad (13.27b)$$

显然, 这一方程可以解耦为两组方程: 一组相应于只有周向位移, 即扭转振动 其振型为



$$V = B \sin \frac{m\pi}{L} x, \quad U = W = 0 \quad (13.28 a)$$

其频率系数为

$$\Omega_{\frac{1}{2}m}^2 = \frac{1-\nu}{2} \xi^2 \quad (13.28 b)$$

式中  $\xi$  所含  $m$  为轴向扭转半波数；另一组相应于无周向位移，即  
轴向-法向振动 其振型为

$$U = A \cos \frac{m\pi}{L} x, \quad W = C \sin \frac{m\pi}{L} x, \quad V = 0 \quad (13.29 a)$$

其频率方程为

$$\Omega^4 - (1 + \xi^2) \Omega^2 + (1 - \nu^2) \xi^2 = 0 \quad (13.29 b)$$

可解得

$$\Omega_{\frac{1}{2}m}^2 = \frac{1}{2} [(1 + \xi^2) \mp \sqrt{(1 + \xi^2)^2 - 4(1 - \nu^2) \xi^2}] \quad (13.29 c)$$

式中  $\xi$  所含  $m$  为轴向半波数，两种频率相应于不同  $A$  和  $C$  的比值。

上述轴向-法向振动可再人为分离为两组非耦合振动：

纯轴向振动 其振型为

$$U = A \cos \frac{m\pi}{L} x, \quad V = W = 0 \quad (13.30 a)$$

则代入方程 (13.25)，可得频率系数

$$\Omega_{\frac{1}{2}m}^2 = \xi^2 \quad (13.30 b)$$

式中  $\xi$  所含  $m$  为轴向伸缩半波数。

纯法向振动 其振型为

$$W = C \sin \frac{m\pi}{L} x, \quad U = V = 0 \quad (13.31 a)$$

则代入方程 (13.25)，可得频率系数

$$\Omega_{\frac{1}{2}m}^2 = 1 \quad (13.31 b)$$

上式表明这种振动的频率与  $m$  无关。

**非轴对称振动** 直接从圆柱形无矩壳振型方程 (13.17) 出发，设满足边界条件 (13.24) 的非轴对称振型解

$$\begin{aligned} U &= A \cos \frac{m\pi}{L} x \cos n\theta \\ V &= B \sin \frac{m\pi}{L} x \sin n\theta \quad (m, n = 1, 2, 3, \dots) \\ W &= C \sin \frac{m\pi}{L} x \cos n\theta \end{aligned} \quad (13.32)$$

代入振型方程 (13.17)，由系数行列式为零得频率方程

$$\begin{vmatrix} (\Omega^2 - S_{11}) & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & (\Omega^2 - S_{22}) & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & (\Omega^2 - S_{33}) \end{vmatrix} = 0 \quad (13.33)$$

式中

$$S_{11} = \xi^2 + \frac{1-\nu}{2} n^2 \quad (13.34 a)$$

$$S_{12} = S_{21} = \frac{1+\nu}{2} \xi n \quad (13.34b)$$

$$S_{13} = S_{31} = \nu \xi \quad (13.34c)$$

$$S_{22} = \frac{1-\nu}{2} \xi^2 + n^2 \quad (13.34d)$$

$$S_{23} = S_{32} = -n \quad (13.34e)$$

$$S_{33} = 1 \quad (13.34f)$$

式(13.33)可展开成一个关于 $\Omega^2$ 的三次代数方程,其根 $\Omega_{in}^2$  ( $i=1, 2, 3$ )可参见式(10.32), (10.31), (10.30b)。不同 $i$ 的三个频率相应于 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 间比值不同,但其振型均有 $m$ 个轴向半波和 $n$ 个周向波。

按上式求得的两端简支圆柱形无矩壳各阶低频系数( $i=1$ )和相应有矩壳经典理论结果比较列于表13.3, 表13.4。可以发现,当 $n$ 较小,  $\frac{L}{mR}$ 较大,  $\frac{h}{R}$ 较小时,两者相差甚小,因此无矩壳理论较适用于长、薄壳的轴对称及梁式振动。 [154]

两端简支圆柱壳频率系数 $\Omega$  ( $i=1, \nu=0.3, \frac{h}{R}=0.05$ )

表13.3

$n$	$L/mR$ 理 论	0.1	0.25	1	4	20
0	有矩壳	14.27	2.470	0.9595	0.4646	0.09292
	无矩壳	0.9538	0.9535	0.9492	0.4646	0.09292
1	有矩壳	14.29	2.481	0.8579	0.2570	0.01613
	无矩壳	0.9525	0.9476	0.8449	0.2569	0.01611
2	有矩壳	14.33	2.513	0.6774	0.1217	0.03933
	无矩壳	0.9505	0.9298	0.6521	0.1127	0.005225
3	有矩壳	14.40	2.568	0.5423	0.1308	0.1098
	无矩壳	0.9447	0.9017	0.4809	0.05782	0.002474

两端简支圆柱壳频率系数 $\Omega$  ( $i=1, \nu=0.3, \frac{h}{R}=0.002$ )

表13.4

$n$	$L/mR$ 理 论	0.1	0.25	1	4	20
0	有矩壳	1.111	0.9580	0.9492	0.4646	0.09292
	无矩壳	0.9539	0.9537	0.9492	0.4646	0.09292
1	有矩壳	1.110	0.9520	0.8449	0.2569	0.01610
	无矩壳	0.9525	0.9476	0.8449	0.2569	0.01610
2	有矩壳	1.109	0.9345	0.6521	0.1127	0.005453
	无矩壳	0.9503	0.9298	0.6520	0.1127	0.005225
3	有矩壳	1.106	0.9067	0.4810	0.05801	0.005037
	无矩壳	0.9451	0.9017	0.4810	0.05782	0.002474

### 五、其它边界的闭合圆柱形无矩壳的振动

对于由式 (13.15) 表示的各种边界条件的闭合圆柱形无矩壳可以采用 § 10.5 中所介绍的一般性解法及梁函数组合法。

用一般性解法可设振型解 (10.69)，代入振型方程 (13.17)，建立齐次常微分方程组 (10.70) (其中式 (10.70c) 中取  $k=0$ )。再进一步设解 (10.71)，代入得齐次线代方程组 (10.72) (其中取  $k=0$ )，由其系数行列式为零给出关于  $\lambda$  的四次方程，求得四个根，从而给出关于  $U(x, \theta)$ ,  $V(x, \theta)$ ,  $W(x, \theta)$  的含有四个常数的解。再根据  $x=0$ ,  $l$  的两端四个边界条件，建立这四个常数的齐次线代方程组，求取频率方程及各阶固有频率与振型。

用梁函数组合法可设振型解 (10.84)，代入变分方程 (10.9)，(13.16) 进行变分运算。对于固有振动，可建立齐次线代方程组 (10.85) 及频率方程 (10.86)，只是系数表达式 (10.87a) 诸式中含  $k$  项消失，同样可求取各阶固有频率与振型。

### 六、开口圆柱形无矩壳的振动

开口圆柱形无矩壳 (图 10.4) 基本方程为式 (13.14)，边界条件为式 (13.15)，振型方程为式 (13.17)。下面分别按不同边界条件类型进行固有振动分析。

周边简支开口圆柱壳 按式 (13.15) 有四边的振型边界条件为

$$V(0, \theta) = N_x^*(0, \theta) = V(L, \theta) = N_x^*(L, \theta) = 0 \quad (13.35a)$$

$$U(x, 0) = N_\theta^*(x, \theta) = U(x, \theta_0) = N_\theta^*(x, \theta_0) = 0 \quad (13.35b)$$

设满足上述全部边界条件的位移振型解

$$U(x, \theta) = A \cos \frac{m\pi}{L} x \sin \frac{n\pi}{\theta_0} \theta \quad (13.36a)$$

$$V(x, \theta) = B \sin \frac{m\pi}{L} x \cos \frac{n\pi}{\theta_0} \theta \quad (m, n = 1, 2, 3, \dots) \quad (13.36b)$$

$$W(x, \theta) = C \sin \frac{m\pi}{L} x \sin \frac{n\pi}{\theta_0} \theta \quad (13.36c)$$

式中  $m, n$  分别为位移振型沿轴向、周向半波数。上式代入振型方程 (13.17) 得三阶齐次线代方程组，从而求得频率方程

$$\begin{vmatrix} (\Omega^2 - S_{11}) & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & (\Omega^2 - S_{22}) & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & (\Omega^2 - S_{33}) \end{vmatrix} = 0 \quad (13.37)$$

式中

$$S_{11} = \xi^2 + \frac{1-\nu}{2} \eta^2 \quad (13.38a)$$

$$S_{12} = S_{21} = -\frac{1+\nu}{2} \xi \eta \quad (13.38b)$$

$$S_{13} = S_{31} = \nu \xi \quad (13.38c)$$

$$S_{22} = \frac{1-\nu}{2} \xi^2 + \eta^2 \quad (13.38d)$$

$$S_{23} = S_{32} = \eta \quad (13.38 e)$$

$$S_{33} = 1 \quad (13.38 f)$$

其中

$$\xi = \frac{m\pi R}{L}, \quad \eta = \frac{n\pi}{\theta_0} \quad (13.38 g)$$

式 (13.37) 可展开成一个关于  $\Omega^2$  的三次代数方程, 其根  $\Omega_{imn}^2 (i = 1, 2, 3)$  可参见式 (10.32), (10.31), (10.30 b), 不同  $i$  的三个频率相应于  $A, B, C$  间比值不同, 但其振型均有  $m$  个轴向半波和  $n$  个周向半波。

周边简支开口圆柱壳频率系数  $\Omega (i = 1, \nu = 0.3, \frac{h}{R} = 0.05)$

表13.5

$\frac{n\pi}{\theta_0}$	$L/mR$ 理 论	0.1	0.25	1	4	20
$\frac{1}{3}$	有矩壳	14.265	2.4686	0.94552	0.42214	0.051597
	无矩壳	0.95379	0.95299	0.93573	0.42217	0.051430
$\frac{1}{2}$	有矩壳	14.267	2.4681	0.92979	0.38134	0.037123
	无矩壳	0.95365	0.95214	0.91969	0.38138	0.036806
$\frac{2}{3}$	有矩壳	14.270	2.4701	0.90911	0.33768	0.027536
	无矩壳	0.95347	0.95095	0.89854	0.33772	0.027181

周边简支开口圆柱壳频率系数  $\Omega (i = 1, \nu = 0.3, \frac{h}{R} = 0.002)$

表13.6

$\frac{n\pi}{\theta_0}$	$L/mR$ 理 论	0.1	0.25	1	4	20
$\frac{1}{3}$	有矩壳	1.1110	0.95732	0.93574	0.42217	0.051430
	无矩壳	0.95379	0.95299	0.93573	0.42217	0.051430
$\frac{1}{2}$	有矩壳	1.1109	0.95649	0.91971	0.38137	0.036806
	无矩壳	0.95365	0.95214	0.91969	0.38138	0.036806
$\frac{2}{3}$	有矩壳	1.1108	0.95532	0.89856	0.33772	0.027181
	无矩壳	0.95347	0.95095	0.89854	0.33772	0.027181

表13.5, 表13.6分别列出不同  $\frac{h}{R}$  情况下周边简支开口圆柱形无矩壳低频 ( $i = 1$ ) 系数  $\Omega$  值和相应矩壳经典理论结果。比较表明, 和闭合圆柱壳一样, 无矩壳理论比较适合于  $\frac{L}{mR}$  较大,  $\frac{h}{R}$  较小的长、薄壳 [154]。

直边简支开口圆柱形无矩壳 两直线侧边 ( $\theta = 0, \theta_0$ ) 为简支的开口圆柱形无矩壳有边界条件 (13.35 b), 而两端部弧边 ( $x = 0, L$ ) 为其它边界条件 (13.15 a), (13.15 b), 则可设振型解

$$U(x, \theta) = \bar{U}(x) \sin \frac{n\pi}{\theta_0} \theta \quad (13.39 a)$$

$$V(x, \theta) = \bar{V}(x) \cos \frac{n\pi}{\theta_0} \theta \quad (13.39b)$$

$$W(x, \theta) = \bar{W}(x) \sin \frac{n\pi}{\theta_0} \theta \quad (13.39c)$$

而进一步求解过程就完全类似上而第五小节“其它边界的闭合圆柱形无矩壳”解法，只是注意原解中由  $n$  改为  $\frac{n\pi}{\theta_0}$ ，正弦与余弦函数对换而引起的系数表达式变化。

**弧边简支开口圆柱形无矩壳** 两端部弧边 ( $x = 0, L$ ) 为简支的开口圆柱形无矩壳有边界条件 (13.35a)，而两直线侧边 ( $\theta = 0, \theta_0$ ) 为其它边界条件 (13.15c), (13.15d)，则可设振型解

$$U(x, \theta) = \bar{U}(\theta) \cos \frac{m\pi}{L} x \quad (13.40a)$$

$$V(x, \theta) = \bar{V}(\theta) \sin \frac{m\pi}{L} x \quad (13.40b)$$

$$W(x, \theta) = \bar{W}(\theta) \sin \frac{m\pi}{L} x \quad (13.40c)$$

代入振型方程 (13.17)，可得关于  $\bar{U}(\theta)$ ,  $\bar{V}(\theta)$ ,  $\bar{W}(\theta)$  的联立常微分方程组。然后设解

$$\bar{U}(\theta) = A e^{\frac{n\pi}{\theta_0} \theta}, \quad \bar{V}(\theta) = B e^{\frac{n\pi}{\theta_0} \theta}, \quad \bar{W}(\theta) = C e^{\frac{n\pi}{\theta_0} \theta} \quad (13.41)$$

代入之，可得关于系数  $A, B, C$  所应满足的线代方程组

$$\begin{pmatrix} \left[ \frac{\rho h}{k} \omega^2 - \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 + \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{n\pi}{R\theta_0} \right)^2 \right] & \frac{1+\nu}{2} \left( \frac{m\pi}{L} \right) \left( \frac{n\pi}{R\theta_0} \right) & \frac{\nu}{R} \left( \frac{m\pi}{L} \right) \\ \frac{1+\nu}{2} \left( \frac{m\pi}{L} \right) \left( \frac{n\pi}{R\theta_0} \right) & \left[ \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 - \left( \frac{n\pi}{R\theta_0} \right)^2 - \frac{\rho h}{K} \omega^2 \right] & -\frac{1}{R} \left( \frac{n\pi}{R\theta_0} \right) \\ \frac{\nu}{R} \left( \frac{m\pi}{L} \right) & -\frac{1}{R} \left( \frac{n\pi}{R\theta_0} \right) & \left[ \frac{\rho h}{K} \omega^2 - \frac{1}{R^2} \right] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = 0 \quad (13.42)$$

为得非零解，由其系数行列式为零，得关于  $n$  的四次代数方程，求得四个  $n$  根。按常微分方程组理论，可给出含有四个待定系数的振型一般解。再由侧边 ( $\theta = 0, \theta_0$ ) 的四个边界条件 (13.15c), (13.15d) 确定这四个待定系数所应满足的齐次线代方程组，由其系数行列式为零，给出频率方程及相应频率与振型。其过程类似于 § 10.5。

**其它边界开口圆柱形无矩壳** 对于具有一般性边界条件 (13.15) 的开口圆柱形无矩壳，可采用梁函数-拱函数组合法，即设振型解

$$U(x, \theta) = \sum_{n=1}^p \sum_{m=1}^q A_{nm} X'_m(x) \Theta_n(\theta) \quad (13.43a)$$

$$V(x, \theta) = \sum_{m=1}^r \sum_{n=1}^q B_{mn} X_m(x) \Theta'_n(\theta) \quad (13.43b)$$

$$W(x, \theta) = \sum_{m=1}^r \sum_{n=1}^q C_{mn} X_m(x) \Theta_n(\theta) \quad (13.43c)$$

式中,  $X_m(x)$  为与轴向两端弧边边界条件相应的直梁  $m$  阶振型函数, 详见附录 I;  $\Theta_n(\theta)$  为与周向两端直边边界条件相应的圆拱  $n$  阶振型函数, 详见一般结构动力学书籍或 [88],  $A_{mn}$ ,  $B_{mn}$ ,  $C_{mn}$  为待定系数。将此振型解代入变分方程 (10.9), (13.16), 进行变分运算, 对于固有振动可建立关于  $A_{mn}$ ,  $B_{mn}$ ,  $C_{mn}$  的齐次线代方程组, 从而求取频率与振型。

为了叙述简化起见, 下面仅列出在解 (13.43) 中只取第  $(m, n)$  项一项的结果 (相当于轴向有  $m$  个半波, 周向有  $n$  个半波振型的近似解)。其频率方程为

$$\begin{vmatrix} (S_{11} - H_m R_n \Omega^2) & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & (S_{22} - K_n \Omega^2) & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & (S_{33} - R_n \Omega^2) \end{vmatrix} = 0 \quad (13.44)$$

式中

$$S_{11} = \beta_m^2 R_n + \frac{1-\nu}{2} \beta_n^2 H_m K_n \quad (13.45a)$$

$$S_{22} = \frac{1-\nu}{2} \beta_m^2 H_m K_n + \beta_n^2 G_n \quad (13.45b)$$

$$S_{33} = R_n \quad (13.45c)$$

$$S_{12} = S_{21} = \beta_m \beta_n \left[ \frac{1-\nu}{2} H_m K_n + \nu E_m F_n \right] \quad (13.45d)$$

$$S_{13} = S_{31} = -\nu \beta_m E_m R_n \quad (13.45e)$$

$$S_{23} = S_{32} = -\beta_n F_n \quad (13.45f)$$

而

$$\Omega^2 = \rho \frac{(1-\nu^2)}{E} \omega^2 R^2, \quad \beta_m = (\alpha a)_m \frac{R}{L}, \quad \beta_n = \frac{(\alpha b)_n}{\theta_0} \quad (13.45g)$$

$E_m$ ,  $H_m$ ,  $F_n$ ,  $K_n$ ,  $G_n$ ,  $R_n$  为梁函数和拱函数及其导数的积分值, 见式 (10.111b), 其值见附录 I 及表 10.12, 其中  $(\alpha a)_m$ ,  $(\alpha b)_n$  分别为梁的第  $m$  阶频率系数及拱的第  $n$  阶频率系数, 其值见附录 I 及表 10.11。

## § 13.4 旋转无矩壳

### 一、旋转无矩壳的一般性基本方程

对于以任意平面曲线旋转而成的旋转面为中面的旋转无矩壳 (图 11.1), 若其坐标取法同 § 11.1, 则基本参数仍为

$$\alpha = \varphi, \quad \beta = \theta, \quad A = R_\varphi(\varphi), \quad B = R_\theta(\varphi) \sin \varphi = R_\theta(\varphi), \quad R_\alpha = R_\varphi(\varphi), \quad R_\beta = R_\theta(\varphi) \quad (13.46a)$$

并有关系式

$$d(R_\theta \sin \varphi) = (R_\varphi \cos \varphi) d\varphi \quad (13.46b)$$

将其代入 § 13.2 无矩壳的一般性关系式和方程, 就有

$$\text{应变分量} \quad \varepsilon_\varphi = \frac{1}{R_\varphi} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} + w \right) \quad (13.47a)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{R_\theta} \left( u \cos \varphi + \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \sin \varphi \right) \quad (13.47b)$$

$$\varepsilon_{\varphi\theta} = \frac{1}{R_\varphi} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{R_\theta}{R_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{v}{R_\theta} \right) \quad (13.47c)$$

内力分量

$$N_\varphi = K(\varepsilon_\varphi + \nu \varepsilon_\theta) \quad (13.48a)$$

$$N_\theta = K(\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_\varphi) \quad (13.48b)$$

$$N_{\varphi\theta} = N_{\theta\varphi} = K \frac{1-\nu}{2} \varepsilon_{\varphi\theta} \quad (13.48c)$$

动力平衡方程

$$\frac{\partial(R_\theta N_\varphi)}{\partial \varphi} + R_\varphi \frac{\partial N_{\theta\varphi}}{\partial \theta} - R_\varphi \cos \varphi N_\theta + R_\varphi R_\theta \left( q_\varphi - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (13.49a)$$

$$\frac{\partial(R_\theta N_{\theta\varphi})}{\partial \varphi} + R_\varphi \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + R_\varphi \cos \varphi N_{\varphi\theta} + R_\varphi R_\theta \left( q_\theta - \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (13.49b)$$

$$\frac{N_\varphi}{R_\varphi} + \frac{N_\theta}{R_\theta} - q_z + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (13.49c)$$

将式 (13.47) 代入式 (13.48), 再代入式 (13.49), 即可建立以中面位移分量  $u$ ,  $v$ ,  $w$  表示的旋转无矩壳振动的一般性基本方程组。这是一组四阶偏微分方程组。每边将满足二个边界条件:

$$\varphi = \varphi_0: u = 0 \text{ 或 } N_\varphi = 0 \quad (13.50a)$$

$$v = 0 \text{ 或 } N_{\varphi\theta} = 0 \quad (13.50b)$$

$$\theta = \theta_0: v = 0 \text{ 或 } N_\theta = 0 \quad (13.50c)$$

$$u = 0 \text{ 或 } N_{\theta\varphi} = 0 \quad (13.50d)$$

在轴对称振动情况下, 有基本关系式和方程:

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{R_\varphi} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} + w \right) \quad (13.51a)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{R_\theta} (u \cos \varphi + w \sin \varphi) \quad (13.51b)$$

$$N_\varphi = K(\varepsilon_\varphi + \nu \varepsilon_\theta) \quad (13.51c)$$

$$N_\theta = K(\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_\varphi) \quad (13.51d)$$

$$\frac{\partial(R_\theta N_\varphi)}{\partial \varphi} - R_\varphi \cos \varphi N_\theta + R_\varphi R_\theta \left( q_\varphi - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (13.51e)$$

$$\frac{N_\varphi}{R_\varphi} + \frac{N_\theta}{R_\theta} - q_z + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (13.51f)$$

## 二、圆锥形无矩壳的振动

对于以直线旋转而成的旋转而为中曲面的圆锥形无矩壳 (图11.2), 若其坐标取法同 § 11.3, 则基本参数仍为

$$\alpha=s, \beta=\theta, A=1, B=R_0=s\cdot\sin\alpha, R_\alpha=\infty, R_\beta=s\cdot\operatorname{tg}\alpha \quad (13.52)$$

将其代入 § 13.2 无矩壳的一般性关系式和方程, 就有

应变分量

$$\varepsilon_s = \frac{\partial u}{\partial s} \quad (13.53a)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{s} + \frac{1}{s\cdot\sin\alpha_0} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{s\cdot\operatorname{tg}\alpha_0} \quad (13.53b)$$

$$\varepsilon_{s\theta} = \frac{1}{s\cdot\sin\alpha_0} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{v}{s} \quad (13.53c)$$

内力分量

$$N_s = K(\varepsilon_s + \nu\varepsilon_\theta) \quad (13.54a)$$

$$N_\theta = K(\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_s) \quad (13.54b)$$

$$N_{s\theta} = N_{\theta s} = K \frac{1-\nu}{2} \varepsilon_{s\theta} \quad (13.54c)$$

动力平衡方程

$$\frac{\partial N_s}{\partial s} + \frac{N_s}{s} + \frac{1}{s\cdot\sin\alpha_0} \frac{\partial N_{s\theta}}{\partial \theta} - \frac{N_\theta}{s} + q_s - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (13.55a)$$

$$\frac{\partial N_{s\theta}}{\partial s} + \frac{N_{s\theta}}{s} + \frac{1}{s\cdot\sin\alpha_0} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{N_{\theta s}}{s} + q_\theta - \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (13.55b)$$

$$\frac{N_\theta}{s\cdot\operatorname{tg}\alpha_0} - q_s + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (13.55c)$$

将这些关系式和方程综合, 即可建立用位移分量表示的圆锥形无矩壳振动的基本方程组

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{u}{s^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{(s\cdot\sin\alpha_0)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{1}{(s\cdot\sin\alpha_0)} \frac{\partial^2 v}{\partial s \partial \theta} \\ & - \frac{3-\nu}{2} \frac{1}{(s^2\sin\alpha_0)} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{(s\operatorname{tg}\alpha_0)} \left( \nu \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{w}{s} \right) \\ & = \frac{1}{K} \left( \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - q_s \right) \end{aligned} \quad (13.56a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1+\nu}{2} \frac{1}{(s\cdot\sin\alpha_0)} \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial \theta} + \frac{3-\nu}{2} \frac{1}{(s^2\sin\alpha_0)} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} \\ & + \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{s} \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{1-\nu}{2} \frac{v}{s^2} + \frac{1}{(s\cdot\sin\alpha_0)^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\cos\alpha_0}{(s\cdot\sin\alpha_0)^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \\ & = \frac{1}{K} \left( \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - q_\theta \right) \end{aligned} \quad (13.56b)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\nu}{s\cdot\operatorname{tg}\alpha_0} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{u}{s^2\cdot\operatorname{tg}\alpha_0} + \frac{\cos\alpha_0}{(s\cdot\sin\alpha_0)^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{(s\cdot\operatorname{tg}\alpha_0)^2} \\ & = \frac{1}{K} \left( q_s - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \end{aligned} \quad (13.56c)$$

其边界条件据旋转无矩壳的一般表达式 (13.50), 有

$$s=s_0: u=0 \text{ 或 } N_s=0 \quad (13.57a)$$

$$v=0 \text{ 或 } N_{s\theta}=0 \quad (13.57b)$$

$$\theta=\theta_0: v=0 \text{ 或 } N_\theta=0 \quad (13.57c)$$

$$u=0 \text{ 或 } N_{\theta s}=0 \quad (13.57d)$$



与基本方程 (13.56) 相应的振型方程为

$$\frac{\partial^2 U}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial U}{\partial s} - \frac{U}{s^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{(s \cdot \sin \alpha_0)^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{1}{(s \cdot \sin \alpha_0)} \frac{\partial^2 U}{\partial s \partial \theta} - \frac{3-\nu}{2} \frac{1}{(s^2 \cdot \sin \alpha_0)} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{1}{(s \cdot \operatorname{tg} \alpha_0)} \left( \nu \frac{\partial W}{\partial s} - \frac{W}{s} \right) + \frac{\rho h}{K} \omega^2 U = 0 \quad (13.58a)$$

$$\frac{1+\nu}{2} \frac{1}{(s \cdot \sin \alpha_0)} \frac{\partial^2 U}{\partial s \partial \theta} + \frac{3-\nu}{2} \frac{1}{(s^2 \cdot \sin \alpha_0)} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{1}{s} \frac{\partial V}{\partial s} - \frac{1-\nu}{2} \frac{V}{s^2} + \frac{1}{(s^2 \cdot \sin \alpha_0)^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \alpha_0}{(s \cdot \sin \alpha_0)^2} \frac{\partial W}{\partial \theta} + \frac{\rho h}{K} \omega^2 V = 0 \quad (13.58b)$$

$$\frac{1}{s \cdot \operatorname{tg} \alpha_0} \frac{\partial U}{\partial s} + \frac{U}{s^2 \cdot \operatorname{tg} \alpha_0} + \frac{\cos \alpha_0}{(s \cdot \sin \alpha_0)^2} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{W}{(s^2 \cdot \operatorname{tg} \alpha_0)^2} - \frac{\rho h}{K} \omega^2 W = 0 \quad (13.58c)$$

对于闭合圆锥形无矩壳, 可设振型解为

$$U(s, \theta) = \bar{U}(s) \cos n\theta \quad (13.59a)$$

$$V(s, \theta) = \bar{V}(s) \sin n\theta \quad (13.59b)$$

$$W(s, \theta) = \bar{W}(s) \cos n\theta \quad (13.59c)$$

代入振型方程 (13.58), 则可求得  $\bar{U}(s)$ ,  $\bar{V}(s)$ ,  $\bar{W}(s)$  所应满足的联立常微分方程组

$$\bar{U}'' + \frac{1}{s} \bar{U}' - \frac{1-\nu}{2} \frac{n^2}{(s \cdot \sin \alpha_0)^2} \bar{U} - \frac{1}{s^2} \bar{U} + \frac{1+\nu}{2} \frac{n}{(s \cdot \sin \alpha_0)} \bar{V}' - \frac{3-\nu}{2} \frac{n}{(s^2 \cdot \sin \alpha_0)} \bar{V} + \frac{1}{(s \operatorname{tg} \alpha_0)} \left( \nu \bar{W}' - \frac{\bar{W}}{s} \right) + \frac{\rho h}{K} \omega^2 \bar{U} = 0 \quad (13.60a)$$

$$- \frac{(1+\nu)n}{2(s \cdot \sin \alpha_0)} \bar{U}' - \frac{3-\nu}{2} \frac{n}{(s^2 \cdot \sin \alpha_0)} \bar{U} + \frac{1-\nu}{2} \bar{V}'' + \frac{1-\nu}{2s} \bar{V}' - \frac{n^2}{(s \cdot \sin \alpha_0)^2} \bar{V} - \frac{1-\nu}{2s^2} \bar{V} - \frac{n \cos \alpha_0}{(s \cdot \sin \alpha_0)^2} \bar{W} + \frac{\rho h}{K} \omega^2 \bar{V} = 0 \quad (13.60b)$$

$$\frac{1}{(s \cdot \operatorname{tg} \alpha_0)} (\nu \bar{U}' + \frac{1}{s} \bar{U}) + \frac{n \cos \alpha_0}{(s \cdot \sin \alpha_0)^2} \bar{V} + \frac{1}{(s \cdot \operatorname{tg} \alpha_0)^2} \bar{W} - \frac{\rho h}{K} \omega^2 \bar{W} = 0 \quad (13.60c)$$

该方程组的求解可以采用 § 11.3 第二小节的幂级数法, 通过满足方程 (13.60) 将  $\bar{U}(s)$ ,  $\bar{V}(s)$ ,  $\bar{W}(s)$  表达为含有四个待定系数的幂级数, 再根据四个边界条件 (13.5a), (13.5b) 建立四阶线代方程组, 从而求取固有频率与振型。

### 三、球形无矩壳的振动

对于以围绕其直径旋转而成的旋转面为中曲面的球形无矩壳 (图 11.3), 若其坐标取法同 § 11.5, 则基本参数仍为

$$\alpha = \varphi, \quad \beta = \theta, \quad A = R, \quad B = R \sin \varphi = R_0, \quad R_\alpha = R_\beta = R \quad (13.61)$$

将其代入 § 13.2 无矩壳的一般性关系式和方程, 就有

应变分量

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} + w \right) \quad (13.62a)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{R_0} \left( u \cos \varphi + \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \sin \varphi \right) \quad (13.62b)$$

$$\varepsilon_{\varphi\theta} = \frac{1}{R_0} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{v}{R_0} \right) \quad (13.62c)$$

内力分量

$$N_\varphi = K(\varepsilon_\varphi + \nu \varepsilon_\theta) \quad (13.63a)$$

$$N_\theta = K(\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_\varphi) \quad (13.63b)$$

$$N_{\varphi\theta} = N_{\theta\varphi} = K \frac{1-\nu}{2} \varepsilon_{\varphi\theta} \quad (13.63c)$$

动力平衡方程

$$\frac{\partial(R_0 N_\varphi)}{\partial \varphi} + R \frac{\partial N_{\theta\varphi}}{\partial \theta} - R \cos \varphi N_\theta + R R_0 \left( q_\varphi - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (13.64a)$$

$$\frac{\partial(R_0 N_{\varphi\theta})}{\partial \varphi} + R \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + R \cos \varphi N_{\theta\varphi} + R R_0 \left( q_\theta - \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (13.64b)$$

$$\frac{1}{R} (N_\varphi + N_\theta) - q_r + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (13.64c)$$

将式 (13.62) 代入式 (13.63), 再代入式 (13.64), 即可建立以中面位移分量  $u$ ,  $v$ ,  $w$  表示的球形无矩壳振动的基本方程组。其边界条件一般为

$$\varphi = \varphi_0: u = 0 \text{ 或 } N_\varphi = 0 \quad (13.65a)$$

$$v = 0 \text{ 或 } N_{\varphi\theta} = 0 \quad (13.65b)$$

$$\theta = \theta_0: v = 0 \text{ 或 } N_\theta = 0 \quad (13.65c)$$

$$u = 0 \text{ 或 } N_{\theta\varphi} = 0 \quad (13.65d)$$

在轴对称振动情况下, 有基本关系式和方程:

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} + w \right) \quad (13.66a)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{R_0} (u \cos \varphi + w \sin \varphi) \quad (13.66b)$$

$$N_\varphi = K(\varepsilon_\varphi + \nu \varepsilon_\theta) \quad (13.66c)$$

$$N_\theta = K(\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_\varphi) \quad (13.66d)$$

$$\frac{\partial(R_0 N_\varphi)}{\partial \varphi} - R \cos \varphi N_\theta + R R_0 \left( q_\varphi - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (13.66e)$$

$$\frac{1}{R} (N_\varphi + N_\theta) - q_r + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (13.66f)$$

将这些关系式和方程综合, [240] 即可建立用位移分量  $u$ ,  $w$  表示的基本方程组:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial}{\partial \varphi} (u \operatorname{ctg} \varphi) + (1-\nu)u + (1+\nu) \frac{\partial w}{\partial \varphi} = \frac{R^2}{K} \left( \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - q_\varphi \right) \quad (13.67a)$$

$$(1+\nu) \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} + u \operatorname{ctg} \varphi + 2w \right) = \frac{R^2}{K} \left( q_r - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \quad (13.67b)$$

其相应的振型方程为

$$\frac{d^2 U}{d\varphi^2} + \frac{d}{d\varphi} (U \operatorname{ctg} \varphi) + (1-\nu)U + (1+\nu) \frac{dW}{d\varphi} + \Omega^2 U = 0 \quad (13.68a)$$

$$\frac{dU}{d\varphi} + U \operatorname{ctg} \varphi + 2W - \frac{1}{1+\nu} \Omega^2 W = 0 \quad (13.68b)$$

而

$$\Omega^2 = \frac{\rho h}{K} R^2 \omega^2 \quad (13.68c)$$

将式 (13.68b) 对  $\varphi$  微分, 求出  $\frac{dW}{d\varphi}$ , 代入式 (13.68a), 可求得  $U$  的独立方程

$$\frac{d^2 U}{d\varphi^2} + \frac{d}{d\varphi}(U \operatorname{ctg} \varphi) + \gamma(\gamma+1)U = 0 \quad (13.69a)$$

式中

$$\gamma(\gamma+1) = \frac{[\Omega^2 - 2(1+\nu)][\Omega^2 + (1-\nu)]}{\Omega^2 - (1-\nu^2)} \quad (13.69b)$$

进一步引入函数  $\bar{U}(\varphi)$ , 具有

$$U = \frac{d\bar{U}}{d\varphi} \quad (13.70)$$

代入式 (13.69a) 有

$$\frac{d}{d\varphi} \left[ \frac{d^2 \bar{U}}{d\varphi^2} + \operatorname{ctg} \varphi \frac{d\bar{U}}{d\varphi} + \gamma(\gamma+1)\bar{U} \right] = 0 \quad (13.71a)$$

积分得

$$\frac{d^2 \bar{U}}{d\varphi^2} + \operatorname{ctg} \varphi \frac{d\bar{U}}{d\varphi} + \gamma(\gamma+1)\bar{U} = C \quad (13.71b)$$

此方程的解为相应齐次方程的通解加非齐次方程特解而成。特解可取为  $\bar{U} = \frac{C}{\gamma(\gamma+1)}$ , 代入式 (13.70) 不影响  $U$  的解。而变系数常微分方程

$$\bar{U}'' + \operatorname{ctg} \varphi \bar{U}' + \gamma(\gamma+1)\bar{U} = 0 \quad (13.71c)$$

之通解为<sup>[143]</sup>

$$\bar{U} = A P_\gamma(\cos \varphi) + B Q_\gamma(\cos \varphi) \quad (13.72a)$$

因此有

$$U(\varphi) = A \frac{dP_\gamma(\cos \varphi)}{d\varphi} + B \frac{dQ_\gamma(\cos \varphi)}{d\varphi} \quad (13.72b)$$

式中  $P_\gamma, Q_\gamma$  分别为第一、二类球面函数。再由方程 (13.68b) 给出

$$W = \frac{1+\nu}{\Omega^2 - 2(1+\nu)} \left[ \frac{d^2 \bar{U}}{d\varphi^2} + \operatorname{ctg} \varphi \frac{d\bar{U}}{d\varphi} \right] \quad (13.73a)$$

再注意到方程 (13.71c) 及式 (13.69b), (13.72a) 有

$$W = \frac{(1+\nu)[\Omega^2 + (1-\nu)]}{(1-\nu^2) - \Omega^2} [A P_\gamma(\cos \varphi) + B Q_\gamma(\cos \varphi)] \quad (13.73b)$$

在 § 11.5 中已经指出, 在  $\varphi = 0$  处函数  $Q_\gamma$  奇异, 因此对于顶端 ( $\varphi = 0$ ) 封闭的球壳有  $B = 0$ 。而对于一端开口球壳, 则常数  $A$  可根据下列振型边界条件确定

$$\varphi = \varphi_n: U = 0 \text{ 或 } N_\varphi^* = 0 \quad (13.74)$$

从而给出频率方程。

对于完全球壳, 考虑到函数  $P_\gamma(\cos \varphi)$  在  $\varphi = \pi$  处奇异 (则  $A = 0$ ), 除非有  $r = n$ 。因此为

得非零解，应在式 (13.69 b) 中代入  $r=n(n=0,1,2,\dots)$ ，从而有频率方程

$$\Omega^4 - [(1+3\nu)+n(n+1)]\Omega^2 + (1-\nu^2)[n(n+1)-2] = 0 \quad (13.75 a)$$

可求得频率系数  $\Omega_{n,i}^2$  ( $i=1,2$ )。不同  $i$  相应于振型  $U, W$  间不同相对形状：

$$U_{n,i}(\varphi) = \frac{dP_n(\cos\varphi)}{d\varphi} \quad (13.75 b)$$

$$W_{n,i}(\varphi) = \frac{(1+\nu)[\Omega_{n,i}^2 + (1-\nu)]}{(1-\nu^2) - \Omega_{n,i}^2} P_n(\cos\varphi) \quad (13.75 c)$$

当  $n=0$  时，按式 (13.75 a) 有正根  $\Omega_{0,1}^2 = 2(1+\nu)$ ，即有基频值

$$\omega_0 = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{2E}{(1-\nu)\rho}} \quad (13.76 a)$$

相应振型按式 (13.75)，注意到  $P_0(\cos\varphi) \equiv 1$ ，有

$$U_0(\varphi) = 0 \quad (13.76 b)$$

$$W_0(\varphi) = \text{const.} \quad (13.76 c)$$

这相当于球壳作心对称的扩展振动。

当  $n=1$  时，频率方程 (13.75 a) 的常数项为零，即有一个频率

$$\omega_1 = \Omega_{1,2} = 0 \quad (13.77 a)$$

相应振型按式 (13.75)，注意到  $P_1(\cos\varphi) = \cos\varphi$ ，有

$$U_1(\varphi) = -\sin\varphi \quad (13.77 b)$$

$$W_1(\varphi) = \cos\varphi \quad (13.77 c)$$

以上频率与振型均表明球壳作刚体平移。

球形无矩壳振动的其它一系列频率系数列于表13.7，相应振型可按式 (13.75) 确定。不同  $n$  将相应于  $\varphi$  方向有  $n$  个波。可以发现， $\Omega_{n,1}^2$  将随  $n$  增加而不断增长，而  $\Omega_{n,2}^2$  随  $n$  增加将趋向于一定值。因为频率方程 (13.75 a) 当  $n$  无限增大时的极限为

球形无矩壳频率系数

表13.7

$n$	$\Omega_{n,1}^2$	$\Omega_{n,2}^2$
0	$2(1+\nu)$	$-2(1-\nu)$
1	$3(1+\nu)$	0
$n \geq 2$	$\frac{1}{2} \left\{ (a_n + 3\nu) + \left[ (a_n + 3\nu)^2 - b_n(1-\nu^2) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}$	$\frac{1}{2} \left\{ (a_n + 3\nu) - \left[ (a_n + 3\nu)^2 - b_n(1-\nu^2) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}$
2	$a_2 = 7, b_2 = 16$	
3	$a_3 = 13, b_3 = 40$	
4	$a_4 = 21, b_4 = 72$	
5	$a_5 = 31, b_5 = 112$	
6	$a_6 = 43, b_6 = 160$	
7	$a_7 = 57, b_7 = 216$	
8	$a_8 = 73, b_8 = 280$	

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\Omega^4}{n(n+1)} - \left[ \frac{1+3\nu}{n(n+1)} + 1 \right] \Omega^2 + (1-\nu^2) \left[ 1 - \frac{2}{n(n+1)} \right] \right\} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \{ -\Omega_{n2}^2 + (1-\nu^2) \} = 0 \end{aligned} \quad (13.78 a)$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Omega_{n2}^2 = (1-\nu^2) \quad (13.78 b)$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_{n2} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (13.78 c)$$

这一现象拉姆<sup>[148]</sup> (Lamb)在一百年前已经指出过。

原  
书  
缺  
页

里兹法过程即是设满足位移振型边界条件的位移振型解: (14.2c)

由上可以看出,  $U_n, T_n$  均为  $U, V, W$  的二次式: (14.2d)

里兹法过程即是设满足位移振型边界条件的位移振型解: (14.2e)

里兹法过程即是设满足位移振型边界条件的位移振型解: (14.2f)

其中  $U, V, W$  成为壳体中面的三个位移振型分量, 带下标  $n$  的各量为相应频率分量的振型分量。

由上可以看出,  $U_n, T_n$  均为  $U, V, W$  的二次式: (14.3a)

里兹法过程即是设满足位移振型边界条件的位移振型解: (14.3b)

里兹法过程即是设满足位移振型边界条件的位移振型解: (14.4a)

里兹法过程即是设满足位移振型边界条件的位移振型解: (14.4b)

里兹法过程即是设满足位移振型边界条件的位移振型解: (14.4c)

里兹法过程即是设满足位移振型边界条件的位移振型解: (14.4d)

里兹法过程即是设满足位移振型边界条件的位移振型解: (14.4e)

里兹法过程即是设满足位移振型边界条件的位移振型解: (14.4f)

里兹法过程即是设满足位移振型边界条件的位移振型解: (14.4g)

里兹法过程即是设满足位移振型边界条件的位移振型解: (14.4h)

里兹法过程即是设满足位移振型边界条件的位移振型解: (14.4i)

里兹法过程即是设满足位移振型边界条件的位移振型解: (14.4j)

里兹法过程即是设满足位移振型边界条件的位移振型解: (14.4k)

里兹法过程即是设满足位移振型边界条件的位移振型解: (14.4l)

里兹法过程即是设满足位移振型边界条件的位移振型解: (14.4m)

里兹法过程即是设满足位移振型边界条件的位移振型解: (14.4n)

里兹法过程即是设满足位移振型边界条件的位移振型解: (14.4o)

里兹法过程即是设满足位移振型边界条件的位移振型解: (14.4p)

里兹法过程即是设满足位移振型边界条件的位移振型解: (14.4q)

里兹法过程即是设满足位移振型边界条件的位移振型解: (14.4r)

里兹法过程即是设满足位移振型边界条件的位移振型解: (14.4s)

如我们在 § 10.5, § 10.6 已经做过的那样。

在瑞雷-里兹法中采用上述函数系列来进行运算有下列好处: 函数已满足相应壳体的位移边界条件, 有的还满足了大部以至全部边界条件; 这样的函数组合十分接近实际壳体振型, 而且这些函数的序号和壳体振型的波数、半波数相对应, 因此往往取相应一项即有相当精度; 这些函数都具有正交性, 因此实际运算就可以大为简化; 此外, 这些函数及其导数的积分值已经制成表格<sup>[81]</sup>, 可直接查用, 十分方便。

用瑞雷-里兹法很容易处理壳体附加质量或刚度问题。其处理方法和平板一样 (§ 7.2), 对于附加质量只要附加动能项, 对于附加刚度, 只要附加变形能项, 而函数  $f_{ij}$  仍可采用原壳体振型函数。

瑞雷-里兹法在壳体振动分析中有广泛应用, 圆柱壳例子可参见 § 10.5, § 10.6, 圆锥壳例子可见 [75]。和平板一样, 瑞雷-里兹法给出的是壳体固有频率上限。

## 二、迦辽金法

在 § 9.9 中已经推导过, 与位移变分原理 (9.51) 等价的有变分方程 (9.55)。根据与方程 (9.55) 相应的振型变分方程, 如果所选取的振型函数已满足全部边界条件 (则式 (9.55) 中线积分项消失), 并消去剪力振型  $Q_\alpha^*$ ,  $Q_\beta^*$  项, 则有

$$\begin{aligned} & \iint \left( \left\{ \frac{\partial(BN_\alpha^*)}{\partial\alpha} + \frac{\partial(AN_{\beta\alpha}^*)}{\partial\beta} - \frac{\partial B}{\partial\alpha} N_\beta^* + \frac{\partial A}{\partial\beta} N_{\alpha\beta}^* + \frac{1}{R_\alpha} \left[ \frac{\partial(BM_\alpha^*)}{\partial\alpha} \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{\partial(AM_{\beta\alpha}^*)}{\partial\beta} - \frac{\partial B}{\partial\alpha} M_\beta^* + \frac{\partial A}{\partial\beta} M_{\alpha\beta}^* \right] + AB\rho h\omega^2 U \right\} \delta U \\ & \quad + \left\{ \frac{\partial(AN_\beta^*)}{\partial\beta} + \frac{\partial(BN_{\alpha\beta}^*)}{\partial\alpha} - \frac{\partial A}{\partial\beta} N_\alpha^* + \frac{\partial B}{\partial\alpha} N_{\beta\alpha}^* + \frac{1}{R_\beta} \left[ \frac{\partial(AM_\beta^*)}{\partial\beta} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{\partial(BM_{\alpha\beta}^*)}{\partial\alpha} - \frac{\partial A}{\partial\beta} M_\alpha^* + \frac{\partial B}{\partial\alpha} M_{\beta\alpha}^* \right] + AB\rho h\omega^2 V \right\} \delta V \\ & \quad + \left\{ \frac{\partial}{\partial\alpha} \left[ \frac{1}{A} \left( \frac{\partial(BM_\alpha^*)}{\partial\alpha} + \frac{\partial(AM_{\beta\alpha}^*)}{\partial\beta} - \frac{\partial B}{\partial\alpha} M_\beta^* + \frac{\partial A}{\partial\beta} M_{\alpha\beta}^* \right) \right] \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial}{\partial\beta} \left[ \frac{1}{B} \left( \frac{\partial(AM_\beta^*)}{\partial\beta} + \frac{\partial(BM_{\alpha\beta}^*)}{\partial\alpha} - \frac{\partial A}{\partial\beta} M_\alpha^* + \frac{\partial B}{\partial\alpha} M_{\beta\alpha}^* \right) \right] \right. \\ & \quad \left. - AB \left( \frac{N_\alpha^*}{R_\alpha} + \frac{N_\beta^*}{R_\beta} \right) + AB\rho h\omega^2 W \right\} \delta W \Big) d\alpha d\beta = 0 \end{aligned} \quad (14.7a)$$

式中带“\*”各量为内力振型, 按式 (9.35) 为

$$N_\alpha^* = K(e_\alpha^{0*} + \nu e_\beta^{0*}) \quad (14.8a)$$

$$N_\beta^* = K(e_\beta^{0*} + \nu e_\alpha^{0*}) \quad (14.8b)$$

$$N_{\alpha\beta}^* = N_{\beta\alpha}^* = K \frac{1-\nu}{2} e_{\alpha\beta}^{0*} \quad (14.8c)$$

$$M_\alpha^* = D(x_\alpha^* + \nu x_\beta^*) \quad (14.8d)$$

$$M_\beta^* = D(x_\beta^* + \nu x_\alpha^*) \quad (14.8e)$$

$$M_{\alpha\beta}^* = M_{\beta\alpha}^* = D \frac{1-\nu}{2} x_{\alpha\beta}^* \quad (14.8f)$$

式中各应变分量见式 (14.2)。将式 (14.8), (14.2) 代入式 (14.7a), 可得用位移振型表示的变分方程具有如下形式:



$$\iint \{ [L_1(U, V, W) + \rho h \omega^2 U] \delta U + [L_2(U, V, W) + \rho h \omega^2 V] \delta V + [L_3(U, V, W) + \rho h \omega^2 W] \delta W \} d\alpha d\beta = 0 \quad (14.7b)$$

根据以上各式, 方程 (14.7b) 中泛函  $L_1, L_2, L_3$  的算式是已知的。

迦辽金法过程是设满足全部振型边界条件的位移振型解

$$U = \sum_{i=1}^n A_{1i} F_{1i}(\alpha, \beta) \quad (14.9a)$$

$$V = \sum_{i=1}^n A_{2i} F_{2i}(\alpha, \beta) \quad (14.9b)$$

$$W = \sum_{i=1}^n A_{3i} F_{3i}(\alpha, \beta) \quad (14.9c)$$

式中  $F_{ij} (i=1, 2, 3, j=1, 2, 3, \dots, n)$  为预先选定的壳体中面曲线坐标的函数,  $A_{ij}$  为待定系数。代入变分方程 (14.7b) 有

$$\begin{aligned} & \iint \left\{ \left[ L_1 \left( \sum_i A_{1i} F_{1i}, \sum_i A_{2i} F_{2i}, \sum_i A_{3i} F_{3i} \right) + \rho h \omega^2 \sum_i A_{1i} F_{1i} \right] \left( \sum_i F_{1i} \delta A_{1i} \right) \right. \\ & + \left[ L_2 \left( \sum_i A_{1i} F_{1i}, \sum_i A_{2i} F_{2i}, \sum_i A_{3i} F_{3i} \right) + \rho h \omega^2 \sum_i A_{2i} F_{2i} \right] \left( \sum_i F_{2i} \delta A_{2i} \right) \\ & + \left[ L_3 \left( \sum_i A_{1i} F_{1i}, \sum_i A_{2i} F_{2i}, \sum_i A_{3i} F_{3i} \right) + \rho h \omega^2 \sum_i A_{3i} F_{3i} \right] \left( \sum_i F_{3i} \delta A_{3i} \right) \Big\} \times d\alpha d\beta = 0 \quad (14.7c) \end{aligned}$$

考虑到  $\delta A_{ij} (i=1, 2, 3, j=1, 2, 3, \dots, n)$  的任意性, 则给出算式

$$\begin{aligned} & \iint \left\{ \left[ L_1 \left( \sum_i A_{1i} F_{1i}, \sum_i A_{2i} F_{2i}, \sum_i A_{3i} F_{3i} \right) + \rho h \omega^2 \sum_i A_{1i} F_{1i} \right] F_{1j} \right. \\ & \quad \left. + \left[ L_2 \left( \sum_i A_{1i} F_{1i}, \sum_i A_{2i} F_{2i}, \sum_i A_{3i} F_{3i} \right) + \rho h \omega^2 \sum_i A_{2i} F_{2i} \right] F_{2j} \right. \\ & \quad \left. + \left[ L_3 \left( \sum_i A_{1i} F_{1i}, \sum_i A_{2i} F_{2i}, \sum_i A_{3i} F_{3i} \right) + \rho h \omega^2 \sum_i A_{3i} F_{3i} \right] F_{3j} \right\} d\alpha d\beta = 0 \quad (14.10) \end{aligned}$$

式 (14.10) 即是壳体固有振动分析的迦辽金法算式。这是关于系数  $A_{ij}$  的  $3n$  阶齐次线性方程组, 由其系数行列式为零给出频率方程和各阶固有频率以及每阶  $(3n-1)$  个振型系数, 代回式 (14.9) 给出各阶固有振型。

在许多情况下, 函数  $F_{ij}(\alpha, \beta)$  仍可取式 (14.6) 形式, 也具有相当精度。应用迦辽金法同样可只取一项求解, 所给出频率相应的振型在形状上是预先给定的, 但  $U, V, W$  间相对幅值比是根据运算确定的。和平板一样, 迦辽金法给出的是壳体固有频率上限。

在第九章中已经说明, 变分方程 (9.55) 能给出动力平衡方程及力边界条件, 因此式 (14.7b) 中每个中括号为零即给出壳体的位移振型基本微分方程。所以迦辽金法基本算式



第一部分, 为无薄摩力壳体振动理论结果 (§ 9.11); 只取第二部分, 为无矩壳体振动理论结果 (第十三章)。

和 § 10.4 中叙述的同一理论解析结果相比, 显然迦辽金法结果简化了很多, 应用十分方便, 当然是含有一定误差。但实际上, 在 § 10.4 中已经指出, 由于即使是采用简化理论进行解析求解, 过程仍十分繁琐, 因而不得不再进一步引入一些简化假设, 也是会导致较大误差的。因此从工程实用目的出发, 在大多数情况下, 式 (14.13) 还是十分适用的。

这里还应指出一点, 简化理论有许多简化前提, 在这些前提下基本微分方程的简化与综合已经做了很多工作 (如 § 9.11 及 § 10.4 中所介绍那样)。因此, 采用从基本微分方程出发的迦辽金法就十分方便、易解。而应用有关简化理论来建立相应变形的表示能量的泛函, 再采用瑞雷-里兹法求解, 则就比较困难。这就是上面所指出的迦辽金法的特点。

## (3) § 14.2 = 壳体的自由振动与强迫振动

正如在第一章概论指出过, 并在第六章平板自由振动与强迫振动分析研究过那样, 一般结构有了固有振动解, 包括固有频率与振型, 则利用振型共有的正交性, 都可给出统一形式的自由振动与强迫振动解, 而不管其自由振动的初始条件如何和强迫振动的载荷分布及波形如何。壳体也不例外。由于平板的自由振动与强迫振动分析已列专章, 本章暂加讨论, 所以关于壳体的这部分内容只叙述一般性内容, 及典型问题的分析, 就不再按各类壳体、各种载荷分别加以讨论了。

### 一、壳体振型的正交性

在 § 6.1 中的平板振型的正交性, 我们是从不同振型所满足的振型微分方程出发, 分别进行分部积分, 然后相减求得的。对于壳体, 也完全可以按照类似过程建立振型的正交性, 只要注意必须用三个独立位移振型所满足的三个振型微分方程出发, 各自分部积分后相互叠加, 然后相减。由于这一方法推导过程和平板相类似, 这里就不再罗列了。本小节将介绍另立一种从变分原理出发证明结构振型正交性的方法, 对壳体, 典型问题是针对壳体的, 但对其它结构也适用。这里将建立三个变分原理, 其 (I, II) 与变分原理 (I, II) 类似, 由 (I, II) 知壳体的位移变分原理为

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt = 0 \quad (14.14a)$$

其中第一项按式 (9.54a) 可写为

其中第一项按式 (9.54a) 可写为

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta T dt = - \int_{t_0}^{t_1} \iint \rho h \dot{w} \delta \dot{w} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{u} \delta \dot{u} \cdot AB d\alpha d\beta dt \quad (14.14b)$$

第二项按 § 9.9 式 (e) 有

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta U dt = \int_{t_0}^{t_1} \iiint [\sigma_{\alpha\alpha} \delta \epsilon_{\alpha\alpha} + \sigma_{\beta\beta} \delta \epsilon_{\beta\beta} + \tau_{\alpha\beta} \delta \epsilon_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha\gamma} \delta \epsilon_{\alpha\gamma} + \tau_{\beta\gamma} \delta \epsilon_{\beta\gamma}] \times AB d\alpha d\beta dy dt \quad (14.14c)$$

进一步将式 (14.14) 综合, 对于固有振动, 完成时域积分, 用振型来表示, 则对于  $m$  阶振型及  $n$  阶振型变分和  $n$  阶振型及  $m$  阶振型变分, 分别有

$$\iiint_V [\sigma_{\alpha}^*(m) \varepsilon_{\alpha}^*(n) + \sigma_{\beta}^*(m) \varepsilon_{\beta}^*(n) + \tau_{\alpha\beta}^*(m) \varepsilon_{\alpha\beta}^*(n) + \tau_{\alpha\gamma}^*(m) \varepsilon_{\alpha\gamma}^*(n) + \tau_{\beta\gamma}^*(m) \varepsilon_{\beta\gamma}^*(n)] \\ \times AB d\alpha d\beta d\gamma = \omega_m^2 \iiint_V \rho h [U_m U_n + V_m V_n + W_m W_n] AB d\alpha d\beta \quad (a)$$

$$\iiint_V [\sigma_{\alpha}^*(n) \varepsilon_{\alpha}^*(m) + \sigma_{\beta}^*(n) \varepsilon_{\beta}^*(m) + \tau_{\alpha\beta}^*(n) \varepsilon_{\alpha\beta}^*(m) + \tau_{\alpha\gamma}^*(n) \varepsilon_{\alpha\gamma}^*(m) + \tau_{\beta\gamma}^*(n) \varepsilon_{\beta\gamma}^*(m)] \\ \times AB d\alpha d\beta d\gamma = \omega_n^2 \iiint_V \rho h [U_n U_m + V_n V_m + W_n W_m] AB d\alpha d\beta \quad (b)$$

再考虑到式 (9.30)，应变振型与内力振型间有关系式

$$\varepsilon_{\alpha}^*(n) = \frac{1}{E} [\sigma_{\alpha}^*(n) - \nu \sigma_{\beta}^*(n)], \quad \varepsilon_{\beta}^*(n) = \frac{1}{E} [\sigma_{\beta}^*(n) - \nu \sigma_{\alpha}^*(n)] \\ \varepsilon_{\alpha\beta}^*(n) = \frac{1}{G} \tau_{\alpha\beta}^*(n), \quad \varepsilon_{\alpha\gamma}^*(n) = \frac{1}{G} \tau_{\alpha\gamma}^*(n), \quad \varepsilon_{\beta\gamma}^*(n) = \frac{1}{G} \tau_{\beta\gamma}^*(n) \quad (c)$$

及

$$\varepsilon_{\alpha}^*(m) = \frac{1}{E} [\sigma_{\alpha}^*(m) - \nu \sigma_{\beta}^*(m)], \quad \varepsilon_{\beta}^*(m) = \frac{1}{E} [\sigma_{\beta}^*(m) - \nu \sigma_{\alpha}^*(m)] \\ \varepsilon_{\alpha\beta}^*(m) = \frac{1}{G} \tau_{\alpha\beta}^*(m), \quad \varepsilon_{\alpha\gamma}^*(m) = \frac{1}{G} \tau_{\alpha\gamma}^*(m), \quad \varepsilon_{\beta\gamma}^*(m) = \frac{1}{G} \tau_{\beta\gamma}^*(m) \quad (d)$$

将式 (c) 代入式 (a)，式 (d) 代入式 (b)，然后相减可得

$$(\omega_m^2 - \omega_n^2) \iiint_V \rho h [U_m U_n + V_m V_n + W_m W_n] AB d\alpha d\beta = 0 \quad (e)$$

显然，当  $m \neq n$  时有

$$\iiint_V \rho h(\alpha, \beta) [U_m(\alpha, \beta) U_n(\alpha, \beta) + V_m(\alpha, \beta) V_n(\alpha, \beta) \\ + W_m(\alpha, \beta) W_n(\alpha, \beta)] AB d\alpha d\beta = 0 \\ (m \neq n) \quad (14.15)$$

这就是壳体振型正交性。由于证明是从壳体一般变分原理出发，因此对于各类壳体都是成立的。与平板正交性式 (6.1) 相比，其差别在于壳体有三个独立位移振型，因此有式 (14.15) 形式。至于具有附加质量的壳体的振型正交性可参见板件表达式 (6.4)，只要把  $\rho h(\alpha, \beta)$  看成为包括集中、分布质量的广义质量密度就可以。壳体振型正交性是用振型叠加法进行壳体振动分析的基础之一。

## 二、具有初始条件的壳体自由振动一般解

若壳体不承受外载，而具有初始位移及初始速度

$$u(\alpha, \beta, 0) = u_0(\alpha, \beta), \quad v(\alpha, \beta, 0) = v_0(\alpha, \beta), \quad w(\alpha, \beta, 0) = w_0(\alpha, \beta) \quad (14.16a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\alpha, \beta, 0) = \dot{u}_0(\alpha, \beta), \quad \frac{\partial v}{\partial t}(\alpha, \beta, 0) = \dot{v}_0(\alpha, \beta), \\ \frac{\partial w}{\partial t}(\alpha, \beta, 0) = \dot{w}_0(\alpha, \beta) \quad (14.16b)$$

由式 (14.7b) 知，一般壳体具有以位移分量表示的微分方程组

$$L_i(u, v, w) - \rho h \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0 \quad (i=1, 2, 3) \quad (14.17a)$$

式中

$$u_1 = u, \quad u_2 = v, \quad u_3 = w \quad (14.17b)$$

则设满足方程 (14.17) 的自由振动解为

$$u(\alpha, \beta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(\alpha, \beta) [a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t] \quad (14.18a)$$

$$v(\alpha, \beta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(\alpha, \beta) [a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t] \quad (14.18b)$$

$$w(\alpha, \beta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(\alpha, \beta) [a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t] \quad (14.18c)$$

式中,  $U_n, V_n, W_n, \omega_n$  为壳体的各阶振型与频率, 而常数  $a_n, b_n$  由初始条件 (14.16) 确定。将解 (14.18) 代入式 (14.16) 有

$$u_0(\alpha, \beta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n U_n(\alpha, \beta) \quad (14.19a)$$

$$v_0(\alpha, \beta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n V_n(\alpha, \beta) \quad (14.19b)$$

$$w_0(\alpha, \beta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n W_n(\alpha, \beta) \quad (14.19c)$$

$$\dot{u}_0(\alpha, \beta) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n b_n U_n(\alpha, \beta) \quad (14.19d)$$

$$\dot{v}_0(\alpha, \beta) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n b_n V_n(\alpha, \beta) \quad (14.19e)$$

$$\dot{w}_0(\alpha, \beta) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n b_n W_n(\alpha, \beta) \quad (14.19f)$$

进一步将式 (14.19a) 乘  $\rho h U_n$ , 加式 (14.19b) 乘  $\rho h V_n$ , 加式 (14.19c) 乘  $\rho h W_n$ , 再沿壳体中曲面积分, 并利用壳体振型正交性 (14.15), 可得

$$a_n = \frac{\iint \rho h [u_0(\alpha, \beta) U_n(\alpha, \beta) + v_0(\alpha, \beta) V_n(\alpha, \beta) + w_0(\alpha, \beta) W_n(\alpha, \beta)] AB d\alpha d\beta}{\iint \rho h [U_n^2(\alpha, \beta) + V_n^2(\alpha, \beta) + W_n^2(\alpha, \beta)] AB d\alpha d\beta} \quad (14.20a)$$

同样, 将式 (14.19d) 乘  $\rho h U_n$ , 加式 (14.19e) 乘  $\rho h V_n$ , 加式 (14.19f) 乘  $\rho h W_n$ , 再沿壳体中曲面积分, 并利用壳体振型正交性 (14.15), 可得

$$b_n = \frac{\iint \rho h [\dot{u}_0(\alpha, \beta) U_n(\alpha, \beta) + \dot{v}_0(\alpha, \beta) V_n(\alpha, \beta) + \dot{w}_0(\alpha, \beta) W_n(\alpha, \beta)] AB d\alpha d\beta}{\omega_n \iint \rho h [U_n^2(\alpha, \beta) + V_n^2(\alpha, \beta) + W_n^2(\alpha, \beta)] AB d\alpha d\beta} \quad (14.20b)$$

将式 (14.20) 代入解 (14.18), 即可给出具有任意初始条件  $u_0, v_0, w_0, \dot{u}_0, \dot{v}_0, \dot{w}_0$  的各类壳体自由振动一般解。 (E.S.I=1)  $0 = \frac{1}{\sqrt{16}} (u - (w, v, u))$

至于计入阻尼的壳体自由振动和 § 6.6 的薄板分析方法一样, 解 (14.18) 将具有式 (6.53 c), (6.54 c), (6.64 c) 类似结果。例如按粘滞阻尼理论有解

$$u(a, \beta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\gamma}{2} \omega_n^2 t} [a_n \cos \bar{\omega}_n t + b_n \sin \bar{\omega}_n t] U_n(a, \beta) \quad (14.21a)$$

$$v(a, \beta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\gamma}{2} \omega_n^2 t} [a_n \cos \bar{\omega}_n t + b_n \sin \bar{\omega}_n t] V_n(a, \beta) \quad (14.21b)$$

$$w(a, \beta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\gamma}{2} \omega_n^2 t} [a_n \cos \bar{\omega}_n t + b_n \sin \bar{\omega}_n t] W_n(a, \beta) \quad (14.21c)$$

式中有关符号意义见 § 6.6。

### 三、在外载作用下的壳体强迫振动一般解

在动载荷分量  $q_a(a, \beta, t), q_b(a, \beta, t), q_c(a, \beta, t)$  作用下壳体的强迫振动满足位移基本方程组

$$L_1(u, v, w) - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + q_a = 0 \quad (14.22a)$$

$$L_2(u, v, w) - \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + q_b = 0 \quad (14.22b)$$

$$L_3(u, v, w) - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q_c = 0 \quad (14.22c)$$

为此, 可设其解为

$$u(a, \beta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) U_n(a, \beta) \quad (14.23a)$$

$$v(a, \beta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) V_n(a, \beta) \quad (14.23b)$$

$$w(a, \beta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) W_n(a, \beta) \quad (14.23c)$$

其中  $U_n, V_n, W_n$  为壳体各阶振型,  $T_n$  为各振型分量。将式 (14.23) 代入基本方程 (14.22), 并考虑到算子  $L_1, L_2, L_3$  是线性的, 故有

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) L_1(U_n, V_n, W_n) - \rho h \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{T}_n U_n + q_a = 0 \quad (14.24a)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) L_2(U_n, V_n, W_n) - \rho h \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{T}_n V_n + q_b = 0 \quad (14.24b)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) L_3(U_n, V_n, W_n) - \rho h \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{T}_n W_n + q_c = 0 \quad (14.24c)$$

考虑到振型  $U_n, V_n, W_n$  已满足振型方程组

$$L_1(U_n, V_n, W_n) = -\rho h \omega_n^2 U_n \quad (14.25a)$$

$$L_2(U_n, V_n, W_n) = -\rho h \omega_n^2 V_n \quad (14.25b)$$

$$L_3(U_n, V_n, W_n) = -\rho h \omega_n^2 W_n \quad (14.25c)$$

将其代入方程 (14.24) 则变成

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\tilde{T}_n + \omega_n^2 T_n] \rho h U_n = q_n \quad (14.26a)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\tilde{T}_n + \omega_n^2 T_n] \rho h V_n = q_n \quad (14.26b)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\tilde{T}_n + \omega_n^2 T_n] \rho h W_n = q_n \quad (14.26c)$$

进一步将式 (14.26a) 乘  $U_n$ , 加式 (14.26b) 乘  $V_n$ , 加式 (14.26c) 乘  $W_n$ , 再沿壳体中曲面积分, 并利用壳体振型正交性 (14.15), 可得关于  $T_n(t)$  独立方程

$$\frac{d^2 T_n(t)}{dt^2} + \omega_n^2 T_n(t) = \frac{P_n(t)}{M_n} \quad (14.27a)$$

式中

(1) 第  $n$  阶广义力

$$P_n(t) = \iint [q_n(a, \beta, t) U_n(a, \beta) + q_n(a, \beta, t) V_n(a, \beta) + q_n(a, \beta, t) W_n(a, \beta)] AB da d\beta$$

(2) 第  $n$  阶广义质量

$$M_n(t) = \iint \rho h [U_n^2(a, \beta) + V_n^2(a, \beta) + W_n^2(a, \beta)] AB da d\beta$$

方程 (14.27a) 和具有质量  $M_n$ , 固有频率  $\omega_n$ , 受有外载  $P_n(t)$  的单自由度体系运动方程相同。这一结果和平板强迫振动分析结果完全一样。这里再一次说明无论什么结构, 只要求得系统的固有频率与振型, 利用振型正交性, 其强迫振动解都统一归结为单自由度体系方程问题。这也再次说明结构动力学的关键还在于求解有关结构的固有振动问题, 而自由振动和强迫振动的求解则变得十分统一和简单了。

在 § 6.3 中已研究过, 方程 (14.27a) 的解为

$$T_n(t) = a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t + \frac{P_0}{M_n \omega_n^2} \mathcal{D}_n(t) \quad (14.28a)$$

而杜哈美积分

$$\mathcal{D}_n(t) = \frac{\omega_n}{P_0} \int_0^t P_n(\tau) \sin \omega_n (t - \tau) d\tau \quad (14.28b)$$

解 (14.28) 中  $a_n, b_n$  由初始条件确定 (方法同上),  $P_0$  为  $P_n(t)$  的特征值 (参见表 6.1),  $\mathcal{D}_n(t)$  可根据式 (14.27b) 解析求解或数值求解 (§ 7.14) 或查表 6.1 或按式 (6.13) 计算。将式 (14.28) 代入解 (14.23), 即可给出在任意动载荷作用下, 具有任意初始条件的各类壳体强迫振动一般解 [220]。

至于计入阻尼的壳体强迫振动, 和 § 6.7 的薄板分析方法一样, 解 (14.23), (14.28) 将具有式 (6.69), (6.77) 的类似解。

$$u(\alpha, \beta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ e^{-\frac{\gamma}{2} \omega_n^2 t} [a_n \cos \bar{\omega}_n t + b_n \sin \bar{\omega}_n t] \right. \\ \left. + \frac{1}{\bar{\omega}_n M_n} \int_0^t e^{-\frac{\gamma}{2} \omega_n^2 (t-\tau)} P_n(\tau) \sin \bar{\omega}_n (t-\tau) d\tau \right\} U_n(\alpha, \beta) \quad (14.29 a)$$

$$v(\alpha, \beta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ e^{-\frac{\gamma}{2} \omega_n^2 t} [a_n \cos \bar{\omega}_n t + b_n \sin \bar{\omega}_n t] \right. \\ \left. + \frac{1}{\bar{\omega}_n M_n} \int_0^t e^{-\frac{\gamma}{2} \omega_n^2 (t-\tau)} p_n(\tau) \sin \bar{\omega}_n (t-\tau) d\tau \right\} V_n(\alpha, \beta) \quad (14.29 b)$$

$$w(\alpha, \beta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ e^{-\frac{\gamma}{2} \omega_n^2 t} [a_n \cos \bar{\omega}_n t + b_n \sin \bar{\omega}_n t] \right. \\ \left. + \frac{1}{\bar{\omega}_n M_n} \int_0^t e^{-\frac{\gamma}{2} \omega_n^2 (t-\tau)} p_n(\tau) \sin \bar{\omega}_n (t-\tau) d\tau \right\} W_n(\alpha, \beta) \quad (14.29 c)$$

#### 四、圆柱壳块的简谐振动

在简谐外载作用下壳体的稳态解，有的可以不经过上面运算，而直接求解。下面以四边简支圆柱壳块（图10.4）简化理论解为例来说明这一过程。

由 § 9.11, § 10.4 知，圆柱壳振动简化理论的基本方程为关于法向位移  $w$  及应力函数  $f$  的联立微分方程组

$$D \nabla^2 \nabla^2 w + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, \theta, t) \quad (14.30 a)$$

$$\frac{Eh}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \nabla^2 \nabla^2 f = 0 \quad (14.30 b)$$

式中

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{R^2 \partial \theta^2} \quad (14.30 c)$$

对于简谐外载

$$q(x, \theta, t) = q_0(x, \theta) e^{i p t} \quad (14.30 d)$$

可设稳态解

$$w(x, \theta, t) = w_0(x, \theta) e^{i p t} \quad (14.31 a)$$

$$f(x, \theta, t) = f_0(x, \theta) e^{i p t} \quad (14.31 b)$$

对四边简支圆柱壳块可直接设振型解为

$$W_{mn}(x, \theta) = \sin \frac{m\pi}{L} x \sin \frac{n\pi}{\theta_0} \theta \quad (14.32 a)$$

$$F_{mn}(x, \theta) = c_{mn} \sin \frac{m\pi}{L} x \sin \frac{n\pi}{\theta_0} \theta \quad (14.32 b)$$

代入基本方程 (14.30) 相应的振型方程，很容易求得固有频率为



$$\omega_{mn}^2 = \frac{D(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^4 + \frac{Eh}{R^2}\alpha_m^4}{\rho h(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2} \quad (14.32c)$$

式中

$$\alpha_m = \frac{m\pi}{L}, \quad \beta_n = \frac{n\pi}{R\theta_0} \quad (14.32d)$$

$c_{mn}$ 为相应振型系数。

进一步按振型展开解

$$w_0(x, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi}{L} x \sin \frac{n\pi}{\theta_0} \theta \quad (14.31c)$$

$$f_0(x, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{m\pi}{L} x \sin \frac{n\pi}{\theta_0} \theta \quad (14.31d)$$

及载荷

$$q_0(x, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin \frac{m\pi}{L} x \sin \frac{n\pi}{\theta_0} \theta \quad (14.31e)$$

而有

$$q_{mn} = \frac{4}{\theta_0 L} \int_0^{\theta_0} \int_0^L q_0(x, \theta) \sin \frac{m\pi}{L} x \sin \frac{n\pi}{\theta_0} \theta dx d\theta \quad (14.31f)$$

将解 (14.31) 及载荷 (14.30d) 代入基本方程, 可求得解中系数  $A_{mn}$ ,  $B_{mn}$  应满足的两个方程

$$[D(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2 - \rho h p^2] A_{mn} - \frac{1}{R} \alpha_m^2 B_{mn} = q_{mn} \quad (e)$$

$$\frac{Eh}{R} \alpha_m^2 A_{mn} + (\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2 B_{mn} = 0 \quad (f)$$

上述非齐次方程可解得

$$A_{mn} = \frac{q_{mn}(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2}{[D(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2 - \rho h p^2](\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2 + \frac{Eh}{R^2} \alpha_m^4} \quad (14.33a)$$

$$B_{mn} = - \frac{\frac{Eh}{R} \alpha_m^2 q_{mn}}{[D(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2 - \rho h p^2](\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2 + \frac{Eh}{R^2} \alpha_m^4} \quad (14.33b)$$

代入式 (14.31), 并注意到  $\omega_{mn}^2$  表达式 (14.32c), 可得解

$$w(\alpha, \beta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{mn}}{\rho h(\omega_{mn}^2 - p^2)} \sin \frac{m\pi}{L} x \sin \frac{n\pi}{\theta_0} \theta e^{i p t} \quad (14.34a)$$

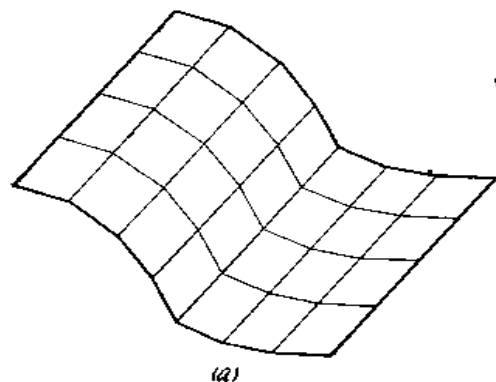
$$f(\alpha, \beta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} - \frac{E \alpha_m^2 q_{mn}}{\rho R(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2(\omega_{mn}^2 - p^2)} \sin \frac{m\pi}{L} x \sin \frac{n\pi}{\theta_0} \theta e^{i p t} \quad (14.34b)$$

从而可根据 § 9.11 诸式求取壳中动应力。很明显, 当载荷频率  $p$  和壳体某阶频率  $\omega_{mn}$  相重合时将发生共振, 和简谐外载下平板解具有同样特性。

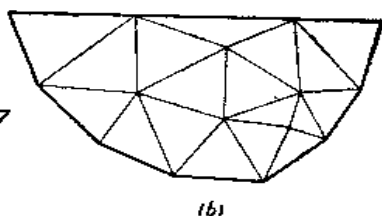




以连结, 而用这些平面组合来代替壳体原中曲面进行有限元分析。每个平壳单元的各种力学量都包含有弯曲与薄膜两部分。弯曲部分相当于 § 7.11 中平板单元, 薄膜部分相当于一般平面有限元。这两部分叠加就成为平壳元分析的基础。对于柱壳结构, 这些结点一般落在母线上, 形成矩形平壳元 (图 14.1 a); 对于任意形状壳体, 这些结点可以任意选取, 每三点形成一个三角形平壳元 (图 14.1 b)。下面将以矩形平壳元 (图 14.2) 为例来加以说明。



(a)



(b)

图 14.1

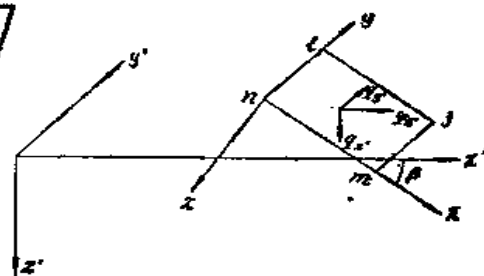


图 14.2

首先建立位移列阵, 和式 (7.63 a) 具有同样形式

$$\{f\} = [N]\{\delta\} \quad (14.39 a)$$

不过其中

壳体位移列阵

$$\{f\} = [u, v, w]^T \quad (14.39 b)$$

结点广义位移列阵

$$\{\delta\} = [u, v, w, \theta_x, \theta_y, u, v, w, \theta_x, \theta_y, u_m, v_m, w_m, \theta_x, \theta_y, u_n, v_n, w_n, \theta_x, \theta_y]^T \quad (14.39 c)$$

面形函数

$$[N] = [[N_1][N_2][N_3]]^T \quad (14.39 d)$$

为  $3 \times 20$  阶矩阵, 其每个元素为坐标及结点坐标参数的函数, 具体可按式 (7.63 b), (7.62 c), (7.61 a) 确定。这是一种四结点 20 自由度单元。

应变列阵和式 (7.66 a) 类似有

$$\{e\} = [B]\{\delta\} \quad (14.40 a)$$

不过其中

壳体应变列阵

$$\{e\} = [\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_{xy}, \chi_x, \chi_y, \chi_{xy}]^T \quad (14.40 b)$$

矩阵

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}[N_1] & \frac{\partial}{\partial y}[N_2] & \frac{\partial}{\partial x}[N_2] + \frac{\partial}{\partial y}[N_1] \\ -\frac{\partial^2}{\partial x^2}[N_3] & -\frac{\partial^2}{\partial y^2}[N_3] & -2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}[N_3] \end{bmatrix}^T \quad (14.40 c)$$

内力矩阵和式 (7.68 a) 类似有

$$\{\sigma\} = [D]\{e\} \quad (14.41 a)$$

不过其中

壳体内力列阵

$$\{\sigma\} = [N_x, N_y, N_{xy}, M_x, M_y, M_{xy}]^T \quad (14.41 b)$$

弹性矩阵

$$[D] = \begin{pmatrix} [D_1] & [0] \\ [0] & [D_2] \end{pmatrix} \quad (14.41 c)$$

$$[D_1] = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix},$$

$$[D_2] = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \quad (14.41 d)$$

单元运算矩阵仍和式 (7.71) 一样有

单元质量矩阵

$$[M^*] = \iint [N]^T \rho h [N] ds \quad (14.42 a)$$

单元刚度矩阵

$$[K^*] = \iint [B]^T [D] [B] ds \quad (14.42 b)$$

不过在单元运算矩阵集合为整体运算矩阵前需进行坐标转换。因为单元坐标平面和本身所在平面位置有关，各单元所在平面位置又各不相同（图14.1）。上述单元运算矩阵算式是针对单元局部坐标系  $xyz$  的，为转换到公共坐标系  $x'y'z'$ （图14.2），需引入转换矩阵。例如对于柱壳的矩形单元，不同单元局部坐标系的  $y$  轴方向不变，而  $x$  及  $z$  轴方向各自不同。若单元的  $x, z$  轴与公共坐标轴的  $x', z'$  轴夹角为  $\beta$ ，则有转换矩阵

$$[R] = \begin{pmatrix} [R_0] & & & & \\ & 0 & & & \\ & & [R_0] & & \\ & & & [R_0] & \\ 0 & & & & \\ & & & & [R_0] \end{pmatrix} \quad (14.43 a)$$

$$[R_0] = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \quad (14.43 b)$$

转换后沿公共坐标系的

单元质量矩阵

$$[M] = [R][M^*][R]^T \quad (14.44 a)$$

单元刚度矩阵

$$[K] = [R][K^*][R]^T \quad (14.44b)$$

沿公共坐标系的单元载荷列阵和式 (7.71d) 类似, 有

$$\{F\} = \iint [N]^T \{q\} ds \quad (14.44c)$$

不过其中

$$\{q\} = [q_x, q_y, q_z]^T \quad (14.44d)$$

为外载沿公共坐标系分量列阵。

按式 (14.44) 计算所得单元运算矩阵进行集合, 给出整体质量、刚度、载荷矩阵, 即可建立壳体振动分析的有限元算式

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = \{F\} \quad (14.45)$$

## (二) 曲壳元

用上述平壳元分析壳体是有一定缺陷的: 用平板组合成的折板结构在几何形状上与原光滑壳体有一定距离; 实际壳体的弯曲变形与薄膜变形是耦合的, 但平壳元中两者是不耦合的; 平壳元中坐标转换也给计算带来很多不便。为此, 可以应用曲壳元来克服这些不足。曲壳元的特点是壳体划分为单元后在形状上保持不变。曲壳元一般用正交曲线坐标线来划分单元, 对不同类型壳体可以建立相应的圆柱壳块元、圆锥壳块元、旋转壳块元或者壳体等参数元。

建立曲壳元过程, 一般用与壳体形状相应的正交曲线族 (详见第十、十一章) 将壳体分割成有限个单元。单元内三个中面位移分量用形函数表示为所选定的结点广义位移 (自由度) 的函数 (参见式 (14.39a)), 其形函数  $[N]$  中坐标采用与壳体形状相应的正交曲线坐标 (例如, 圆柱壳块元为  $x, \theta$ ; 圆锥壳块元为  $s, \theta$ ; 球壳块元为  $\varphi, \theta$  等)。根据各类壳体相应的位移-应变关系式 (例如, 圆柱壳块元为式 (10.2); 圆锥壳块元为式 (11.11); 球壳块元为式 (11.30) 等), 建立应变列阵 (参见式 (14.40a)) 及  $[B]$  矩阵。根据各类壳体相应的应变-内力关系式 (例如, 圆柱壳块元为式 (10.3); 圆锥壳块元为式 (11.12); 球壳块元为式 (11.3) 等), 建立内力列阵 (参见式 (14.41a)) 及  $[D]$  矩阵。再按统一算式 (7.71) 建立单元质量、刚度、载荷矩阵, 不经转换, 即可集合为壳体整体质量、刚度、载荷矩阵。从而按方程 (7.72) 进行固有振动分析; 按方程 (7.71a) 进行强迫振动分析。

## 三、半解析元法

在 § 7.12 中介绍的半解析元法思想也可适用于壳体分析, 即为有限壳条法。其方法原理与有限板条法类似, 只是单元划分及运算矩阵不同。用于壳体振动分析的半解析元法包括有四种: 平壳条、环壳条、锥壳条、柱壳条。下面主要介绍平壳条, 其它三种壳条只指出其主要特点及不同之处。

### (一) 平壳条 (图 14.3a)

适用于柱壳结构。可用一系列母线分割壳体, 每一壳条几何上用相应平板来代替, 作为一个单元, 则整体变为一折板系。和平壳元一样, 单元内同时含有弯曲分量与薄膜分量两部分。

条内沿自身坐标系  $0 - xyz$  的三个方向的位移函数仍有式 (7.75a) 类似形式

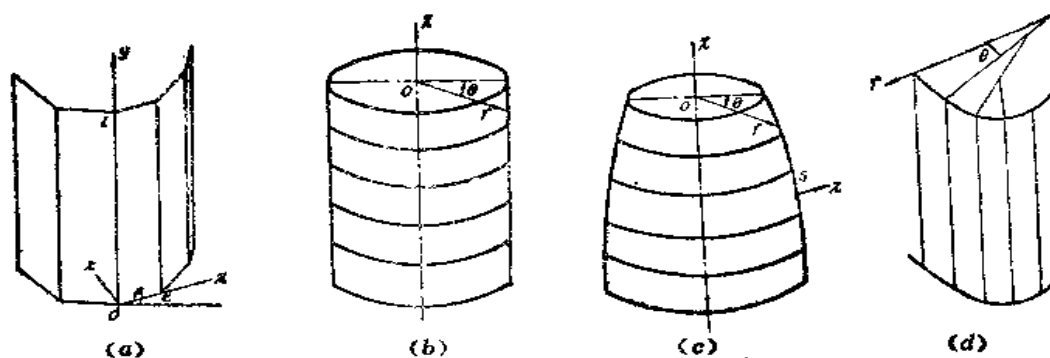


图 14.3

$$u = \sum_{m=1}^r Y_m(y) [N_0]_1 \{\delta_1\}_m \quad (14.46 a)$$

$$v = \sum_{m=1}^r Y_m(y) [N_0]_2 \{\delta_2\}_m \quad (14.46 b)$$

$$w = \sum_{m=1}^r Y_m(y) [N_0]_3 \{\delta_3\}_m \quad (14.46 c)$$

式中,  $Y_m(y)$  为与壳条两端边界条件相应之梁函数 (附录 I);  $[N_0]_i$ ,  $\{\delta_i\}_m$  ( $i=1, 2, 3$ ) 对不同类型单元取法见 § 7.12, 例如可以取

$$[N_0]_1 = \left[ 1 - \frac{x}{e}, \frac{x}{e} \right], \quad \{\delta_1\}_m = [u_{1m} \ u_{2m}]^T \quad (14.47 a)$$

$$[N_0]_2 = \left[ 1 - \frac{x}{e}, \frac{x}{e} \right], \quad \{\delta_2\}_m = [v_{1m} \ v_{2m}]^T \quad (14.47 b)$$

$$[N_0]_3 = \left[ 1 - 3\left(\frac{x}{e}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{e}\right)^3 \quad x - 2\frac{x^2}{e} + \frac{x^3}{e^2} \right. \\ \left. 3\left(\frac{x}{e}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{e}\right)^3 - \frac{x^2}{e} + \frac{x^3}{e^2} \right], \\ \{\delta_3\}_m = [w_{1m} \theta_{1m} \ w_{2m} \ \theta_{2m}]^T \quad (14.47 c)$$

式 (14.46) 可以统一写为矩阵形式

$$\{f\} = \sum_{m=1}^r [N]_m \{\delta\}_m = [N] \{\delta\} \quad (14.48 a)$$

式中

$$\{f\} = [u \ v \ w]^T \quad (14.48 b)$$

$$[N]_m = [[N_1]_m \ [N_2]_m \ [N_3]_m]^T \quad (14.48 c)$$

若取式 (14.47) 有

$$\{\delta\}_m = [u_{1m} \ v_{1m} \ w_{1m} \ \theta_{1m} \ u_{2m} \ v_{2m} \ w_{2m} \ \theta_{2m}]^T \quad (14.48 d)$$

因此具有与有限板条相同的位移函数的矩阵形式。

进一步和式 (7.78 a) 类似, 有壳条应变列阵

$$\{e\} = \sum_{m=1}^r [B]_m \{\delta\}_m = [B] \{\delta\} \quad (14.49 a)$$

式中

$$\{\varepsilon\} = [\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_{xy} x_x x_y x_{xy}]^T \quad (14.49 b)$$

而矩阵

$$[B]_m = \left[ -\frac{\partial}{\partial x} [N_1]_m - \frac{\partial}{\partial y} [N_2]_m - \frac{\partial}{\partial x} [N_3]_m + \frac{\partial}{\partial y} [N_4]_m \right. \\ \left. - \frac{\partial^2}{\partial x^2} [N_5]_m - \frac{\partial^2}{\partial y^2} [N_6]_m - 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [N_7]_m \right]^T \quad (14.49 c)$$

和式 (7.79 a) 类似, 有壳条内力列阵

$$\{\sigma\} = [D][\varepsilon] \quad (14.50 a)$$

式中

$$\{\sigma\} = [N_x N_y N_{xy} M_x M_y M_{xy}]^T \quad (14.50 b)$$

而矩阵

$$[D] = \begin{pmatrix} [D_1] & [0] \\ [0] & [D_2] \end{pmatrix} \quad (14.50 c)$$

$$[D_1] = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix},$$

$$[D_2] = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \quad (14.50 d)$$

和式 (7.81), (7.82), (7.83) 类似有下列局部坐标系的单元运算矩阵:

单元质量矩阵

$$[M^*] = \iint_V [N]^T \rho h [N] ds \quad (14.51 a)$$

其子矩阵

$$[M^*]_{mn} = \int_0^1 \int_0^1 [N]_m^T \rho h [N]_n dx dy \quad (14.51 b)$$

单元刚度矩阵

$$[K^*] = \iint_V [B]^T [D] [B] ds \quad (14.52 a)$$

其子矩阵

$$[K^*]_{mn} = \int_0^1 \int_0^1 [B]_m^T [D] [B]_n dx dy \quad (14.52 b)$$

转换到公共坐标系  $0' - x' y' z'$  的单元运算矩阵类同式 (14.44), 有

单元质量矩阵

$$[M] = [R][M^*][R]^T \quad (14.53 a)$$

单元刚度矩阵

$$[K] = [R][K^*][R]^T \quad (14.53 b)$$



式中 $[R]$ 为转换矩阵, 对于用式(14.47)表示的二结线八自由度平壳条则有

$$[R] = \begin{bmatrix} [R_0] & [0] \\ [0] & [R_0] \end{bmatrix} \quad (14.53 c)$$

而

$$[R_0] = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14.53 d)$$

而沿公共坐标系的单元载荷矩阵类同式(7.83), 有

$$\{F\} = \iint [N]^T \{q\} ds \quad (14.53 e)$$

其子列阵

$$\{F\}_m = \int_0^l \int_0^r [N]_m^T \{q\} ds \quad (14.53 f)$$

其中

$$\{q\} = [q_r, q_\theta, q_z]^T \quad (14.53 g)$$

为外载沿公共坐标系分量列阵。

按式(14.53)计算所得单元运算矩阵即可进行集合, 给出整体质量、刚度、载荷矩阵, 即可建立有限壳条的算式

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = \{F\} \quad (14.53 h)$$

## (二) 环壳条 (图14.3 b)

适用于圆柱壳结构。可用一系列垂直轴线的平面分割壳体, 每一封闭圆柱壳条作为一个单元。采用柱坐标系 $0-x\theta r$ 。沿坐标轴三个方向位移函数取为

$$u = \sum_{m=0}^r \cos m\theta [N_0]_1 \{\delta_1\}_m \quad (14.54 a)$$

$$v = \sum_{m=0}^r \overline{\sin m\theta} [N_0]_2 \{\delta_2\}_m \quad (14.54 b)$$

$$w = \sum_{m=0}^r \cos m\theta [N_0]_3 \{\delta_3\}_m \quad (14.54 c)$$

其中

$$\overline{\sin m\theta} = \begin{cases} 1, & m=0 \\ \sin m\theta, & m \neq 0 \end{cases} \quad (14.54 d)$$

式中 $[N_0]_i, \{\delta_i\}_m$  ( $i=1,2,3$ ) 见§7.12, 例如可以取为式(14.47)。同样可写成式(14.48)的矩阵形式。进一步按圆柱壳理论的公式 (§10.1), 可建立环壳条的应变列阵、内力列阵。类似式(14.51), (14.52), (14.53)可建立单元质量、刚度、载荷矩阵。由于两个相邻的单元的未知广义位移在结线处是一致的, 因此不需要进行坐标转换。

## (三) 锥壳条 (图14.3 c)

适用于旋转壳（包括圆柱壳）结构。用一系列垂直轴线的平面分割壳体，每一曲壳条用相应圆锥壳条来代替，作为一个单元，则整体变为一折锥壳系。每个锥壳条母线与轴线夹角 $\varphi_i$ 是不同的，但我们对位移仍采用沿公共柱坐标系 $0-x\theta r$ 的。沿此坐标轴的三个方向位移函数取为式（14.54）。按圆锥壳理论（§11.3），可建立锥壳条沿局部坐标系应变分量（图11.2）和沿公共坐标轴方向位移间关系式：

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_{x\theta} \\ \kappa_x \\ \kappa_\theta \\ \kappa_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \cos^2 \varphi_i - \frac{\partial w}{\partial x} \sin \varphi_i \cos \varphi_i \\ \frac{\partial v}{R \partial \theta} + \frac{w}{R} \\ \frac{\partial u}{R \partial \theta} \cos \varphi_i + \frac{\partial v}{\partial x} \cos \varphi_i - \frac{v}{R} \sin \varphi_i - \frac{\partial w}{R \partial \theta} \sin \varphi_i \\ - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sin \varphi_i \cos^2 \varphi_i - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cos^3 \varphi_i \\ - \frac{\partial^2 u}{R^2 \partial \theta^2} \sin \varphi_i - \frac{\partial u}{R \partial x} \sin^2 \varphi_i \cos \varphi_i + \frac{\partial v}{R^2 \partial \theta} \cos \varphi_i \\ - \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \theta^2} \cos \varphi_i - \frac{\partial w}{R \partial x} \sin \varphi_i \cos^2 \varphi_i \\ - \frac{\partial^2 u}{R \partial x \partial \theta} \sin 2 \varphi_i + 2 \frac{\partial u}{R^2 \partial \theta} \sin^2 \varphi_i + 2 \frac{\partial v}{R \partial x} \cos^2 \varphi_i \\ - \frac{v}{R^2} \sin 2 \varphi_i - \frac{2 \partial^2 w}{R \partial x \partial \theta} \cos^2 \varphi_i + \frac{\partial w}{R^2 \partial \theta} \sin 2 \varphi_i \end{Bmatrix}$$

$$= \sum_{m=1}^r [B]_m \{\delta\}_m = [B] \{\delta\} \quad (14.55)$$

而内力列阵类同式（14.50）。类似式（14.51），（14.52），（14.53）可建立单元质量、刚度、载荷矩阵。同样，由于单元的未知广义位移均沿公共坐标轴方向，因此不需要进行坐标转换。

#### （四）柱壳条（图14.3d）

适用于任意截面的柱壳结构。用一系列母线分割壳体，每一壳条用半径为条内曲率半径平均值的圆柱壳条来代替，作为一个单元，并保持各条中曲面在结线处一阶导数连续。每个单元内的坐标系采用本圆柱壳条轴线为轴线的局部柱坐标系。沿此坐标轴三个方向位移函数取为式（14.46）。进一步按圆柱壳理论（§10.1），可建立柱壳条的应变列阵、内力列阵。类似式（14.51），（14.52），（14.53）可建立单元质量、刚度、载荷矩阵。由于两个相邻单元的未知广义位移在结线处是一致的，因此不需要进行坐标转换。但应指出一点，应用柱壳条进行两端支承的封闭柱壳及直线边不支承的开口柱壳分析，还需在位移中加上刚性截面位移项<sup>[33]</sup>，才能有比较高精度。

【例】底端固定、顶端自由的圆柱壳体。 $L=1500\text{cm}$ ， $R=120\text{cm}$ ， $h=35.82\text{cm}$ ， $E=2.06 \times 10^7 \text{N/cm}^2$ ， $\nu=0.3$ ， $\rho=7.8 \times 10^{-3} \text{kg/cm}^3$ 。在顶端幅值为 $10^4 \text{N}$ ，频率为 $1 \text{Hz}$ 的简谐力作用下，顶端挠度稳态解幅值用上述环壳条计算结果随不同单元数变化以及和解析解（§10.5）比较列于表14.2。说明半解析元法的收敛性是比较好的，所给出的挠度值偏小，单元与计算工作量比一般有限元法减少。

圆柱壳在顶端简谐力作用下挠度稳态解幅值

表14.2

单元数	4	8	15	20	25	30
半解析元解( $10^{-2}\text{cm}$ )	0.2260	0.3948	0.4417	0.4496	0.4532	0.4551
解析解( $10^{-2}\text{cm}$ )	0.4596					

## § 14.4 加肋壳的振动

加肋壳指壳体外侧或内侧用梁、拱、环加强的壳体<sup>[31][117][121]</sup>。加肋壳的分析方法可包括三种：对于加强肋较密的壳体可以作为各向异性等效匀质壳处理，详见§ 14.6；对于加强肋较疏的壳体，可以用瑞雷-里兹法分析，而计入肋的变形能和动能，其位移函数可近似取无肋壳的解析解，具体参见§ 14.1及§ 7.2；也可以精确计入壳体与肋的变形协调，耦合解析求解。本节则介绍后一种较严格的解析方法，具体推导针对环向加强的开口圆柱壳。

四边简支开口圆柱壳（图10.4）在 $x = x_1$ 处有一环向加强肋。现将壳体和环肋分开，而具有一定相互作用力，力的大小由变形协调确定。对于固有振动，由§ 10.6知，壳体的固有频率为 $\omega_{ms}$ ，相应振型

$$W_{ms}(x, \theta) = \sin \frac{m\pi}{L} x \sin \frac{n\pi}{\theta_0} \theta \quad (14.56 a)$$

由一般结构动力学理论（如[249]）知，两端简支环肋的固有频率为 $\omega_{nr}$ ，相应振型

$$W_{nr}(\theta) = \sin \frac{n\pi}{\theta_0} \theta \quad (14.56 b)$$

则可设壳肋连结处相互作用力振型为

$$P(\theta) = P \sin \frac{n\pi}{\theta_0} \theta \quad (14.56 c)$$

其中 $P$ 是未知的。这里凡带下标 $s$ 均为壳体值，带下标 $r$ 均为环肋值。

壳体在 $x = x_1$ 处作用有幅值为 $P(\theta)$ ，频率为系统固有频率 $\omega$ 的横向简谐力，则其动力响应幅值按§ 14.2有

$$w_s(x, \theta) = \frac{2P}{\rho_s h_s L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x_1}{L} \sin \frac{m\pi}{L} x \sin \frac{n\pi}{\theta_0} \theta}{\omega_{ms}^2 - \omega^2} \quad (14.57 a)$$

在壳肋连结处为

$$w_s(x_1, \theta) = \frac{2P}{\rho_s h_s L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{m\pi}{L} x_1 \sin \frac{n\pi}{\theta_0} \theta}{\omega_{ms}^2 - \omega^2} \quad (14.57 b)$$

环肋在幅值为 $P(\theta)$ ，频率为系统固有频率 $\omega$ 的横向简谐力作用下的动力响应幅值有

$$w_r(\theta) = \frac{-P \sin \frac{n\pi}{\theta_0} \theta}{\rho_r F_r (\omega_{nr}^2 - \omega^2)} \quad (14.57 c)$$

壳与肋的协调条件为

$$w_s(x_1, \theta) = w_r(\theta) \quad (14.58 a)$$

代入式(14.57)，考虑到 $P \neq 0$ ，则有

$$\frac{1}{\rho_r F_r (\omega_{nr}^2 - \omega^2)} + \frac{2}{\rho_r h_r L} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{m\pi}{L} x_1}{\omega_{nmr}^2 - \omega^2} = 0 \quad (14.58b)$$

( $n=1, 2, 3, \dots$ )

式中 $\omega_{nmr}$ 及 $\omega_{nr}$ 等均为已知, 因此这是关于系统(加肋壳)频率 $\omega$ 的频率方程。对应每个 $n$ 可求得一系列固有频率 $\omega_{nm}$ , 代回式(14.57), 即可求取相应振型。对于多肋壳也类似可求〔277〕。

频率方程(14.58b)计算表明, 如果 $\omega_{nmr} < \omega_{nr}$ , 加肋壳的固有频率 $\omega_{nm}$ 将高于原壳体频率; 如果 $\omega_{nmr} > \omega_{nr}$ , 加肋壳的固有频率 $\omega_{nm}$ 将低于原壳体频率。因此一般有, 加肋后壳体的低频段固有频率提高, 高频段固有频率降低现象。这一点可以从频率方程(14.58b)的进一步简化算式

$$\frac{1}{\rho_r F_r (\omega_{nr}^2 - \omega^2)} + \frac{2}{\rho_r h_r L} \frac{\sin^2 \frac{m\pi}{L} x_1}{(\omega_{nmr}^2 - \omega^2)} = 0 \quad (14.58c)$$

看出。将上式除壳体周向弧长 $s_0$ , 乘 $\omega_{nmr}^2$ 得

$$\frac{1}{\bar{\omega}^2 - \frac{\omega^2}{\omega_{nmr}^2}} + 2\bar{M} \frac{\sin^2 \frac{m\pi}{L} x_1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_{nmr}^2}} = 0 \quad (a)$$

其中, 相对质量

$$\bar{M} = \frac{\rho_r F_r s_0}{\rho_r h_r L s_0} \quad (14.58d)$$

相对频率

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_{nr}}{\omega_{nmr}} \quad (14.58e)$$

再进一步得

$$1 - \frac{\omega^2}{\omega_{nmr}^2} + 2\bar{M} \left( \bar{\omega}^2 - \frac{\omega^2}{\omega_{nmr}^2} \right) \sin^2 \frac{m\pi}{L} x_1 = 0 \quad (b)$$

$$1 + 2\bar{M} \bar{\omega}^2 \sin^2 \frac{m\pi}{L} x_1 = \frac{\omega^2}{\omega_{nmr}^2} \left( 1 + 2\bar{M} \sin^2 \frac{m\pi}{L} x_1 \right) \quad (c)$$

所以有

$$\omega^2 = \omega_{nmr}^2 \left\{ \frac{1 + \bar{\omega}^2 (2\bar{M} \sin^2 \frac{m\pi}{L} x_1)}{1 + (2\bar{M} \sin^2 \frac{m\pi}{L} x_1)} \right\} \quad (14.58f)$$

很明显, 若 $\bar{\omega} < 1$ , 则 $\omega < \omega_{nmr}$ ;  $\bar{\omega} > 1$ , 则 $\omega > \omega_{nmr}$ 。实际上, 这一结论也适用于其它加肋壳, 因为由两个结构组成的系统频率是介于两个结构单独存在时的频率之间。式(14.58f)也是该种加肋壳频率的简化算式。

## § 14.5 变厚度壳的振动

上面所有壳体振动分析中都认为厚度沿中曲面不变, 是一常量, 即 $h(\alpha, \beta) = h$ 。当厚度为中曲面坐标函数时, 则称为变厚度壳。实际变厚度壳可分为两大类。一类厚度是不连续变

化的。例如圆柱壳沿轴向分成  $n$  段, 每段中厚度是不变的, 则仍可应用上述等厚度壳方程及其一般解。各段解中待定系数由端部边界条件及段间连续条件确定, 解法类似第八章连续板。另一类厚度是连续变化的, 即有  $h(\alpha, \beta)$ ,  $K(\alpha, \beta)$ ,  $D(\alpha, \beta)$ 。这类壳体的位移-应变、应变-内力关系仍然不变, 但内力表达式 (10.35) 中  $K$ ,  $D$  再不是常量了, 因此代入动力平衡方程中, 建立位移的基本微分方程时,  $K$ ,  $D$  不能简单提到偏导数符号外面, 必须作为变量来处理。只要注意这一差别, 前面各章相应的基本方程就可转化为变厚度壳振动方程。

例如对于常见的沿轴向变厚度的圆柱壳, 有  $h = h(x)$ , 则中面应变表达式 (10.2)、内力表达式 (10.5) 仍不变, 代入到动平衡方程 (10.4), 就有以位移分量表达的基本微分方程组:

$$K \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 u}{R^2 \partial \theta^2} + \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 v}{R \partial x \partial \theta} + \nu \frac{\partial w}{R \partial x} \right] + \frac{\partial K}{\partial x} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{R \partial \theta} + \nu \frac{w}{R} \right] = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - q_x \quad (14.59a)$$

$$K \left[ \frac{(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 u}{R \partial x \partial \theta} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{R^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial w}{R^2 \partial \theta} \right] + \frac{D}{R^2} \left[ \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{R^2 \partial \theta^2} - \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \theta} - \frac{\partial^3 w}{R^2 \partial \theta^3} \right] + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial K}{\partial x} \left[ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{R \partial \theta} \right] = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - q_\theta \quad (14.59b)$$

$$K \left[ \nu \frac{\partial u}{R \partial x} + \frac{\partial v}{R^2 \partial \theta} + \frac{w}{R^2} \right] - \frac{D}{R^2} \left[ \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{\partial^3 v}{R^2 \partial \theta^3} \right] + D \nabla^2 \nabla^2 w + \frac{\partial D}{\partial x} \left[ (1+\nu) \frac{\partial^2 v}{R^2 \partial x \partial \theta} - 2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - 2 \frac{\partial^3 w}{R^2 \partial x \partial \theta^2} \right] + \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \left[ \nu \frac{\partial v}{R^2 \partial \theta} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \theta^2} \right] = q_z - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (14.59c)$$

与等厚度圆柱壳方程 (10.5) 相比, 含  $\frac{\partial K}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial D}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}$  项即为新增加项。当  $K$ ,  $D$  为常值时, 显然方程 (14.59) 即变为原方程 (10.5)。

由于变厚度壳的  $K$ ,  $D$  为中曲面坐标的函数, 因而其基本方程为变系数的。一般来说, 变厚度壳的基本方程是八阶变系数联立偏微分方程组, 精确求解十分困难, 一般均采用上述变分解法或数值解法。在变分解法中, 变刚度  $K(\alpha, \beta)$ ,  $D(\alpha, \beta)$  只体现在变形能、动能表达式的泛函中的被积函数在形式上稍复杂一些, 例如式 (10.48), (10.50) 中  $h = h(\alpha, \beta)$ , 这不会给运算带来很大困难; 在数值解法中, 变刚度  $K(\alpha, \beta)$ ,  $D(\alpha, \beta)$  只体现在质量、刚度矩阵元素的被积函数在形式上稍复杂一些, 例如式 (14.42), (14.41d) 中  $h = h(\alpha, \beta)$  这也不会给运算带来很大困难, 只有对于某些特殊情况的变厚度壳, 例如上述沿轴向变厚度的圆柱壳, 当  $h(x) = h_0 x^n$  时, 对于某些  $n$  值, 方程 (14.59) 可用贝塞尔函数求得轴对称振动的精确解析解<sup>[88]</sup>。

## § 14.6 各向异性壳的振动

本节将讨论各向异性匀质壳。实际工程上属于各向异性壳体的, 如加肋壳、网格壳、波纹壳、层叠壳等均有一定具体的复杂构造, 严格来说是非匀质的。但这里就不讨论各种具体

壳体非匀质效应，而等效为匀质各向异性壳体，来研究各向异性性质对壳体振动分析影响(111)。

关于材料的各向异性性质在 § 8.2 中已经详细讨论过了。材料的各向异性性质只是反映在物理方程，即应力-应变关系中，沿各方向有不同弹性性质。最一般情况下，材料应力-应变关系间有 21 个弹性常数；具有弹性对称面情况，有 13 个弹性常数；正交各向异性情况下，有 9 个弹性常数；横观各向同性情况下，有 5 个弹性常数；各向同性则是最简单的特殊情况，只剩下二个弹性常数。下面将结合材料具有一般各向异性情况及具有正交各向异性情况建立各向异性薄壳振动的一般性方程。

### 一、具有一般性各向异性的薄壳振动的基本方程

对于各向异性薄壳，第九章所列全部方程及关系式中只有物理方程 (9.30) 发生变化，而其它均仍适用。由 § 8.2 知，在一般性各向异性情况下，材料的物理方程应为

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_a \\ \varepsilon_\beta \\ \varepsilon_r \\ \varepsilon_{\beta r} \\ \varepsilon_{ra} \\ \varepsilon_{a\beta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_a \\ \sigma_\beta \\ \sigma_r \\ \tau_{\beta r} \\ \tau_{ra} \\ \tau_{a\beta} \end{Bmatrix} \quad (14.60 a)$$

考虑到薄壳理论基本假定 (a)，(b)，一般性各向异性薄壳的物理方程应为

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_a \\ \varepsilon_\beta \\ \varepsilon_{a\beta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{26} \\ a_{61} & a_{62} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_a \\ \sigma_\beta \\ \tau_{a\beta} \end{Bmatrix} = [a]\{\sigma\} \quad (14.60 b)$$

其中有六个独立弹性常数。反之，有

$$\{\sigma\} = [e]\{\varepsilon\} \quad (14.60 c)$$

而

$$[e] = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{16} \\ e_{21} & e_{22} & e_{26} \\ e_{61} & e_{62} & e_{66} \end{bmatrix} = [a]^{-1} \quad (14.60 d)$$

将应变表达式 (9.26) 代入上式，即得应力与中面应变关系式

$$\{\sigma\} = [e]\{\varepsilon^0\} + \gamma[e]\{x\} \quad (14.61 a)$$

式中

$$\{\varepsilon^0\} = [\varepsilon_a^0 \varepsilon_\beta^0 \varepsilon_{a\beta}^0]^T \quad (14.61 b)$$

$$\{x\} = [x_a x_\beta x_{a\beta}]^T \quad (14.61 c)$$

将式 (14.61 a) 沿厚度积分，得薄膜内力

$$\{N\} = [N_a N_\beta N_{a\beta}]^T = h[e]\{\varepsilon^0\} \quad (14.62 a)$$

将式 (14.61 a) 乘  $\gamma$  沿厚度积分，得弯曲内力

$$\{M\} = [M_a M_\beta M_{a\beta}]^T = \frac{h^3}{12}[e]\{x\} \quad (14.62 b)$$

将内力表达式 (14.62) 代入动平衡方程 (9.40), 并通过式 (9.27), (9.28) 将  $\{\varepsilon^0\}$ ,  $\{x\}$  表示为位移分量, 则即给出一般性各向异性薄壳振动的基本方程。边界条件形式上仍同式 (9.41)–(9.45), 只要注意到内力表达式 (14.62) 即可。

例如, 基于简化理论的一般性各向异性匀质圆柱壳<sup>[62]</sup>基本方程为

$$\begin{aligned} & \frac{e_{11}}{e_{22}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{e_{16}}{e_{22}} \frac{\partial^2 u}{R \partial x \partial \theta} + \frac{e_{66}}{e_{22}} \frac{\partial^2 u}{R^2 \partial \theta^2} + \frac{e_{16}}{e_{22}} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ & + \left( \frac{e_{12} + e_{66}}{e_{22}} \right) \frac{\partial^2 v}{R \partial x \partial \theta} + \frac{e_{26}}{e_{22}} \frac{\partial^2 v}{R^2 \partial \theta^2} + \frac{e_{12}}{e_{22}} \frac{\partial w}{R^2 \partial x} \\ & + \frac{e_{26}}{e_{22}} \frac{\partial w}{R^2 \partial \theta} = -\frac{1}{e_{22} h} \left( \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - q_x \right) \end{aligned} \quad (14.63 a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{e_{16}}{e_{22}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left( \frac{e_{12} + e_{66}}{e_{22}} \right) \frac{\partial^2 u}{R \partial x \partial \theta} + \frac{e_{26}}{e_{22}} \frac{\partial^2 u}{R^2 \partial \theta^2} + \frac{e_{66}}{e_{22}} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ & + 2 \frac{e_{26}}{e_{22}} \frac{\partial^2 v}{R \partial x \partial \theta} + \frac{e_{22}}{e_{22}} \frac{\partial^2 v}{R^2 \partial \theta^2} + \frac{e_{26}}{e_{22}} \frac{\partial w}{R \partial x} + \frac{\partial w}{R^2 \partial \theta} \\ & = \frac{1}{e_{22} h} \left( \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - q_\theta \right) \end{aligned} \quad (14.63 b)$$

$$\begin{aligned} & \frac{12}{h^3} \left( \frac{e_{12}}{e_{22}} \frac{\partial u}{R \partial x} + \frac{e_{26}}{e_{22}} \frac{\partial u}{R^2 \partial \theta} + \frac{e_{26}}{e_{22}} \frac{\partial v}{R \partial x} + \frac{\partial v}{R^2 \partial \theta} + \frac{w}{R^2} \right) \\ & + \left[ \frac{e_{11}}{e_{22}} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \left( \frac{e_{12} + 2e_{66}}{e_{22}} \right) \frac{\partial^4 w}{R^2 \partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^4 w}{R^4 \partial \theta^4} \right] \\ & = \left[ -\frac{12}{e_{22} h^3} \left( q_x - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (14.63 c)$$

对于非匀质壳, 则在上式方括号中取  $e_{ij} = \frac{12 D_{ij}}{h^3}$ , 其余各处取  $e_{ij} = \frac{K_{ij}}{h}$  ( $i, j=1, 2, 6$ ) 即可。其中  $D_{ij}$  为各向异性壳弯曲刚度;  $K_{ij}$  为各向异性壳薄膜刚度, 又总称为组合弹性常数。

## 二、正交各向异性薄壳振动的基本方程

由 § 8.2 知, 在正交各向异性情况下, 若材料主轴和壳体中曲面主方向相一致, 则材料的物理方程应为

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\sigma_\alpha}{E_\alpha} - \frac{\nu_{\beta\alpha}}{E_\beta} \sigma_\beta - \frac{\nu_{\gamma\alpha}}{E_\gamma} \sigma_\gamma \quad (14.64 a)$$

$$\varepsilon_\beta = -\frac{\nu_{\alpha\beta}}{E_\alpha} \sigma_\alpha + \frac{\sigma_\beta}{E_\beta} - \frac{\nu_{\gamma\beta}}{E_\gamma} \sigma_\gamma \quad (14.64 b)$$

$$\varepsilon_\gamma = -\frac{\nu_{\alpha\gamma}}{E_\alpha} \sigma_\alpha - \frac{\nu_{\beta\gamma}}{E_\beta} \sigma_\beta + \frac{\sigma_\gamma}{E_\gamma} \quad (14.64 c)$$

$$\varepsilon_{\beta\gamma} = \frac{\tau_{\beta\gamma}}{G_{\beta\gamma}}, \quad \varepsilon_{\gamma\alpha} = \frac{\tau_{\gamma\alpha}}{G_{\gamma\alpha}}, \quad \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{\tau_{\alpha\beta}}{G_{\alpha\beta}} \quad (14.64 d)$$

考虑到薄壳理论的基本假定, 正交各向异性薄壳振动的物理方程为

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\sigma_\alpha}{E_\alpha} - \frac{\nu_{\beta\alpha}}{E_\beta} \sigma_\beta \quad (14.65 a)$$

$$\varepsilon_\beta = \frac{\sigma_\beta}{E_\beta} - \frac{\nu_{\alpha\beta}}{E_\alpha} \sigma_\alpha \quad (14.65 b)$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{\tau_{\alpha\beta}}{G_{\alpha\beta}} \quad (14.65c)$$

其中五个弹性常数  $E$ 、 $E_\beta$ 、 $\nu_{\beta\alpha}$ 、 $\nu_{\alpha\beta}$ 、 $G_{\alpha\beta}$  间有一个关系式

$$E_\alpha \nu_{\beta\alpha} = E_\beta \nu_{\alpha\beta} \quad (14.65d)$$

因此只有四个是独立的。由式 (14.65) 反求应力分量, 有

$$\sigma_\alpha = \frac{1}{1 - \nu_{\alpha\beta}\nu_{\beta\alpha}} (E_\alpha \varepsilon_\alpha + \nu_{\alpha\beta} E_\beta \varepsilon_\beta) \quad (14.66a)$$

$$\sigma_\beta = \frac{1}{1 - \nu_{\alpha\beta}\nu_{\beta\alpha}} (E_\beta \varepsilon_\beta + \nu_{\beta\alpha} E_\alpha \varepsilon_\alpha) \quad (14.66b)$$

$$\tau_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} \quad (14.66c)$$

将应变表达式 (9.26) 代入上式, 即得应力与中面应变的关系式

$$\sigma_\alpha = \frac{1}{1 - \nu_{\alpha\beta}\nu_{\beta\alpha}} [(E_\alpha \varepsilon_\alpha^0 + \nu_{\alpha\beta} E_\beta \varepsilon_\beta^0) + \nu (E_\alpha \chi_\alpha + \nu_{\alpha\beta} E_\beta \chi_\beta)] \quad (14.67a)$$

$$\sigma_\beta = \frac{1}{1 - \nu_{\alpha\beta}\nu_{\beta\alpha}} [(E_\beta \varepsilon_\beta^0 + \nu_{\beta\alpha} E_\alpha \varepsilon_\alpha^0) + \nu (E_\beta \chi_\beta + \nu_{\beta\alpha} E_\alpha \chi_\alpha)] \quad (14.67b)$$

$$\tau_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta} [\varepsilon_{\alpha\beta}^0 + \nu \chi_{\alpha\beta}] \quad (14.67c)$$

将式 (14.67) 沿厚度积分及乘  $\nu$  沿厚度积分, 可得内力表达式

$$N_\alpha = K_{\alpha\alpha} \varepsilon_\alpha^0 + K_{\alpha\beta} \varepsilon_\beta^0 \quad (14.68a)$$

$$N_\beta = K_{\beta\alpha} \varepsilon_\alpha^0 + K_{\beta\beta} \varepsilon_\beta^0 \quad (14.68b)$$

$$N_{\alpha\beta} = K_G \varepsilon_{\alpha\beta}^0 \quad (14.68c)$$

$$M_\alpha = D_{\alpha\alpha} \chi_\alpha + D_{\alpha\beta} \chi_\beta \quad (14.68d)$$

$$M_\beta = D_{\beta\alpha} \chi_\alpha + D_{\beta\beta} \chi_\beta \quad (14.68e)$$

$$M_{\alpha\beta} = D_G \chi_{\alpha\beta} \quad (14.68f)$$

式中

$$K_{\alpha\alpha} = \frac{E_\alpha h}{1 - \nu_{\alpha\beta}\nu_{\beta\alpha}}, \quad K_{\beta\beta} = \frac{E_\beta h}{1 - \nu_{\alpha\beta}\nu_{\beta\alpha}} \quad (14.69a)$$

$$K_{\alpha\beta} = \frac{\nu_{\alpha\beta} E_\beta h}{1 - \nu_{\alpha\beta}\nu_{\beta\alpha}} = K_{\beta\alpha} = \frac{\nu_{\beta\alpha} E_\alpha h}{1 - \nu_{\alpha\beta}\nu_{\beta\alpha}} \quad (14.69b)$$

$$K_G = G_{\alpha\beta} h \quad (14.69c)$$

$$D_{\alpha\alpha} = \frac{E_\alpha h^3}{12(1 - \nu_{\alpha\beta}\nu_{\beta\alpha})}, \quad D_{\beta\beta} = \frac{E_\beta h^3}{12(1 - \nu_{\alpha\beta}\nu_{\beta\alpha})} \quad (14.69d)$$

$$D_{\alpha\beta} = \frac{\nu_{\alpha\beta} E_\beta h^3}{12(1 - \nu_{\alpha\beta}\nu_{\beta\alpha})} = D_{\beta\alpha} = \frac{\nu_{\beta\alpha} E_\alpha h^3}{12(1 - \nu_{\alpha\beta}\nu_{\beta\alpha})} \quad (14.69e)$$

$$D_G = G_{\alpha\beta} \frac{h^3}{12} \quad (14.69f)$$

将内力表达式 (14.68) 代入动平衡方程 (9.40), 并通过式 (9.27), (9.28) 将应变分量表示为位移分量, 则即给出正交各向异性薄壳振动的基本方程。边界条件仍同式 (9.41) — (9.45), 只要注意到内力表达式 (14.68) 即可。

显然, 当  $E_\alpha = E_\beta = E$ ,  $\nu_{\alpha\beta} = \nu_{\beta\alpha} = \nu$ ,  $G_{\alpha\beta} = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  时, 上述各式即给出各向同性薄壳的结果, 式 (9.35), (9.36)。

作为一个例子, 下面列出基于简化理论的正交各向异性圆柱壳的基本方程, 为



$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{G_{x\theta}(1-\nu_{x\theta}\nu_{\theta x})}{E_x} \frac{\partial^2 u}{R^2 \partial \theta^2} + \frac{\nu_{x\theta}E_\theta + G_{x\theta}(1-\nu_{x\theta}\nu_{\theta x})}{E_x} \frac{\partial^2 v}{R \partial x \partial \theta} + \frac{\nu_{x\theta}E_\theta}{E_x} \frac{\partial w}{R \partial x} = \frac{1-\nu_{x\theta}\nu_{\theta x}}{E_x h} \left( \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - q_x \right) \quad (14.70a)$$

$$\frac{\nu_{x\theta}E_\theta + G_{x\theta}(1-\nu_{x\theta}\nu_{\theta x})}{E_x} \frac{\partial^2 u}{R \partial x \partial \theta} + \frac{G_{x\theta}(1-\nu_{x\theta}\nu_{\theta x})}{E_x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{E_\theta}{E_x} \frac{\partial^2 v}{R^2 \partial \theta^2} + \frac{E_\theta}{G_x} \frac{\partial w}{R^2 \partial \theta} = \frac{1-\nu_{x\theta}\nu_{\theta x}}{E_x h} \left( \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - q_\theta \right) \quad (14.70b)$$

$$\frac{12}{h^2} \left[ \frac{\nu_{x\theta}E_\theta}{E_x} \frac{\partial u}{R \partial x} + \frac{E_\theta}{E_x} \frac{\partial v}{R^2 \partial \theta} + \frac{E_\theta}{E_x} \frac{w}{R^2} \right] + \nabla^2 \nabla^2 w = \frac{12(1-\nu_{x\theta}\nu_{\theta x})}{E_x h^3} \left( q_x - \rho h \frac{\partial w}{\partial t^2} \right) \quad (14.70c)$$

式中算子

$$\nabla^2 \nabla^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\nu_{x\theta}E_\theta + 2G_{x\theta}(1-\nu_{x\theta}\nu_{\theta x})}{E_x} \frac{\partial^4}{R^2 \partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{E_\theta}{E_x} \frac{\partial^4}{R^4 \partial \theta^4} \quad (14.70d)$$

很容易验证, 在各向同性情况下, 上述方程转化为原第十章各向同性圆柱壳的简化理论方程 (10.66)。

### 三、加肋圆柱壳振动的基本方程

上述两种各向异性壳体振动方程中一系列弹性常数  $e_{ij}$  ( $i, j=1, 2, 6$ ) 或  $E_x, E_\theta, \nu_{x\theta}, \nu_{\theta x}, G_{x\theta}$  等均和实际各向异性壳体的具体构造的材料与几何参数有关, 均可根据定义确定。这里只以常见的轴向加肋圆柱壳<sup>[62]</sup>为例来说明这些弹性常数具有的形式。

这是一种正交各向异性壳, 但正交各向异性壳可以作为一般性各向异性壳的特殊情况, 即取式 (14.63) 中  $e_{16}=e_{28}=e_{61}=e_{62}=0$ , 另外考虑到加肋壳是非均质壳, 因此采用组合弹性常数来表示, 它们与构造参数间关系为:

$$K_{11} = [1 + (1-\nu^2)k_1 k_2] K_{22} \quad (14.71a)$$

$$K_{12} = K_{21} = \nu K_{22} \quad (14.71b)$$

$$K_{22} = K_1 \left( \frac{1+k_1}{1+k_1 k_2} \right) \quad (14.71c)$$

$$K_{\theta\theta} = \frac{1-\nu}{2} K_{22} \quad (14.71d)$$

$$D_{11} = \frac{D_s}{(1+k_1)^2} \{ 1 + 4k_1 k_2^2 (1-\nu^2) + k_1^2 k_2^2 [2(1-\nu^2) + 3] + k_1^2 k_2^2 (1-\nu^2) + 6k_1 k_2 (1-\nu^2 + k_1) + 4k_1^2 + k_1 [3(1-\nu^2) + 2] \} \quad (14.71e)$$

$$D_{12} = D_{21} = \nu D_1 \quad (14.71f)$$

$$D_{22} = \frac{D_s}{1-k_1 \left[ 1 - \frac{1}{(1+k_2)^2} \right]} \quad (14.71g)$$

$$D_{\theta\theta} = \frac{1-\nu}{2} D_1 [1 + 6k_2 k_1^2 \beta] \quad (14.71h)$$

式中

$$k_1 = k_s k_A, \quad k_2 = \frac{1 - k_A}{1 + \frac{1}{k_A}}, \quad k_3 = \frac{b_w}{h_s}, \quad k_4 = \frac{h_w}{b_s}, \quad k_5 = -\frac{b_w}{b_s}, \quad k_6 = -\frac{h_w}{h_s} \quad (14.71 i)$$

而  $E, \nu$  为壳与肋共同的材料常数, 其它带  $s$  的为原壳体各量, 带  $w$  的为加强肋各量,  $b_w$  为肋宽度,  $b_s$  为肋间壳体宽度,  $\beta$  和  $b_w/h_w$  有关, 从 0.141 到  $\frac{1}{3}$  间变化。

#### 四、两端简支正交各向异性圆柱壳的振动

在很多情况下, 各向异性壳体的振动分析与各向同性壳体有十分类似的地方。下面仅就两端简支的正交各向异性闭合圆柱壳振动问题作一具体推导。

两端简支正交各向异性闭合圆柱壳 (图 10.1) 的振型边界条件为

$$V(0, \theta) = W(0, \theta) = 0 \quad (14.72 a)$$

$$N_x^*(0, \theta) = M_x^*(0, \theta) = 0 \quad (14.72 b)$$

$$V(L, \theta) = W(L, \theta) = 0 \quad (14.72 c)$$

$$N_x^*(L, \theta) = M_x^*(L, \theta) = 0 \quad (14.72 d)$$

这与 § 10.3 中两端简支各向同性圆柱壳的振型边界条件 (10.26) 在形式上是一样的, 只不过按式 (14.68), (10.2), 有式 (14.72 b), (14.72 d) 的位移振型表达式:

$$N_x^*(0, \theta) = K_{xx} \left[ -\frac{\partial U}{\partial x}(0, \theta) \right] + K_{xs} \left[ \frac{\partial V}{R \partial \theta}(0, \theta) + \frac{W}{R}(0, \theta) \right] = 0 \quad (14.72 e)$$

$$M_x^*(0, \theta) = D_{xx} \left[ -\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(0, \theta) \right] + D_{xs} \left[ \frac{\partial V}{R^2 \partial \theta}(0, \theta) - \frac{\partial^2 W}{R^2 \partial \theta^2}(0, \theta) \right] = 0 \quad (14.72 f)$$

$$N_x^*(L, \theta) = K_{xx} \left[ \frac{\partial U}{\partial x}(L, \theta) \right] + K_{xs} \left[ \frac{\partial V}{R \partial \theta}(L, \theta) + \frac{W}{R}(L, \theta) \right] = 0 \quad (14.72 g)$$

$$M_x^*(L, \theta) = D_{xx} \left[ -\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(L, \theta) \right] + D_{xs} \left[ \frac{\partial V}{R^2 \partial \theta}(L, \theta) - \frac{\partial^2 W}{R^2 \partial \theta^2}(L, \theta) \right] = 0 \quad (14.72 h)$$

如果我们设其位移振型解和各向同性壳振型 (10.27) 其有同样形式,

$$U(x, \theta) = A \cos \frac{m\pi}{l} x \cos n\theta \quad (14.73 a)$$

$$V(x, \theta) = B \sin \frac{m\pi}{l} x \sin n\theta \quad (14.73 b)$$

$$W(x, \theta) = C \sin \frac{m\pi}{l} x \cos n\theta \quad (14.73 c)$$

则各向异性圆柱壳的边界条件 (14.72 a), (14.72 c), (14.72 e), (14.72 f), (14.72 g), (14.72 h) 可完全得到满足。所以进一步可以和各向同性壳处理过程一样, 将解 (14.73) 代入基本方程组 (14.70) 相应的振型方程, 则可建立关于待定系数  $A, B, C$  的齐次线代方程组, 从而求得频率方程

$$\begin{vmatrix} (\Omega^2 - S_{11}) & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & (\Omega^2 - S_{22}) & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & (\Omega^2 - S_{33}) \end{vmatrix} = 0 \quad (14.74 a)$$

这和各向同性壳的频率方程 (10.30 a) 具有相同形式, 只不过其中元素

$$S_{11} = \left( \frac{m\pi R}{L} \right)^2 + \frac{G_{x\theta}}{E_x} (1 - \nu_{x\theta} \nu_{\theta x}) n^2 \quad (14.74 b)$$

$$S_{22} = \frac{G_{x\theta}}{E_x} (1 - \nu_{x\theta} \nu_{\theta x}) \left( \frac{m\pi R}{L} \right)^2 + \frac{E_\theta}{E_x} n^2 \quad (14.74 c)$$

$$S_{33} = \frac{E_\theta}{E_x} + k \left[ \left( \frac{m\pi R}{L} \right)^2 + 2 \frac{\nu_{x\theta} E_\theta + 2G_{x\theta} (1 - \nu_{x\theta} \nu_{\theta x})}{E_x} \left( \frac{m\pi R}{L} \right)^2 n^2 + \frac{E_\theta}{E_x} n^4 \right] \quad (14.74 d)$$

$$S_{12} = S_{21} = \frac{\nu_{x\theta} E_\theta + G_{x\theta} (1 - \nu_{x\theta} \nu_{\theta x})}{E_x} \left( \frac{m\pi R}{L} \right) n \quad (14.74 e)$$

$$S_{13} = S_{31} = \frac{\nu_{x\theta} E_\theta}{E_x} \left( \frac{m\pi R}{L} \right) \quad (14.74 f)$$

$$S_{23} = S_{32} = -\frac{E_\theta}{E_x} n \quad (14.74 g)$$

而

$$\Omega^2 = \frac{\rho (1 - \nu_{x\theta} \nu_{\theta x})}{E_x} \omega^2 R^2, \quad k = \frac{h^2}{12R^2} \quad (14.74 h)$$

频率方程 (14.74 a) 的解法可参见 § 10.3 各向同性壳作法, 具体算式可见式 (10.30 b), (10.31), (10.32), 各阶固有频率见式 (10.32 c), 各阶固有振型见式 (10.33), (10.34)。无量纲频率系数  $\Omega^2$  将主要取决于材料参数  $\frac{E_\theta}{E_x}$ ,  $\frac{G_{x\theta}}{E_x}$ ,  $\nu_{x\theta}$ , 当然还和其它几何参数及半波数有关。

对于其它边界的正交各向异性圆柱壳, 由于一般性解法相当繁琐, 往往采用 § 10.5 介绍过的梁函数-三角函数组合方法, 其中变形能取 § 9.9 式 (c), 并代入应力表达式 (14.61 a)。

其它形状的各向异性壳振动分析结果可参见文献 [154], [169], [270], [301] 等。

## § 14.7 厚壳的振动

在 § 8.3 中已经详细介绍了, 厚板振动理论与薄板振动理论的差别主要在于考虑了剪变形、挤压变形、转动惯量等因素。同样, 厚壳振动理论也是在上面各章薄壳振动理论基础上进一步计入这些因素影响 [95] [183] [195]。厚壳振动理论主要有两个要点: 引入了中面处转角  $\theta_x, \theta_\theta$  为新独立变量, 从而取消了第九章薄壳基本理论中转角  $\theta_x, \theta_\theta$  与位移间基本关系式 (§ 9.4 的式 (b), (c)), 改变了曲率表达式 (9.28), 在力矩平衡方程 (9.38 d), (9.38 e) 中引入了质量的惯性力矩。面挤压变形作为比较次要因素一般在厚壳振动理论中不再计入。

### 一、厚壳振动的一般性方程

在第九章薄壳振动理论中, 有垂直剪应变公式 (9.24 d), (9.24 e):

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha\gamma} &= A \left( 1 + \frac{\gamma}{R_\alpha} \right) \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[ \frac{u_1}{A \left( 1 + \frac{\gamma}{R_\alpha} \right)} \right] + \frac{1}{A \left( 1 + \frac{\gamma}{R_\alpha} \right)} \frac{\partial w_1}{\partial \alpha} \\ &= \frac{\partial u_1}{\partial \gamma} - \frac{u_1}{\left( 1 + \frac{\gamma}{R_\alpha} \right) R_\alpha} + \frac{1}{A \left( 1 + \frac{\gamma}{R_\alpha} \right)} \frac{\partial w_1}{\partial \alpha} \end{aligned} \quad (14.75 a)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\beta\gamma} &= B \left( 1 + \frac{\gamma}{R_\beta} \right) \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \frac{v_1}{B \left( 1 + \frac{\gamma}{R_\beta} \right)} \right) + \frac{1}{B \left( 1 + \frac{\gamma}{R_\beta} \right)} \frac{\partial w_1}{\partial \beta} \\ &= \frac{\partial v_1}{\partial \gamma} - \frac{v_1}{\left( 1 + \frac{\gamma}{R_\beta} \right) R_\beta} + \frac{1}{B \left( 1 + \frac{\gamma}{R_\beta} \right)} \frac{\partial w_1}{\partial \beta} \end{aligned} \quad (14.75b)$$

在薄壳理论中，就是利用  $\varepsilon_{\alpha\gamma} = \varepsilon_{\beta\gamma} = 0$ ，按上式推导转角  $\theta_\alpha = \left( \frac{\partial u_1}{\partial \gamma} \right)_{\gamma=0}$ ， $\theta_\beta = \left( \frac{\partial v_1}{\partial \gamma} \right)_{\gamma=0}$  与  $u, v, w$  关系式的。现在考虑了剪切变形，则  $\varepsilon_{\alpha\gamma} \neq 0$ ， $\varepsilon_{\beta\gamma} \neq 0$ ，因而  $\theta_\alpha, \theta_\beta$  是独立变量，和  $u, v, w$  无关。另外可以计算中面垂直剪应变，如果在上述两式中取  $\gamma = 0$ ，有

$$\varepsilon_{\alpha\gamma}^0 = \theta_\alpha - \frac{u}{R_\alpha} + \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \quad (14.76a)$$

$$\varepsilon_{\beta\gamma}^0 = \theta_\beta - \frac{v}{R_\beta} + \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \quad (14.76b)$$

根据广义虎克定律(9.29d)，有中面垂直剪应力

$$\tau_{\alpha\gamma}^0 = G \varepsilon_{\alpha\gamma}^0, \quad \tau_{\beta\gamma}^0 = G \varepsilon_{\beta\gamma}^0 \quad (14.76c)$$

根据剪应力沿  $\gamma$  方向不同分布的假定，垂直剪应力的平均值  $\bar{\tau}_{\alpha\gamma}, \bar{\tau}_{\beta\gamma}$  和中面垂直剪应力值  $\tau_{\alpha\gamma}^0, \tau_{\beta\gamma}^0$  间有一定折算系数  $k_r$  (详见 § 8.3)，它们之间有

$$\bar{\tau}_{\alpha\gamma} = \frac{\tau_{\alpha\gamma}^0}{k_r} = \frac{G}{k_r} \varepsilon_{\alpha\gamma}^0 \quad (14.77a)$$

$$\bar{\tau}_{\beta\gamma} = \frac{\tau_{\beta\gamma}^0}{k_r} = \frac{G}{k_r} \varepsilon_{\beta\gamma}^0 \quad (14.77b)$$

从而可以计算出垂直剪力

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{\tau}_{\alpha\gamma} d\gamma = \bar{\tau}_{\alpha\gamma} h = \frac{Gh}{k_r} \varepsilon_{\alpha\gamma}^0 \\ &= \frac{Gh}{k_r} \left( \theta_\alpha - \frac{u}{R_\alpha} + \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) \end{aligned} \quad (14.78a)$$

$$\begin{aligned} Q_\beta &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{\tau}_{\beta\gamma} d\gamma = \bar{\tau}_{\beta\gamma} h = \frac{Gh}{k_r} \varepsilon_{\beta\gamma}^0 \\ &= \frac{Gh}{k_r} \left( \theta_\beta - \frac{v}{R_\beta} + \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) \end{aligned} \quad (14.78b)$$

从这里可以看出，在厚壳理论中新引入了独立变量  $Q_\alpha, Q_\beta$  及  $\theta_\alpha, \theta_\beta$ 。它们中间有两个是独立的，其关系为式 (14.78)，通常是取  $\theta_\alpha, \theta_\beta$  为独立变量。

由于  $\theta_\alpha, \theta_\beta$  与  $u, v, w$  关系式 (§ 9.4 的式 (b), (c)) 不再成立，因此曲率表达式 (9.28) 中方括号各量应该用原  $\theta_\alpha, \theta_\beta$  代回，即有

$$\kappa_\alpha = \frac{1}{A} \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\theta_\beta}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \quad (14.79a)$$

$$\kappa_\beta = \frac{1}{B} \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \beta} + \frac{\theta_\alpha}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \quad (14.79b)$$

$$\kappa_{\alpha\beta} = \frac{A}{B} \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \beta} + \frac{B}{A} \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \alpha} \quad (14.79c)$$

式 (14.78), (14.79) 是由于考虑了厚壳振动理论第一个要点而引入的新表达式。至于中面薄

膜应变表达式仍为式(9.27),

$$\varepsilon_a^0 = \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{v}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{w}{R_a} \quad (14.80a)$$

$$\varepsilon_\beta^0 = \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{u}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{w}{R_\beta} \quad (14.80b)$$

$$\varepsilon_{a\beta}^0 = \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{u}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{v}{B} \right) \quad (14.80c)$$

薄膜内力、弯曲内力表达式仍为式(9.35):

$$N_a = K(\varepsilon_a^0 + \nu \varepsilon_\beta^0), \quad N_\beta = K(\varepsilon_\beta^0 + \nu \varepsilon_a^0), \quad N_{a\beta} = N_{\beta a} = K \frac{1-\nu}{2} \varepsilon_{a\beta}^0 \quad (14.81a)$$

$$M_a = D(x_a + \nu x_\beta), \quad M_\beta = D(x_\beta + \nu x_a), \quad M_{a\beta} = M_{\beta a} = D \frac{1-\nu}{2} x_{a\beta} \quad (14.81b)$$

考虑厚壳振动理论第二个要点, 即计入惯性力矩, 则力矩动平衡方程(9.38d), (9.38e)变为

$$\frac{\partial(BM_a)}{\partial \alpha} + \frac{\partial(AM_{\beta a})}{\partial \beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_\beta + \frac{\partial A}{\partial \beta} M_{a\beta} - AB \left( Q_a + \rho J \frac{\partial^2 \theta_a}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (14.82a)$$

$$\frac{\partial(AM_\beta)}{\partial \beta} + \frac{\partial(BM_{a\beta})}{\partial \alpha} - \frac{\partial A}{\partial \beta} M_a + \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_{\beta a} - AB \left( Q_\beta + \rho J \frac{\partial^2 \theta_\beta}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (14.82b)$$

代入垂直剪力表达式(14.78), 有方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial(BM_a)}{\partial \alpha} + \frac{\partial(AM_{\beta a})}{\partial \beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_\beta + \frac{\partial A}{\partial \beta} M_{a\beta} - AB \left[ \frac{Gh}{k_r} \left( \theta_a - \frac{u}{R_a} + \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) \right. \\ \left. + \rho J \frac{\partial^2 \theta_a}{\partial t^2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (14.83a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(AM_\beta)}{\partial \beta} + \frac{\partial(BM_{a\beta})}{\partial \alpha} - \frac{\partial A}{\partial \beta} M_a + \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_{\beta a} - AB \left[ \frac{Gh}{k_r} \left( \theta_\beta - \frac{v}{R_\beta} + \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) \right. \\ \left. + \rho J \frac{\partial^2 \theta_\beta}{\partial t^2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (14.83b)$$

另三个力动平衡方程(9.38a), (9.38b), (9.38c) 仍保持不变, 不过其中垂直剪力  $Q_a$ ,  $Q_\beta$  用表达式(14.78)代入有方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial(BN_a)}{\partial \alpha} + \frac{\partial(AN_{\beta a})}{\partial \beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} N_\beta + \frac{\partial A}{\partial \beta} N_{a\beta} + \frac{AB}{R_a} \frac{Gh}{k_r} \left( \theta_a - \frac{u}{R_a} + \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) \\ + AB \left( q_a - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (14.83c)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(AN_\beta)}{\partial \beta} + \frac{\partial(BN_{a\beta})}{\partial \alpha} - \frac{\partial A}{\partial \beta} N_a + \frac{\partial B}{\partial \alpha} N_{\beta a} + \frac{AB}{R_\beta} \frac{Gh}{k_r} \left( \theta_\beta - \frac{v}{R_\beta} + \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) \\ + AB \left( q_\beta - \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (14.83d)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \frac{BGh}{k_r} \left( \theta_a - \frac{u}{R_a} + \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \beta} \left[ \frac{AGh}{k_r} \left( \theta_\beta - \frac{v}{R_\beta} + \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) \right]$$

$$-\frac{AB}{R_\alpha} N_\alpha - \frac{AB}{R_\beta} N_\beta + AB \left( q_v - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (14.83e)$$

式中转动惯量

$$\rho J = \frac{\rho h^3}{12} \quad (14.84)$$

综合以上各式可以知道, 厚壳振动理论共有十七个方程或关系式: 五个内力动平衡方程(10.83), 六个内力与中面应变关系式(14.81), 六个中面应变与中面位移关系式(14.79), (14.80); 其中包含十七个未知量: 六个内力分量 ( $N_\alpha, N_\beta, N_{\alpha\beta}, M_\alpha, M_\beta, M_{\alpha\beta}$ ), 六个中面应变分量 ( $\epsilon_\alpha^0, \epsilon_\beta^0, \epsilon_{\alpha\beta}^0, \kappa_\alpha, \kappa_\beta, \kappa_{\alpha\beta}$ ), 五个中面位移分量 ( $u, v, w, \theta_\alpha, \theta_\beta$ ), 因此是可解的。一般方程归纳方法为将式(14.79), (14.80)代入式(14.81), 再代入式(14.83), 从而建立关于中面位移分量  $u, v, w, \theta_\alpha, \theta_\beta$  的五个微分方程——一般性厚壳振动的基本微分方程组。这是一个五元十阶联立偏微分方程组, 它的求解需每边满足五个边界条件:

$$N_\alpha = \bar{N}_\alpha \text{ 或 } u_\alpha = \bar{u}_\alpha \quad (14.85a)$$

$$N_{\alpha\beta} = \bar{N}_{\alpha\beta} \text{ 或 } u_\beta = \bar{u}_\beta \quad (14.85b)$$

$$M_\alpha = \bar{M}_\alpha \text{ 或 } \theta_\alpha = \bar{\theta}_\alpha \quad (14.85c)$$

$$M_{\alpha\beta} = \bar{M}_{\alpha\beta} \text{ 或 } \theta_\beta = \bar{\theta}_\beta \quad (14.85d)$$

$$Q_\alpha = \bar{Q}_\alpha \text{ 或 } w = \bar{w} \quad (14.85e)$$

和薄壳振动理论的边界条件(10.44), (10.43)相比, 可以发现, 不需要再引入薄膜合剪力  $T_{\alpha\beta}$ 、横向合剪力  $V_\alpha$ , 而是对原始  $N_{\alpha\beta}, M_{\alpha\beta}, Q_\alpha$  给定边界条件。因此厚壳理论是一种较为精确的壳体理论, 能每边满足应该满足的五个边界条件。

## 二、圆柱形厚壳的振动

在圆柱壳情况下, 按 § 10.1 有基本关系式

$$\alpha = x, \beta = \theta, A = 1, B = R, R_\alpha = \infty, R_\beta = R \quad (14.86)$$

则按式(14.78), 有

$$Q_x = -\frac{Gh}{k_r} \left( \theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (14.87a)$$

$$Q_\theta = -\frac{Gh}{k_r} \left( \theta_\theta - \frac{v}{R} + \frac{\partial w}{R \partial \theta} \right) \quad (14.87b)$$

按式(14.79), (14.80), 有中面应变关系式(10.2a), (10.2b), 内力表达式仍为式(14.81)。面动平衡方程(14.83)变为

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{x\theta}}{R \partial \theta} - \frac{Gh}{k_r} \left( \theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \rho J \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \quad (14.88a)$$

$$\frac{\partial M_\theta}{R \partial \theta} + \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} - \frac{Gh}{k_r} \left( \theta_\theta - \frac{v}{R} + \frac{\partial w}{R \partial \theta} \right) = \rho J \frac{\partial^2 \theta_\theta}{\partial t^2} \quad (14.88b)$$

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{x\theta}}{R \partial \theta} + q_x = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (14.88c)$$

$$\frac{\partial N_\theta}{R \partial \theta} + \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{Gh}{Rh} \left( \theta_\theta - \frac{v}{R} + \frac{\partial w}{R \partial \theta} \right) + q_\theta = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (14.88d)$$

$$\frac{Gh}{k_r} \frac{\partial}{\partial x} \left( \theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{Gh}{k_r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \theta_\theta - \frac{v}{R} + \frac{\partial w}{R \partial \theta} \right) - \frac{N_\theta}{R} + q_z = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (14.88e)$$

将式(14.88), (14.81), (10.2)合并, 可得关于五个中面位移分量的基本微分方程组:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{R^2 \partial \theta^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{R \partial x \partial \theta} + \nu \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{1}{K} \left[ \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - q_x \right] \quad (14.89a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{R \partial x \partial \theta} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{R^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial w}{R^2 \partial \theta} + \frac{Gh}{k_r K} \left( \theta_x - \frac{v}{R^2} + \frac{\partial w}{R^2 \partial \theta} \right) \\ &= \frac{1}{K} \left( \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - q_\theta \right) \end{aligned} \quad (14.89b)$$

$$\begin{aligned} & \frac{Gh}{k_r K} \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_\theta}{R \partial \theta} - \frac{\partial v}{R^2 \partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \theta^2} \right) - \left( \nu \frac{\partial u}{R \partial x} + \frac{\partial v}{R^2 \partial \theta} + \frac{w}{R^2} \right) \\ &= \frac{1}{K} \left( \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q_z \right) \end{aligned} \quad (14.89c)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \theta_x}{R^2 \partial \theta^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \theta_\theta}{R \partial x \partial \theta} - \frac{Gh}{k_r D} \left( \theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\rho J}{D} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (14.89d)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \theta_x}{R \partial x \partial \theta} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \theta_\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_\theta}{R^2 \partial \theta^2} - \frac{Gh}{k_r D} \left( \theta_\theta - \frac{v}{R} + \frac{\partial w}{R \partial \theta} \right) \\ &= \frac{\rho J}{D} \frac{\partial^2 \theta_\theta}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (14.89e)$$

式中  $K, D$  见式(9.36)。

对于两端简支的圆柱形厚壳可以设满足振型边界条件

$$N_x(0, \theta) = V(0, \theta) = M_x(0, \theta) = \Theta_\theta(0, \theta) = W(0, \theta) = 0 \quad (14.90a)$$

$$N_x(L, \theta) = V(L, \theta) = M_x(L, \theta) = \Theta_\theta(L, \theta) = W(L, \theta) = 0 \quad (14.90b)$$

的  $u, v, w, \theta_x, \theta_\theta$  的振型为

$$U(x, \theta) = A \cos \frac{m\pi}{L} x \cos n\theta \quad (14.91a)$$

$$V(x, \theta) = B \sin \frac{m\pi}{L} x \sin n\theta \quad (14.91b)$$

$$W(x, \theta) = C \sin \frac{m\pi}{L} x \cos n\theta \quad (14.91c)$$

$$\Theta_x(x, \theta) = H_x \cos \frac{m\pi}{L} x \cos n\theta \quad (14.91d)$$

$$\Theta_\theta(x, \theta) = H_\theta \sin \frac{m\pi}{L} x \sin n\theta \quad (14.91e)$$

代入基本方程(14.89)相应的振型方程, 可得关于待定系数  $A, B, C, H_x, H_\theta$  的齐次线性方程组, 由其系数行列式为零, 给出频率方程

$$\begin{vmatrix}
 (\Omega_K^2 - S_{11}) & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 \\
 S_{21} & (\Omega_K^2 - S_{22}) & S_{23} & 0 & S_{25} \\
 S_{31} & S_{32} & (\Omega_K^2 - S_{33}) & S_{34} & S_{35} \\
 0 & 0 & S_{43} & (\Omega_D^2 - S_{44}) & S_{45} \\
 0 & S_{52} & S_{53} & S_{54} & (\Omega_D^2 - S_{55})
 \end{vmatrix} = 0$$

(14.92 a)

式中

$$\begin{aligned}
 S_{11} &= \left( \frac{m\pi R}{L} \right)^2 + \frac{1-\nu}{2} n^2 \\
 S_{12} &= S_{21} = \frac{1+\nu}{2} \left( \frac{m\pi R}{L} \right) n \\
 S_{13} &= S_{31} = \nu \left( \frac{m\pi R}{L} \right) \\
 S_{22} &= \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{m\pi R}{L} \right)^2 + n^2 + I_K \\
 S_{23} &= S_{32} = -n(1 + I_K) \\
 S_{25} &= I_K R \\
 S_{33} &= 1 + I_K \left[ \left( \frac{m\pi R}{L} \right)^2 + n^2 \right] \\
 S_{34} &= -I_K \left( \frac{m\pi R}{L} \right) R \\
 S_{35} &= I_K n R \\
 S_{43} &= -\frac{I_D}{R} \left( \frac{m\pi R}{L} \right) \\
 S_{44} &= I_D + \left( \frac{m\pi R}{L} \right)^2 + \frac{1-\nu}{2} n^2 \\
 S_{45} &= S_{54} = \frac{1+\nu}{2} \left( \frac{m\pi R}{L} \right) n \\
 S_{52} &= I_D / R \\
 S_{53} &= \frac{I_D}{R} n \\
 S_{55} &= I_D + \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{m\pi R}{L} \right)^2 + n^2
 \end{aligned}$$

(14.92 b)

而其中

无量纲频率系数

$$\Omega_K^2 = \frac{\rho h}{K} \omega^2 R^2, \quad \Omega_D^2 = \frac{\rho J}{D} \omega^2 R^4$$

(14.93 a)

相对刚度系数

$$I_K = \frac{G h}{k_r K}, \quad I_D = \frac{G h R^2}{k_r D}$$

(14.93 b)

这是关于 $\omega^2$ 的五次代数方程，可求取五个固有频率 $\omega_{imn}^2$  ( $i=1, 2, 3, 4, 5$ ,  $m, n=1, 2, 3, \dots$ ) 及相应振型 $U_{imn}$ ,  $V_{imn}$ ,  $W_{imn}$ ,  $\Theta_{x,imn}$ ,  $\Theta_{\theta,imn}$ 。可以分析，固有频率与振型除和阶



次  $(i, m, n)$ , 几何参数  $R, L$ , 材料参数  $\rho h, K, D, \nu$  有关外, 对于厚壳还和抗剪刚度  $\frac{Gh}{k}$  (体现在  $I_K, I_D$ ), 转动惯量  $\rho J$  (体现在  $\Omega_D$ ) 有关。

按方程 (14.92) 计算结果表明: 由于计入剪变形及转动惯量效应, 降低了广义刚度, 增加了广义质量, 厚壳的固有频率比相应的薄壳频率要低, 并随厚径比增加, 阶次增高, 降低得越多; 另外, 对于同样半波数  $(m, n)$ , 有五个固有频率与振型, 它们分别相应于弯曲、薄膜、剪切变形为主。这些都是厚壳振动的几个主要特点。

作为数字例子, 下面介绍两端简支圆柱形厚壳的无扭转轴对称振动<sup>[246]</sup> ( $n=0$ ), 即设

$$U = A \cos \frac{m\pi}{L} x \quad (14.94a)$$

$$W = C \sin \frac{m\pi}{L} x \quad (14.94b)$$

$$\Theta_x = H_x \cos \frac{m\pi}{L} x \quad (14.94c)$$

而  $V = \Theta_\theta = 0$ , 用上述方法求得的固有频率系数  $\Omega_{K_i m} (i=1, 2, 3)$  和相应薄壳结果  $\Omega_{i m} (i=1, 2)$  进行比较列于表 14.3, 表 14.4。

两端简支圆柱形厚壳频率系数  $\Omega_{K_i m} (n=0, \frac{h}{R} = \frac{1}{36}, \frac{L}{R} = 4, \nu = 0.25)$

表 14.3

$m$	厚壳理论			薄壳理论	
	$\Omega_{K1}$	$\Omega_{K2}$	$\Omega_{K3}$	$\Omega_1$	$\Omega_2$
1	0.7105	1.055	69.78	0.7105	1.055
3	0.9458	2.379	69.83	0.9460	2.379
5	0.9585	3.940	69.93	0.9590	3.940
7	0.9818	5.505	70.00	0.9828	5.505
9	1.031	7.075	70.25	1.034	7.075
11	1.121	8.645	70.46	1.126	8.645
13	1.258	10.22	70.58	1.268	10.22
15	1.448	11.79	71.05	1.465	11.79
17	1.688	13.36	71.43	1.718	13.36
19	1.977	14.93	71.83	2.024	14.93

两表中数据比较反映了厚壳固有频率一些特点: 以弯曲变形为主的厚壳频率 ( $\Omega_{K1}$ ) 低于相应薄壳 ( $\Omega_1$ ) 结果, 并随  $m$  增加及  $\frac{h}{R}$  增加, 这种降低将愈加明显; 以薄膜变形为主的厚壳频率 ( $\Omega_{K2}$ ) 与相应薄壳 ( $\Omega_2$ ) 结果相同; 另外, 厚壳还多了一组以剪切变形为主的频率 ( $\Omega_{K3}$ ), 其随  $m$  增加而变化不大。这些特点对于其它类型厚壳也有普遍意义。

对于其它边界的圆柱形厚壳, 由于一般性解法相当复杂, 往往采用类似 § 10.1 的深梁函数 (附录 II) - 三角函数组合方法, 其中变形能应按式 (9.49), 计入垂直剪切变形能项, 动能

应按 § 9.9 式 (b) 计入转动动能项。

两端简支圆柱形厚壳频率系数  $\Omega_{K1m} (n=0, \frac{h}{R} = \frac{1}{10}, \frac{L}{R} = 8, \nu = 0.25)$  表 14.4

$m$	厚 壳 理 论			薄 壳 理 论	
	$\Omega_{K1}$	$\Omega_{K2}$	$\Omega_{K3}$	$\Omega_1$	$\Omega_2$
1	0.3716	1.008	18.76	0.3716	1.008
3	0.8895	1.264	19.43	0.8900	1.264
5	0.9446	1.993	19.51	0.9461	1.994
7	0.9686	2.768	19.64	0.9720	2.768
9	1.009	3.548	19.80	1.016	3.549
11	1.079	4.331	20.00	1.093	4.331
13	1.186	5.114	20.24	1.213	5.115
15	1.334	5.899	20.50	1.381	5.899
17	1.521	6.683	20.80	1.600	6.683
19	1.745	7.468	21.14	1.868	7.468

至于其它形状厚壳, 如锥形壳可见[86], [192]; 球形壳可见[127], [154]等文献。

## § 14.8 复合壳体的振动

复合结构的构造与力学特征的一般性情况已经在 § 8.4 中介绍过了。对于复合壳体也同样存在各种分析理论: 等效经典理论, 等效非经典理论, 经典耦合理论, 非经典耦合理论。我们在这里将推导一般性的非经典耦合理论的复合壳体基本方程, 至于其它理论则是其各种简化情况, 可以从中推得。

基于非经典耦合理论的复合壳体将考虑剪切变形、转动惯量效应, 其沿厚度各层或不同坐标高度处材料常数布置均可任意的。在这种情况下, 各层(处)的应变-位移关系不变, 但各层的材料常数不同, 积分所得的内力与中面应变关系发生变化, 并且内力与中面应变间的薄膜与弯曲分量发生耦合, 面内力平衡方程不发生变化。具体推导过程见下面所述。

法向坐标为  $\gamma$  处的平面应变分量按式 (9.26) 有

$$\begin{aligned} \varepsilon_a &= \varepsilon_a^0 + \gamma \kappa_a \\ \varepsilon_\beta &= \varepsilon_\beta^0 + \gamma \kappa_\beta \\ \varepsilon_{\alpha\beta} &= \varepsilon_{\alpha\beta}^0 + \gamma \kappa_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (14.95a)$$

而中面应变分量按式(9.27), (9.28)有

$$\begin{aligned} \varepsilon_a^0 &= \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{v}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{w}{R_a} \\ \varepsilon_\beta^0 &= \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{u}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{w}{R_\beta} \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^0 = \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{u}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{v}{B} \right) \quad (14.95b)$$

$$x_\alpha = \frac{1}{A} \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\theta_\beta}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta}$$

$$x_\beta = \frac{1}{B} \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \beta} + \frac{\theta_\alpha}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha}$$

$$x_{\alpha\beta} = \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{\theta_\alpha}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{\theta_\beta}{B} \right) \quad (14.95c)$$

对于非经典理论, 考虑到垂直剪变形效应, 按 § 14.7 厚壳理论的式(14.76), 有中面垂直剪应变分量

$$\varepsilon_{\alpha\gamma}^0 = \theta_\alpha - \frac{u}{R_\alpha} + \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha}$$

$$\varepsilon_{\beta\gamma}^0 = \theta_\beta - \frac{v}{R_\beta} + \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \quad (14.95d)$$

类似式(14.77), 壳体的垂直剪应变平均值和中面垂直剪应变间有关系

$$\bar{\varepsilon}_{\alpha\gamma} = \varepsilon_{\alpha\gamma} = \varepsilon_{\alpha\gamma}^0 / k_\alpha = \tilde{\varepsilon}_{\alpha\gamma}^0$$

$$\bar{\varepsilon}_{\beta\gamma} = \varepsilon_{\beta\gamma} = \varepsilon_{\beta\gamma}^0 / k_\beta = \tilde{\varepsilon}_{\beta\gamma}^0$$

$$(14.95e)$$

现认为每一层(处)的应力-应变关系具有一般性的各向异性关系式(14.60), 且忽略挤压变形效应, 则有

$$\begin{pmatrix} \sigma_\alpha \\ \sigma_\beta \\ \tau_{\beta\gamma} \\ \tau_{\alpha\gamma} \\ \tau_{\alpha\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{14} & e_{15} & e_{16} \\ e_{21} & e_{22} & e_{24} & e_{25} & e_{26} \\ e_{41} & e_{42} & e_{44} & e_{45} & e_{46} \\ e_{51} & e_{52} & e_{54} & e_{55} & e_{56} \\ e_{61} & e_{62} & e_{64} & e_{65} & e_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_\alpha \\ \varepsilon_\beta \\ \varepsilon_{\beta\gamma} \\ \varepsilon_{\alpha\gamma} \\ \varepsilon_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \quad (14.96)$$

对于不同复合材料布层的  $e_{ij}$  ( $i, j=1, 2, 4, 5, 6$ ) 表达式, 可参见 § 8.4.

进一步求取内力

$$N_\alpha = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_\alpha d\gamma, \quad N_\beta = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_\beta d\gamma, \quad N_{\alpha\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{\alpha\beta} d\gamma$$

$$M_\alpha = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_\alpha \gamma d\gamma, \quad M_\beta = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_\beta \gamma d\gamma, \quad M_{\alpha\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{\alpha\beta} \gamma d\gamma$$

$$Q_\alpha = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{\alpha\gamma} d\gamma, \quad Q_\beta = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{\beta\gamma} d\gamma \quad (14.97a)$$

代入应力表达式(14.96)及应变表达式(14.95a), (14.95e), 有

$$\begin{pmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [A] & [B]^T \\ [B] & [D] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{\varepsilon^0\} \\ \{x\} \end{pmatrix} \quad (14.97b)$$

其中

$$\{N\} = [N_\alpha \quad N_\beta \quad Q_\beta \quad Q_\alpha \quad N_{\alpha\beta}]^T$$

$$\{M\} = [M_\alpha \quad M_\beta \quad M_{\alpha\beta}]^T$$

$$\begin{aligned}\{\varepsilon^0\} &= [\varepsilon_a^0 \quad \varepsilon_\beta^0 \quad \tilde{\varepsilon}_{\beta\gamma}^0 \quad \tilde{\varepsilon}_{\alpha\gamma}^0 \quad \varepsilon_{\alpha\beta}^0]^T \\ \{x\} &= [x_a \quad x_\beta \quad x_{\alpha\beta}]^T\end{aligned}\quad (14.97c)$$

而

$$\begin{aligned}[A] &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{14} & A_{15} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{24} & A_{25} & A_{26} \\ A_{41} & A_{42} & A_{44} & A_{45} & A_{46} \\ A_{51} & A_{52} & A_{54} & A_{55} & A_{56} \\ A_{61} & A_{62} & A_{64} & A_{65} & A_{66} \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{14} & B_{15} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{24} & B_{25} & B_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{64} & B_{65} & B_{66} \end{bmatrix} \\ [D] &= \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (14.97d)$$

式中各组合弹性常数又由下列积分式确定:

对于材料特性连续的非匀质壳

$$A_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} e_{ij}(\gamma) d\gamma, \quad B_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} e_{ij}(\gamma) \gamma d\gamma, \quad D_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} e_{ij}(\gamma) \gamma^2 d\gamma$$

$$(i, j = 1, 2, 4, 5, 6) \quad (14.98a)$$

对于层叠壳

$$\begin{aligned}A_{ij} &= \sum_{k=1}^n e_{ij}^{(k)} (h_k - h_{k-1}), \quad B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n e_{ij}^{(k)} (h_k^2 - h_{k-1}^2), \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n e_{ij}^{(k)} (h_k^3 - h_{k-1}^3)\end{aligned}$$

$$(i, j = 1, 2, 4, 5, 6) \quad (14.98b)$$

其中 $e_{ij}^{(k)}$ 为第 $k$ 层材料常数。 $B_{ij}$ 的存在反映了内力中薄膜分量与应变中弯曲分量; 内力中弯曲分量与应变中薄膜分量间耦合。

将内力表达式(12.97)代入到考虑转动惯量的动平衡方程

$$\begin{aligned}\frac{\partial(BM_\alpha)}{\partial\alpha} + \frac{\partial(AM_{\alpha\alpha})}{\partial\beta} - \frac{\partial B}{\partial\alpha}M_\beta + \frac{\partial A}{\partial\beta}M_{\alpha\beta} - AB\left(Q_\alpha + R_2\frac{\partial^2\theta_\alpha}{\partial t^2} + R_1\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\right) &= 0 \\ \frac{\partial(AM_\beta)}{\partial\beta} + \frac{\partial(BM_{\alpha\beta})}{\partial\alpha} - \frac{\partial A}{\partial\beta}M_\alpha + \frac{\partial B}{\partial\alpha}M_{\beta\alpha} - AB\left(Q_\beta + R_2\frac{\partial^2\theta_\beta}{\partial t^2} + R_1\frac{\partial^2v}{\partial t^2}\right) &= 0 \\ \frac{\partial(BN_\alpha)}{\partial\alpha} + \frac{\partial(AN_{\beta\alpha})}{\partial\beta} - \frac{\partial B}{\partial\alpha}N_\beta + \frac{\partial A}{\partial\beta}N_{\alpha\beta} + \frac{AB}{R_\alpha}Q_\alpha + AB\left(q_\alpha - R_0\frac{\partial^2u}{\partial t^2} - R_1\frac{\partial^2\theta_\alpha}{\partial t^2}\right) &= 0 \\ \frac{\partial(AN_\beta)}{\partial\beta} + \frac{\partial(BN_{\alpha\beta})}{\partial\alpha} - \frac{\partial A}{\partial\beta}N_\alpha + \frac{\partial B}{\partial\alpha}N_{\beta\alpha} + \frac{AB}{R_\beta}Q_\beta + AB\left(q_\beta - R_0\frac{\partial^2v}{\partial t^2} - R_1\frac{\partial^2\theta_\beta}{\partial t^2}\right) &= 0 \\ -\frac{\partial}{\partial\alpha}(BQ_\alpha) + \frac{\partial}{\partial\beta}(AQ_\beta) - \frac{AB}{R_\alpha}N_\alpha - \frac{AB}{R_\beta}N_\beta + AB\left(q_\gamma - R_0\frac{\partial^2w}{\partial t^2}\right) &= 0\end{aligned}\quad (14.99)$$

式中组合惯性常数

对材料特性连续的非匀质壳有

$$R_0 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(\gamma) d\gamma, \quad R_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(\gamma) \gamma d\gamma, \quad R_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(\gamma) \gamma^2 d\gamma \quad (14.100 a)$$

对层叠壳有

$$R_0 = \sum_{k=1}^n \rho_k (h_k - h_{k-1}), \quad R_1 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \rho_k (h_k^2 - h_{k-1}^2), \quad R_2 = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \rho_k (h_k^3 - h_{k-1}^3) \quad (14.100 b)$$

再代入内力表达式 (14.97), 中面应变表达式 (14.95), 即可建立关于位移变量  $u, v, w, \theta_x, \theta_\theta$  的一般性复合壳体的基本方程组。边界条件仍同式 (14.85), 但应注意到内力表达式 (14.97)。

在非耦合情况下, 有  $B_{ij} = R_i = 0$ ; 在经典理论情况下有带  $i, j = 4, 5$  各量及  $R_2$  为零, 因此是这里推导的一般性方程的一种特殊情况。

对不同形状复合壳体的基本方程, 可取上述方程中  $\alpha, \beta, A, B, R_x, R_\theta$  为具体值而建立之。有关振动分析的解法类似相应厚壳的振动分析, 只不过其中组合弹性常数与组合惯性常数不同 [64][65][276][285]。

## § 14.9 具有初应力的壳体的振动

在许多实际应用的壳体结构中, 除动力载荷外, 还承有一定静力荷重, 并在壳体中产生一定初应力 (如压力容器) [10][84][273]。这些初应力将会对壳体振动产生影响。本节研究的初应力只限于事先给定的已知薄膜力, 并与振动变形无关。

初应力引起壳体振动方程的变化主要是在动平衡方程中考虑初应力效应。类似于平面力板的振动, 壳体振动造成中曲面变形, 使初始应力影响振动内力的动平衡, 因而最终改变了位移的基本微分方程组。下面将结合二种常用壳体加以分析。

### 一、圆 柱 壳

若初始薄膜力  $N_x^0, N_\theta^0, N_x^0$  沿壳体内部是均布的, 则基于简化理论的具有初应力的圆柱壳方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{R^2 \partial \theta^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{R \partial x \partial \theta} + \nu \frac{\partial w}{R \partial x} = \frac{1}{K} \left( \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - q_x \right) \quad (14.101 a)$$

$$\frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{R \partial x \partial \theta} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{R^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial w}{R^2 \partial \theta} = \frac{1}{K} \left( \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - q_\theta \right) \quad (14.101 b)$$

$$\begin{aligned} \frac{12}{h^3} \left[ \nu \frac{\partial u}{R \partial x} + \frac{\partial v}{R^2 \partial \theta} + \frac{w}{R^2} \right] + \nabla^2 \nabla^2 w - \frac{1}{D} \left[ N_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_\theta^0 \frac{\partial^2 w}{R \partial x \partial \theta} + N_\theta^0 \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \theta^2} \right] \\ = \frac{1}{D} \left( q_z - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \end{aligned} \quad (14.101 c)$$

与无初应力的相应方程 (10.66) 相比, 只是多了式 (14.101 c) 中含  $N_z^0$ ,  $N_x^0, N_y^0$  项, 这是由于法向力动态平衡中计入了初应力影响。具有初应力的壳体的振动分析类似无初应力壳体。为了讨论初应力效应, 下面计算  $N_z^0, N_y^0$  共同存在时, 两端简支圆柱壳的固有振动。

对于两端简支圆柱壳仍设满足边界条件的位移振型解为

$$U(x, \theta) = A \cos \frac{m\pi}{L} x \cos n\theta \quad (14.102 a)$$

$$V(x, \theta) = B \sin \frac{m\pi}{L} x \sin n\theta \quad (14.102 b)$$

$$W(x, \theta) = C \sin \frac{m\pi}{L} x \cos n\theta \quad (14.102 c)$$

代入基本方程 (14.101), 给出关于  $A, B, C$  的线代方程组, 可求得频率方程

$$\begin{vmatrix} (\Omega^2 - S_{11}) & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & (\Omega^2 - S_{22}) & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & (\Omega^2 - S_{33}) \end{vmatrix} = 0 \quad (14.103 a)$$

式中,

$$S_{11} = \left( \frac{m\pi R}{L} \right)^2 + \frac{1-\nu}{2} n^2$$

$$S_{12} = S_{21} = \frac{1+\nu}{2} \left( \frac{m\pi R}{L} \right) n$$

$$S_{13} = S_{31} = \nu \left( \frac{m\pi R}{L} \right)$$

$$S_{22} = \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{m\pi R}{L} \right)^2 + n^2$$

$$S_{23} = S_{32} = -n$$

$$S_{33} = 1 + k \left[ \left( \frac{m\pi R}{L} \right)^2 + n^2 \right] + \frac{1}{K} \left[ N_z^0 \left( \frac{m\pi R}{L} \right)^2 + N_y^0 n^2 \right] \quad (14.103 b)$$

而

$$\Omega^2 = \frac{\rho h}{K} \omega^2 R^2, \quad k = \frac{h^2}{12R^2} \quad (14.103 c)$$

方程 (14.103 a) 的求解可参见 § 10.3。式 (14.103 b) 与无初应力解 (10.29) 相比, 考虑到对于简化理论在式 (10.29 a) 一式 (10.29 e) 中应取  $k = 0$ , 所以两者只差在式 (14.103 b) 的  $S_{33}$  中多了一个含  $N_z^0, N_y^0$  项。又由于方程 (14.103 a) 解出的低频组频率 (往往是我们最关心的) 是以  $W$  振型为主, 因此有理由可近似取为 [29]

$$\Omega^2 - \frac{1}{K} \left[ N_z^0 \left( \frac{m\pi R}{L} \right)^2 + N_y^0 n^2 \right] = \Omega_0^2 \quad (14.104)$$

式中  $\Omega_0^2$  为相应无初应力壳的无量纲频率系数。由于对  $\Omega_0^2$  我们已经作了充分研究, 因此利用式 (14.104) 计算具有初应力壳的固有频率是十分方便的。显然, 随拉应力  $N_z^0, N_y^0$  增加, 壳体的固有频率是增加的; 相反, 在压应力作用下, 壳体频率将减小, 直到固有频率为零时, 相当在压应力作用下壳体失稳。

## 二、圆锥壳

若初始薄膜力  $N_s^0, N_\theta^0, N_{s\theta}^0$  沿壳体内部是均布的, 则基于简化理论的具有初应力的圆锥壳方程为

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{1}{(s \cdot \sin \alpha_0)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{u}{s^2} + \frac{(1+\nu)}{2} \frac{1}{(s \cdot \sin \alpha_0)} \frac{\partial^2 v}{\partial s \partial \theta} \\ & - \frac{(3-\nu)}{2} \frac{1/s}{(s \cdot \sin \alpha_0)} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{s \operatorname{tg} \alpha_0} \left( \nu \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{w}{s} \right) \\ & = \frac{1}{K} \left( \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - q_s \right) \end{aligned} \quad (14.105 a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{(1+\nu)}{2} \frac{1}{(s \cdot \sin \alpha_0)} \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial \theta} + \frac{(3-\nu)}{2} \frac{1/s}{(s \cdot \sin \alpha_0)} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} \\ & + \frac{1}{(s \cdot \sin \alpha_0)^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{1}{s} \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{(1-\nu)}{2} \frac{v}{s^2} + \frac{\cos \alpha_0}{(s \cdot \sin \alpha_0)^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \\ & = \frac{1}{K} \left( \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - q_\theta \right) \end{aligned} \quad (14.105 b)$$

$$\begin{aligned} & \frac{12}{h^3} \left[ \frac{1}{s \cdot \operatorname{tg} \alpha_0} \left( \nu \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{u}{s} \right) + \frac{\cos \alpha_0}{(s \cdot \sin \alpha_0)^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{(s \cdot \operatorname{tg} \alpha_0)^2} \right] + \nabla^2 \nabla^2 w \\ & - \frac{1}{D} \left[ N_s^0 \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + 2 N_{s\theta}^0 \left( \frac{1}{(s \cdot \sin \alpha_0)} \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta} - \frac{1/s}{(s \cdot \sin \alpha_0)} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right. \\ & \left. + N_\theta^0 \left( \frac{1}{(s \cdot \sin \alpha_0)^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial w}{\partial s} \right) \right] \\ & = \frac{1}{D} \left( q_z - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \end{aligned} \quad (14.105 c)$$

由于式 (14.105) 是变系数方程, 对于无初应力的圆锥壳的求解已经相当复杂, 因此对于具有初应力的圆锥壳大多采用本章所述的近似解法。必须注意的是变形能应计入初应力做功, 一般代替 § 9.9、式 (h) 有

$$U = \iiint_V \left\{ \frac{1}{2} (\sigma_a \varepsilon_a + \sigma_\beta \varepsilon_\beta + \tau_{a\beta} \varepsilon_{a\beta}) + (\sigma_a^0 \varepsilon_a + \sigma_\beta^0 \varepsilon_\beta + \tau_{a\beta}^0 \varepsilon_{a\beta}) \right\} A B d\alpha d\beta d\gamma \quad (14.106)$$

式中  $\sigma_a^0, \sigma_\beta^0, \tau_{a\beta}^0$  为一般正交曲线坐标系中的初应力分量。

## § 14.10 壳体的大挠度振动

以上壳体振动分析均属线性振动范围, 即其基本方程乃是线性微分方程。本节将讨论壳体振动的非线性问题中的一种, 大挠度振动。在 § 8.9 分析平板的大挠度振动时已经看到, 大挠度振动主要是当振动振幅并不是远小于厚度时在几何方程中引入了非线性项, 因而导致基本微分方程的非线性化。下面将结合两种常用壳体加以分析。进一步详细情况可参见文献 [72][156][233][295]。

## 一、圆柱壳

和平板情况类似, 圆柱壳在大挠度振动情况下, 主要引起变化的关系式为中面应变表达

式。在计入法向挠度一阶导数非线性项后, 原式 (10.2a) 变为

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (14.107a)$$

$$\varepsilon_\theta^0 = -\frac{\partial v}{R \partial \theta} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial w}{R \partial \theta} \right)^2 \quad (14.107b)$$

$$\varepsilon_{x\theta}^0 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{R \partial \theta} + \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w}{R \partial \theta} \right) \quad (14.107c)$$

我们仍采用简化理论的基本假定, 有中面转角关系式 (10.61):

$$\theta_x = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \theta_\theta = -\frac{\partial w}{R \partial \theta} \quad (14.108a)$$

而曲率表达式仍为式 (10.26):

$$\kappa_x = \frac{\partial \theta_x}{\partial x}, \quad \kappa_\theta = \frac{\partial \theta_\theta}{R \partial \theta}, \quad \kappa_{x\theta} = \frac{\partial \theta_\theta}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial \theta_x}{\partial \theta} \quad (14.108b)$$

式 (10.3) 中代入以上中面应变表达式, 可算得各内力分量为:

$$N_x = K \left\{ \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + \nu \left[ -\frac{\partial v}{R \partial \theta} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial w}{R \partial \theta} \right)^2 \right] \right\} \quad (14.109a)$$

$$N_\theta = K \left\{ \left[ -\frac{\partial v}{R \partial \theta} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial w}{R \partial \theta} \right)^2 \right] + \nu \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} \quad (14.109b)$$

$$N_{x\theta} = K \frac{(1-\nu)}{2} \left[ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{R \partial \theta} + \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w}{R \partial \theta} \right) \right] \quad (14.109c)$$

$$M_x = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \theta^2} \right] \quad (14.109d)$$

$$M_\theta = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \quad (14.109e)$$

$$M_{x\theta} = -D(1-\nu) \left( -\frac{\partial^2 w}{R \partial x \partial \theta} \right) \quad (14.109f)$$

按简化理论, 为满足忽略平面内惯性力及剪力项的平面内两方向的力动平衡方程 (9.73), 可设应力函数  $f$  和薄膜内力间有关系式 (9.75), 对于圆柱壳现应为

$$N_x = \frac{\partial^2 f}{R^2 \partial \theta^2}, \quad N_\theta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad N_{x\theta} = -\frac{\partial^2 f}{R \partial x \partial \theta} \quad (14.110a)$$

但必须同时满足从式 (14.107) 推得的协调方程:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_\theta^0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x^0}{R^2 \partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{x\theta}^0}{R \partial x \partial \theta} - \frac{\partial^2 w}{R \partial x^2} \cdot \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left( -\frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \theta^2} \right) - \left( -\frac{\partial^2 w}{R \partial x \partial \theta} \right)^2 = 0 \quad (14.110b)$$

该式利用内力表达式 (10.3) 消去中面应变分量; 利用式 (14.110a) 消去内力分量, 给出  $f$  与  $w$  间第一个方程:

$$Eh \left[ \left( -\frac{\partial^2 w}{R \partial x \partial \theta} \right) - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \theta^2} \right) + \frac{\partial^2 w}{R \partial x^2} \right] - \nabla^2 \nabla^2 f = 0 \quad (14.111a)$$

对于第三个法向的力动平衡方程 (9.40c), 考虑到式 (14.101c) 中平均力与挠度导数乘积项, 代入内力表达式 (14.109), 有  $f$  与  $w$  间第二个方程:

$$D \nabla^2 \nabla^2 w + \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{R^2 \partial \theta^2} - \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \theta^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{R \partial x \partial \theta} \frac{\partial^2 f}{R \partial x \partial \theta} \right]$$



$$+ \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q, \quad (14.111b)$$

式中

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{R^2 \partial \theta^2} \quad (14.111c)$$

式(14.111)就是基于简化理论的圆柱壳(也即圆柱形扁壳)的大挠度振动方程。显然,将式中非线性项去掉,即回复到原圆柱壳小挠度方程(12.41);如果取 $R \partial \theta = \partial y$ ,  $R \rightarrow \infty$ ,  $f = \frac{p}{h}$ ,则回复到原平板大挠度方程(8.171)。其边界条件形式上仍同小挠度问题,只是其中内力表达式应采用式(14.109)。

非线性偏微分方程组(14.111)的求解,方法上同平板大挠度振动。一般采用布勃诺夫-迦辽金法,即取满足位移边界条件的解函数 $w(x, \theta, t) = T(t)w_0(x, \theta)$ ,代入基本方程之一(14.111a),求解 $f(x, \theta, t)$ ,并满足力边界条件;然后用迦辽金法积分满足另一方程(14.111b),给出 $T(t)$ 应满足的非线性常微分方程,至于非线性常微分方程的解法已在§8.10的第二小节详细介绍了。

例如,对于两端简支圆柱壳,可设

$$w(x, y, t) = A_{mn}(t) \sin \frac{m\pi}{L} x \cos n\theta + B_{mn}(t) \sin \frac{m\pi}{L} x \sin n\theta \\ + \frac{n^2}{4R} [A_{mn}^2(t) + B_{mn}^2(t)] \sin^2 \frac{m\pi}{L} x \quad (14.112)$$

数值计算结果分析表明<sup>[72]</sup>,由于计入大挠度效应,壳体振动频率可能提高或降低(刚化或软化),其取决于多种因素:几何参数、边界条件、半波数、开口或闭口等。这与平板大挠度振动频率均提高现象有所不同。

## 二、圆锥壳

在§11.3中详细讨论过圆锥壳的各种关系式与基本方程。原中面应变表达式(11.11)在大挠度情况下将计入非线性项为

$$e_s^0 = -\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 \quad (14.113a)$$

$$e_\theta^0 = \frac{u}{s} + \frac{1}{s \cdot \sin \alpha_0} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{s \cdot \tan \alpha_0} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s \cdot \sin \alpha_0} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \quad (14.113b)$$

$$e_{s\theta}^0 = \frac{1}{s \cdot \sin \alpha_0} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{v}{s} + \frac{1}{s \cdot \sin \alpha_0} \left( \frac{\partial w}{\partial s} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \quad (14.113c)$$

若仍采用简化理论的假定,有中面转角关系式(11.14):

$$\theta_s = -\frac{\partial w}{\partial s}, \quad \theta_\theta = -\frac{1}{s \cdot \sin \alpha_0} \frac{\partial w}{\partial \theta} \quad (14.114a)$$

曲率表达式仍为式(11.11d)一式(11.11f):

$$\kappa_s = \frac{\partial \theta_s}{\partial s}, \quad \kappa_\theta = \frac{\theta_s}{s} + \frac{1}{s \cdot \sin \alpha_0} \frac{\partial \theta_\theta}{\partial \theta}, \quad \kappa_{s\theta} = \frac{1}{s \cdot \sin \alpha_0} \frac{\partial \theta_s}{\partial \theta} + s \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\theta_\theta}{s} \right) \quad (14.114b)$$

原式(11.12)中代入以上中面应变表达式,可算得各内力分量为

$$N_s = K \left\{ \left[ -\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 \right] + \nu \left[ \frac{u}{s} + \frac{1}{s \cdot \sin \alpha_0} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{s \cdot \tan \alpha_0} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s \cdot \sin \alpha_0} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right] \right\} \quad (14.115a)$$

$$N_{\theta} = K \left\{ \left[ \frac{u}{s} + \frac{1}{s \cdot \sin \alpha_0} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{s \cdot \operatorname{tg} \alpha_0} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s \cdot \sin \alpha_0} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right]^2 + \nu \left\{ \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 \right\} \right\} \quad (14.115b)$$

$$N_{s\theta} = K \frac{(1-\nu)}{2} \left\{ \frac{1}{s \cdot \sin \alpha_0} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{v}{s} + \frac{1}{s \cdot \sin \alpha_0} \left( \frac{\partial w}{\partial s} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right\} \quad (14.115c)$$

$$M_s = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \nu \left( \frac{\partial w}{s \partial s} + \frac{1}{(s \cdot \sin \alpha_0)^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] \quad (14.115d)$$

$$M_{\theta} = -D \left[ \frac{\partial w}{s \partial s} + \frac{1}{(s \cdot \sin \alpha_0)^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right] \quad (14.115e)$$

$$M_{s\theta} = -D(1-\nu) \left\{ \frac{1}{s \cdot \sin \alpha_0} \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta} - \frac{1}{s^2 \cdot \sin \alpha_0} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right\} \quad (14.115f)$$

对于圆锥壳，有基本关系式：

$$\alpha = s, \beta = \theta, A = 1, B = s \cdot \sin \alpha_0, R_s = \infty, R_{\theta} = s \cdot \operatorname{tg} \alpha_0. \quad (14.116)$$

故薄膜内力和应力函数  $f$  间关系式 (9.75) 变为

$$N_s = \frac{1}{s} \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{1}{(s \cdot \sin \alpha_0)^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \quad (14.117a)$$

$$N_{\theta} = \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \quad (14.117b)$$

$$N_{s\theta} = \frac{1}{s \cdot \sin \alpha_0} \left[ \frac{1}{s} \frac{\partial f}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial \theta} \right] \quad (14.117c)$$

中面应变要满足从式 (14.113) 推得的协调方程

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{\theta}^0}{\partial s^2} + \frac{1}{(s \cdot \sin \alpha_0)^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_s^0}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{s\theta}^0}{(s \cdot \sin \alpha_0) \partial s \partial \theta} - \frac{\partial^2 w}{s \operatorname{tg} \alpha_0 \partial s^2} + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{s^2 \cdot \sin^2 \alpha_0 \partial \theta^2} \right) - \left( \frac{\partial^2 w}{s \cdot \sin \alpha_0 \partial s \partial \theta} \right)^2 = 0 \quad (14.118)$$

利用内力表达式 (11.2), (14.117), 可消去中面应变、内力分量, 给出  $f$  与  $w$  间第一个方程:

$$Eh \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{s \cdot \sin \alpha_0 \partial s \partial \theta} \right)^2 - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{s^2 \sin^2 \alpha_0 \partial \theta^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 w}{s \operatorname{tg} \alpha_0 \partial s^2} \right) \right] - \nabla^2 \nabla^2 f = 0 \quad (14.119a)$$

从动平衡方程 (9.40c), 考虑到式 (14.105c) 中平面力与挠度导数乘积项, 代入内力表达式 (14.117), 有  $f$  与  $w$  间第二个方程:

$$D \nabla^2 \nabla^2 w + \left\{ \frac{1}{s \cdot \operatorname{tg} \alpha_0} \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \left( \frac{1}{s} \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{1}{(s \cdot \sin \alpha_0)^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \right) - \left( \frac{1}{s} \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{1}{(s \cdot \sin \alpha_0)^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} - \frac{2}{(s \cdot \sin \alpha_0)^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta} - \frac{1}{s} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \cdot \left( \frac{1}{s} \frac{\partial f}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial \theta} \right) \right\} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q. \quad (14.119b)$$

式中

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{(s \cdot \sin \alpha_0)^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (14.119c)$$

式 (14.119) 的解法类似于圆柱壳方程 (14.111)。

## § 14.11 壳体与流体的耦合振动

在 § 8.12 中已经指出, 结构与流体的耦合振动是一种动力相互作用问题。当壳体附近有流体存在时, 壳体受到的流体的载荷取决于流体的运动, 而流体的运动又和壳体的变形有关, 因此壳体与流体的运动方程是耦合的<sup>[16][159]</sup>。壳体的法向载荷中有一部份来自于流体动水压力, 流体方程在接触面处的边界条件与壳体的运动有关。在第八章, 平板与流体耦合振动分析中已经提到了上述特点, 但壳体与平板不同之处还在于与流体耦合包括了两种不同情况: 内流体与外流体。外流体指壳体外围存在无限流体域, 流体本来是处于静止状态, 讨论流体存在对壳体振动影响, 内流体指壳体内部装有有限流体, 要考虑到运动时流体可能出现的晃动与撞动的两种情况。

如不考虑重力波或晃动, 则流体对壳体的影响主要是附加质量效应, 使壳体频率降低。但严格来说, 附加质量不是一个单一固定的数, 对于不同壳体振型, 质量效应是不一样的。只有在考虑单一基本分量情况下, 用固定附加质量计算流体效应才比较合理。

有关流体的基本方程、边界条件和一些基本性质已在 § 8.12 中叙述过了。这里将结合两种不同情况, 列出壳体与流体耦合振动的基本方程及一些主要结果。

### 一、壳体与内流体的耦合振动

设底面刚性的一般性旋转壳体内装有不可压缩、无旋、理想流体 (图 14.4)。流体的速度势函数  $\phi(r, \theta, z, t)$  满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (14.120 a)$$

而流体速度分量

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}, \quad u_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (14.120 b)$$

在微小运动假设下, 忽略高阶微量, 在流体内部的流动压力  $P$  与速度势  $\phi$  间满足

$$P = -\rho_f \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (14.120 c)$$

而  $\rho_f$  为流体质量密度。

在耦合振动情况下, 内流体液面可分为两种情况: 撞动, 指液面而保持水平 ( $P=0$ ); 晃动, 指在振动过程中液面自由起伏, 有波高  $\eta(r, \theta, t)$ , 原液面上的动水压力为

$$P|_{z=H} = \rho_f g \eta(r, \theta, t) \quad (14.120 d)$$

式中  $g$  为重力加速度。

因此方程 (14.120 a) 相应的边界条件为

$$z = H; \quad P = \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (\text{撞动}) \quad (14.121 a)$$

$$\text{或} \quad u_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial P}{\rho_f g \partial t} = -\frac{\partial^2 \phi}{g \partial t^2} \quad (\text{晃动}) \quad (14.121 b)$$

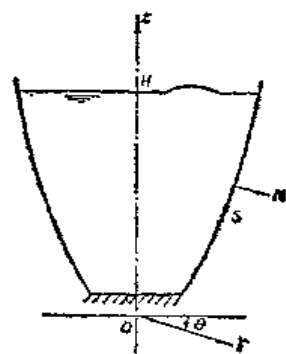


图 14.4

$$z = 0; \quad u_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (14.121 c)$$

在与壳体接触面处，考虑到无摩擦和粘性，因此壳体和液体在外法线 $\vec{N}$ 方向上的速度分量相等，即

$$S: \quad \frac{\partial \phi}{\partial N} = \vec{u}_s \cdot \vec{N} \quad (14.121 d)$$

式中 $\vec{u}_s$ 为壳体的速度向量。式(14.121 d)也就是流体与壳体的协调条件之一。在圆柱壳情况下有

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial t} \quad (14.121 e)$$

式中 $w$ 为壳体的法向位移。

旋转壳(图11.1)的振动方程在§11.1已经给出，它包括几何方程(11.2)、物理方程(11.3)，而在存在内流体情况下，其动平衡方程中必须计入动水压力 $P$ ，而为

$$\begin{aligned} \frac{\partial(R_0 N_\varphi)}{\partial \varphi} + R_\varphi \frac{\partial N_{\varphi\varphi}}{\partial \theta} - R_\varphi \cos \varphi N_\theta + \frac{1}{R_\varphi} \left[ \frac{\partial}{\partial \varphi} (R_0 M_\varphi) + R_\varphi \frac{\partial M_{\varphi\varphi}}{\partial \theta} \right. \\ \left. - R_\varphi \cos \varphi M_\theta \right] + R_\varphi R_0 q_\varphi = R_\varphi R_0 \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (14.122 a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} (R_0 N_{\varphi\varphi}) + R_\varphi \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + R_\varphi \cos \varphi N_{\varphi\varphi} + R_\varphi \sin \varphi Q_\theta + R_\varphi R_0 q_\varphi \\ = R_\varphi R_0 \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (14.122 b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \frac{\partial}{R_\varphi \partial \varphi} (R_0 M_\varphi) + \frac{\partial M_{\varphi\varphi}}{\partial \theta} - \cos \varphi M_\theta \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{\partial}{R_0 \partial \varphi} (R_0 M_{\varphi\varphi}) \right. \\ \left. + \frac{R_\varphi}{R_0} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \frac{R_\varphi}{R_0} \cos \varphi M_{\varphi\varphi} \right] - R_\varphi R_0 \left( \frac{N_\varphi}{R_\varphi} + \frac{N_\theta}{R_\theta} \right) \\ + R_\varphi R_0 (q_r + P) = R_\varphi R_0 \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (14.122 c)$$

这就是壳体与流体的协调条件之二。而壳体方程的边界条件仍为式(11.5)。

上述壳体与内流体耦合振动方程组：式(14.120)，(14.121)，(14.122)的联立求解相当复杂。一般只能采用数值解法<sup>[286][333]</sup>。而只有在一些极简化情况下才能求得解析解<sup>[323]</sup>。例如圆柱壳体，在§10.5中提到过，对简化理论，在 $\frac{n^2}{R^2} \gg \lambda^2$ 前提下，可化为相应边界条件单向板；而大部分壳体情况下，晃动频率远比计入内流体后的壳体频率小，故进一步忽略流体的晃动效应，则壳体与流体耦合振动问题的基本方程及边界条件简化为：

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (14.123 a)$$

$$P(r, \theta, t) = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (14.123 b)$$

$$z = 0; \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (14.123 c)$$

$$z = H; \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (14.123 d)$$

$$r = R; \quad \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial t} \cos \theta \quad (14.123 e)$$

及

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \int_0^{2\pi} P(R, \theta, t) \cos \theta R d\theta \quad (14.124 a)$$

$$z = 0, \quad w = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (14.124 b)$$

$$z = H, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} = 0 \quad (14.124 c)$$

这里,  $w$  为壳体截面水平方向位移,  $J$  为壳体截面惯性矩,  $F$  为壳体截面面积,  $\rho$  为壳体质量密度。其中未知数为  $\phi$  与  $w$ 。

设方程组 (14.123 a), (14.124 a) 的解为

$$w(r, t) = W(z)T(t) \quad (14.125 a)$$

$$\phi(r, \theta, z, t) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \sum_{m=1,2,3} G_{mn}(r) \cos n\theta \cos \frac{m\pi}{2H} z T(t) \quad (14.125 b)$$

将式 (14.125 b) 代入方程 (14.123 a), 有  $G_{mn}$  应满足的变系数常微分方程

$$G''_{mn}(r) + \frac{1}{r} G'_{mn}(r) - \left( \frac{n^2}{r^2} + \frac{m^2 \pi^2}{4H^2} \right) G_{mn}(r) = 0 \quad (14.126 a)$$

通过  $r = \frac{2H}{m\pi} r_m$  的置换, 变为贝塞尔方程:

$$G''_{mn}(r_m) + \frac{1}{r_m} G'_{mn}(r_m) - \left( 1 + \frac{n^2}{r_m^2} \right) G_{mn}(r_m) = 0 \quad (14.126 b)$$

在第四章已讨论过, 其解应为

$$G_{mn}(r_m) = A_{mn} I_n(r_m) + B_{mn} K_n(r_m) \quad (14.127 a)$$

式中  $I_n$ ,  $K_n$  分别为  $n$  阶第一、二类修正贝塞尔函数。考虑到  $r = 0$  处解有限, 则有

$$G_{mn}(r_m) = A_{mn} I_n(r_m) \quad (14.127 b)$$

将代回式 (14.125 b), 有速度势函数解

$$\phi(r, \theta, z, t) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \sum_{m=1,2,3} A_{mn} I_n(r_m) \cos n\theta \cos \frac{m\pi}{2H} z T(t) \quad (14.128 a)$$

下一步再来考虑  $\phi$  应满足的边界条件。由于所设解 (14.125 b) 已预先满足  $z = 0$ ,  $z = H$  的边界条件 (14.123 c), (14.123 d), 故只需进一步再满足边界条件 (14.123 e)。可以将解 (14.125 a), (14.128 a) 代入式 (14.123 e), 并比较之得

$$\sum_{n=1,3,5} A_{mn} \frac{dI_n}{dr} [r_m(R)] \cos \frac{m\pi}{2H} z = W(z) \quad (14.129 a)$$

及

$$A_{mn} = 0 \quad (n \neq 1) \quad (14.129 b)$$

为求取  $A_{m1}$  可将  $W(z)$  展开为级数

$$W(z) = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} C_m \cos \frac{m\pi}{2H} z \quad (14.130 a)$$

其中

$$C_m = \frac{2}{H} \int_0^H W(z) \cos \frac{m\pi}{2H} z dz \quad (14.130 b)$$

将式 (14.130) 代入式 (14.129 a), 比较得

$$A_m = \frac{2}{H} \frac{\int_0^H W(z) \cos \frac{m\pi}{2H} z dz}{\frac{dI_1}{dr} \left( \frac{m\pi}{2H} R \right)} \quad (m=1, 3, 5, \dots) \quad (14.129c)$$

将  $A_m$  解 (14.129c), (14.129b) 代回式 (14.128), 给出解

$$\phi = \frac{2}{H} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{I_1 \left( \frac{m\pi}{2H} r \right)}{\frac{dI_1}{dr} \left( \frac{m\pi}{2H} R \right)} \cos \theta \cos \frac{m\pi}{2H} z \dot{T}(t) \int_0^H W(z_1) \cos \frac{m\pi}{2H} z_1 dz_1 \quad (14.128b)$$

代入式 (14.123b) 求出动水压力

$$P = -\frac{2\rho_f}{H} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{I_1 \left( \frac{m\pi}{2H} r \right)}{\frac{dI_1}{dr} \left( \frac{m\pi}{2H} R \right)} \cos \theta \cdot \cos \frac{m\pi}{2H} z \cdot \ddot{T}(t) \int_0^H W(z_1) \cos \frac{m\pi}{2H} z_1 dz_1 \quad (14.128c)$$

以上是满足流体的基本方程及边界条件 (14.123); 下面进一步来满足壳体的基本方程及边界条件, 式 (14.124), 以确定其中未知的  $W(z)$ 。将解 (14.125a), (14.128c) 代入方程 (14.124a), 并讨论固有振动问题, 则有壳体振型  $W(z)$  应满足的微积分方程

$$EJW''''(z) - \rho F \omega^2 W(z) = \frac{2\pi\rho_f R \omega^2}{H} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{I_1(\xi_m)}{\frac{dI_1}{dr}(\xi_m)} \cdot \cos \frac{m\pi}{2H} z \int_0^H W(z_1) \cos \frac{m\pi}{2H} z_1 dz_1 \quad (14.131a)$$

而

$$\xi_m = \frac{m\pi R}{2H} \quad (14.131b)$$

此方程的解法是这样的。设

$$W(z) = \sum_{K=1}^{\infty} D_K X_K(z) \quad (14.131c)$$

式中  $X_K(x)$  为  $K$  阶悬臂梁函数 (附录 I), 因此已满足边界条件 (14.124b), (14.124c), 将式 (14.131c) 代入方程 (14.131a), 并考虑到梁函数已满足方程

$$EJX_K'''' = \rho F \omega_K^2 X_K \quad (14.132a)$$

式中  $\omega_K$  为梁的第  $K$  阶固有频率, 则有

$$\begin{aligned} \rho F \sum_{K=1}^{\infty} D_K (\omega_K^2 - \omega^2) X_K &= \frac{2\pi\rho_f R \omega^2}{H} \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{I_1(\xi_m)}{\frac{dI_1}{dr}(\xi_m)} \cos \frac{m\pi}{2H} z \sum_{K=1}^{\infty} D_K \\ &\times \int_0^H X_K(z_1) \cos \frac{m\pi}{2H} z_1 dz_1 \end{aligned} \quad (14.132b)$$

将此方程乘  $X_s$ , 并沿坐标  $z$  从  $O$  到  $H$  积分, 考虑到  $X_K$  的正交性及法式化有

$$\begin{aligned} \rho F (\omega_s^2 - \omega^2) D_s - 2\pi\rho_f R \omega^2 \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{I_1(\xi_m)}{\frac{dI_1}{dr}(\xi_m)} E_{sm} \sum_{K=1}^{\infty} D_K E_{Km} &= 0 \\ (s=1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (14.133a)$$

式中,

$$E_{km} = \frac{1}{H} \int_0^H X_k(z) \cos \frac{m\pi}{2H} z dz \quad (14.133b)$$

$$E_{km} = \frac{1}{H} \int_0^H X_k(z) \cos \frac{m\pi}{2H} z dz \quad (14.133c)$$

方程 (14.133a) 是关于系数  $D_k$  的线代方程组, 由其系数行列式为零, 可求得关于  $\omega^2$  的频率方程, 从而解得壳体与内流体耦合频率  $\omega$  及相应振型系数  $D_k$ , 代回式 (14.131c), (14.128b), (14.128c), 则分别可求取壳体、速度势函数、动水压力的振型。

作为工程上近似, 展开式 (14.131c) 中可只取一项与该阶壳体振型相应的梁函数  $X_k$ , 则按式 (14.133a) 即可直接给出系统固有频率的近似公式

$$\omega_k^2 = \left[ \frac{1}{1 + 2\pi \frac{\rho_f R}{\rho F} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{I_1(\xi_n)}{\frac{dI_1}{dr}(\xi_n)} E_{kn}^2} \right] (\omega_k^0)^2 = \frac{1}{1 + k_M} (\omega_k^0)^2 \quad (14.134)$$

解 (14.134) 清楚表明, 计入内流体后壳体频率是降低的; 若壳体等效为单自由度体, 则相当壳体将附加  $k_M$  倍自身质量的流体质量; 反映附加质量大小的  $k_M$  不但取决于流体相对质量密度  $\rho_f/\rho$  及有关几何参数, 而且还和振型阶次  $K$  有关, 这正如本节一开始指出那样, 对于不同阶壳体振型, 流体质量效应是不一样的。

## 二、壳体与外流体的耦合振动

壳体与外流体的耦合振动的基本方程及有关分析方法在很多地方和内流体情况类似。因此这里就只指出其不同之处, 其它相同内容就不再重复。

图14.4所示旋转壳体外围有无限不可压缩、无旋、理想流体。则流体部份基本方程及关系式同式 (14.120a), (14.120b), (14.120c), 但在固有振动情况下, 外流体具有液面边界条件 (14.121a), 除非存在波浪力作用, 其它边界条件同式 (14.121c), (14.121d), (14.121e)。壳体的基本方程及边界条件仍同式 (11.2), (11.3), (14.122), (11.5), 只是考虑到动水压力的方向改变, 方程 (14.122c) 中符号  $P$  前加一负号。

若采取与内流体类似的圆柱壳的近似解法, 流体与壳体的方程及边界条件 (14.123), (14.124) 不变。方程的解仍取为式 (14.125), 其中  $G_{mn}$  为式 (14.127a), 但考虑到在无穷远处解有限, 则有

$$G_{mn}(r_m) = B_{mn} K_n(r_m) \quad (14.135a)$$

故代回式 (14.125b), 有解

$$\phi(r, \theta, z, t) = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,2,3}^{\infty} B_{mn} K_n(r_m) \cos n\theta \cdot \cos \frac{m\pi}{2H} z \cdot \dot{T}(t) \quad (14.135b)$$

进一步求取  $B_{mn}$  过程类同式 (14.129), 最后得

$$B_{m1} = \frac{2}{H} \frac{\int_0^H W(z) \cos \frac{m\pi}{2H} z dz}{\frac{dK_1}{dr} \left( \frac{m\pi}{2H} R \right)}, \quad B_{mn} = 0 \quad (n \neq 1) \quad (14.135c)$$

因此有速度势函数解

$$\phi = \frac{2}{H} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{K_1\left(\frac{m\pi}{2H}r\right)}{\frac{dK_1}{dr}\left(\frac{m\pi}{2H}R\right)} \cos \theta \cos \frac{m\pi}{2H}z \dot{T}(t) \int_0^H W(z_1) \cos \frac{m\pi}{2H}z_1 dz_1$$

(14.136 a)

及动水压力解

$$P = -\frac{2\rho_l}{H} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{K_1\left(\frac{m\pi}{2H}r\right)}{\frac{dK_1}{dr}\left(\frac{m\pi}{2H}R\right)} \cos \theta \cos \frac{m\pi}{2H}z \ddot{T}(t) \int_0^H W(z_1) \cos \frac{m\pi}{2H}z_1 dz_1$$

(14.136 b)

进一步用壳体方程及边界条件确定 $W(z)$ 的方法类同式 (14.131), (14.132), (14.133), 但要注意 $I_1$ 应改为 $K_1$ 。



## 参 考 文 献

- [1] Adelman, H. M., Catherines, D.S., Walton, W., A Geometrically Exact Finite Element for Thin Shells of Revolution, AIAA 7-th Aerospace Sci. Meeting, (1969).
- [2] Akasaka, T., Takagishi, T., Vibration of Corrugated Diaphragm, Bull. JSME, 1(1958), 3, p. 215.
- [3] Amba-Rao, C.L., On the Vibration of a Rectangular Plate Carrying a Concentrated Mass, JAM, 31(1964), 3, p. 550.
- [4] Amoz, M. B., Note on Deflections and Flexural Vibrations of Clamped Sectorial Plates, JAM, 25(1959), p. 136.
- [5] Anderson, B. W., Vibration of Triangular Cantilever Plates by the Rize Method, JAM, 21(1954), 4, p. 365.
- [6] Anderson, R. G., Iroms, B. M., Zienkiewicz, O. C., Vibration and Stability of Plates Using Finite Elements, Inter. J. Solids & Struct., 4(1968), P. 1031.
- [7] Appl, F. C., Byers, N. R., Fundamental Frequency of Simply Supported Rectangular Plates with Linearly Varying Thickness, JAM, 32(1965), p. 163.
- [8] Appl, F. C., Zorowski, C. F., Upper and Lower Bounds for Special Eigenvalues, JAM, 26(1959), p. 246.
- [9] Armenakas, A. E., Gazis, D.C., Herrmann, G., Free Vibrations of Circular Cylindrical Shells, Pergamon Press, (1969).
- [10] Armenakas, A. E., Influence of Initial Stress on the Vibrations of Simply Supported Circular Cylindrical Shells, AIAA J., 2(1964), p. 1607.
- [11] Arnold, R. N., Warburton, G. B., The Flexural Vibrations of Thin Cylinders, Inst. Mech. Eng., Ser A, (1953), p. 62.
- [12] Ashton, J. E., Free Vibration of Linearly Tapered Clamped Plates, ASCE, J. Eng. Mech. Div., 95(1969), p. 497.
- [13] Bacok M. D., Bert C. W., Unsymmetric Free Vibrations of Orthotropic Sandwich Shells of Revolution, AIAA J., 5(1967), 3, p. 413.
- [14] Baker, W.E., Axisymmetric Modes of Vibration of Thin Spherical Shell, J. Acoust. Soc. Amer., 33(1961), 12, p. 1749.
- [15] Baron, M. L., Bleich, H. H., Tables for Frequencies & Modes of Free Vibration of Infinitely Long Thin Cylindrical Shells, JAM, 21(1954), 2, p. 178.
- [16] Baron, M.L., Skalak, R., Free Vibrations of Fluid-Filled Cylindrical Shells, Proc. ASCE, J. Eng. Mech. Div., 88(1962), EMS, p. 17.
- [17] Bartlett, C.C., The Vibration and Buckling of a Circular Plate Clamped on Part of Its Boundary and Simply Supported on the Remainder, Quart. J. Mech., Appl. Math., 16(1963), 4, p. 431.
- [18] Barton, M. V., Vibration of Rectangular and Skew Cantilever Plates, JAM,

- 18(1951), 1, p. 129.
- [19] Bathe, K. J., Solution Methods for Large Generalized Eigenvalue Problems in Structural Engineering, Dep. Civil. Eng., Univ. Calif., (1971).
- [20] Bathe, K. J., Wilson, E. L., Numerical Methods in Finite Element Analysis, Prentice-Hall, Inc., (1976).
- [21] Bert, C. W., Egle, D. M., Dynamics of Composite, Sandwich and Stiffened Shell-type Structures, J. Space & Rock, 6(1969), 12, p.1345.
- [22] Bleich, H. H., Dimaggio, F., A strain-Energy Expression for Thin Cylindrical Shells, JAM, 20(1953), 3, p. 448.
- [23] Bleich, H. H., Baron, M. L., Free and Forced Vibrations of an Infinitely Long Cylindrical Shell in an Infinite Acoustic Medium, JAM, 21(1954), 2, p.167.
- [24] Blevins, R. D., Formulas for Natural Frequency and Mode Shape, Van Nostrand Reinhold Company, New York, (1979).
- [25] Bodine, R. Y., The Fundamental Frequencies of a Thin Flat Plate Simply Supported Along a Circle of Arbitrary Radius, JAM, 26(1959), p.666.
- [26] Boley, G.A., Barber, A.D., Dynamic Response of Beams and Plates to Rapid Heating, JAM, 24(1957), p.413.
- [27] Bolotin, V.V., An Asymptotic Method for the Study of the Problem of Eigenvalue for Rectangular Regions, Problems of Continuum Mechanics, (1961).
- [28] Boussinesq, J., Application des Potentials, Paris, (1885).
- [29] Bozich, W.F., The Vibration and Buckling Characteristics of Cylindrical Shells Under Axial Load and External Pressure, AFFDL-TR-67-28, (1967).
- [30] Bushnell, D., Axisymmetric Dynamic Response of a Ring-Supported Cylinder to Time-Dependent Loads, J. Space. Rockets, 3(1966).9, p.1369.
- [31] Bushnell, D., Analysis of Buckling and Vibration of Ring-Stiffened, Segmented Shells of Revolution, Int. J. Solids & Struct., 6(1970), 1, p.157.
- [32] Bycroft, G. N., Frequencies of a Flexible Circular Plate Attached to the Surface of a Light Elastic Half-Space, JAM, 26(1959), 1, p.13.
- [33] Cao Zhi yuan, Cheung, Y. K., Dynamic Analysis of Prismatic Structures Embedded in Infinite Soil Medium, Proc. of 5-th Inter. Conf. on Numer. Meth. in Geomechanics, vol 3, (1985), p.1441.
- [34] Carmichael, T. E., The Vibration of a Rectangular Plate with Edges Elastically Restrained Against Rotation, Quart. J. Mech. Appl. Math., 12(1959), 1, p.29.
- [35] Carslaw, H. S., Faeger, F. C., Conduction of Heating Solids, Oxford, (1947).
- [36] Chen, Y. N., Kempner, J., Modal Method for Free Vibrations of Oval Cylindrical Shells with Simply Supported or Clamped Ends, JAM, 45(1978), 1, p.142
- [37] Cheung, Y. K., Cao Zhiyuan, Wu, S. Y., Dynamic Analysis of Prismatic Structures Surrounded by An Infinite Fluid Medium, Earth. Eng. & Struct. Dyn., vol. 13, (1985), 3, p. 351.
- [38] Chia, C. Y., Nonlinear Analysis of Plates, Mc Graw-Hill, Inc., (1980).
- [39] Chopra, I., Durvasula, S., Vibration of Simply-Supported Trapezoidal Plates,

- J. Sound & Vib., 20(1972), 2, p. 125.
- [40] Chopra, I., Durvasula, S., Vibration of Simply-Supported Trapezoidal Plates, J. Sound & Vib., 19(1971), 4, p. 379.
- [41] Christensen, R. M., Vibration of a 45° Right Triangular Cantilevered Plate by a Gridwork Method, AIAA J., 1(1963), 8, p.1790.
- [42] Chu, H., Herrmann, G., Influence of Large Amplitudes on Free Flexural Vibrations of Rectangular Elastic Plates, JAM, 23(1956), 4, p. 532.
- [43] Chu, H. N., On Simple Thickness Vibrations of thin Sandwich Cylinders, JAM, 28(1961), 1, p. 145.
- [44] Claassen, R. W., Vibrations of Skew Cantilever Plates, AIAA J., 1(1963), p. 1222.
- [45] Clough, R. W., Johnson, C. P., A Finite Element Approximation for the Analysis of thin Shells, Inter.J. Solids and Struct., 4(1968), p.42.
- [46] Cohen, H., Hondelman, G., Vibrations of a Rectangular Plate with Distributed Added Mass, J. Franklin Inst., 261(1956), 3, p.319.
- [47] Colwell, R. C., The Vibrations of a Circular Plate, J. Franklin Inst., 213 (1932), p. 373.
- [48] Conway, H. D., Farnham, K. A., The Free Flexural Vibrations of Triangular, Rhombic and Parallelogram Plates, Inter. J. Mech. Sci., 7(1965), p. 811.
- [49] Conway, H. D., Some Special Solutions for the Flexural Vibration of Discs of Varying Thickness, Ingr.-Arch., 26(1958), 6, p. 408.
- [50] Conway, H. D., Analogies Between the Buckling and Vibration of Polygonal Plates and Membranes, Can. Aeron. J., 6(1960), 7, p.263.
- [51] Conway, H. D., The Bending, Buckling and Vibration of Simply Supported Polygonal Plates by Point-Matching, JAM, 28(1961), 2, p.288.
- [52] Cox, H.L, Klein, B., Fundamental Frequencies of Clamped Triangular Plates, J. Acous. Soc. Amer., 27(1955), 2, p. 266.
- [53] Cox, H. L., Klein, B., Buckling and Vibration of Isosceles Triangular Plates Having the two Equal Edges Clamped and the Other Edge Simply-Supported, J. Roy. Aero. Soc., 59(1955), p. 151.
- [54] Cox, H. L., Klein, B., Vibrations of Isosceles Triangular Plates Having the Base Clamped and Other Edges Simply-Supported, Aero. Quart., 7(1956), 3, p. 221.
- [55] Cox, H. L., Boxer, J., Vibration of Rectangular Plates Point-Supported at the Corners, Aero. Quart., 11(1960), 1, p. 41.
- [56] Cox, H. L., Vibration of a Square Plate, Point Supported at Midpoints of Sides, J. Acoust. Soc. Amer., 27(1955), 1, p.791.
- [57] Cox, H. L., Morland, L. W., Dynamic Plastic Deformations of Simply-Supported Square Plates, J. Mech. Phys. Solids, 7(1959), 4, p. 229.
- [58] Das, Y. C., Navaratna, D. R., Vibrations of a Rectangular Plate with Concentrated Mass, Spring and Dashpot, JAM, 30(1963), 1, p. 31.
- [59] Das, Y. C., On the Transverse Vibrations of Rectangular Isotropic Plates, J. Aeron. Soc. India, 13(1961), 4, p. 111.
- [60] Desilva, C. N., Axisymmetric Vibrations of Thin Elastic Shells, J. Acoust.

- Soc. Amer., 36(1964), 4, p. 666.
- [61] Dickinson, S. M., The Flexural Vibration of Rectangular Orthotropic Plates, JAM, 36(1969), p. 101.
- [62] Di Giovanni, R. P., Dugundji, J., Vibrations of Freely-Supported Orthotropic Cylindrical Shells Under Internal Pressure, AD 617269, (1965).
- [63] Donea, J., Advanced Structural Dynamics, Appl. Sci. Publ. LTD, (1980).
- [64] Dong, S. B., Free Vibration of Laminated Orthotropic Cylindrical Shells, J. Acoust. Soc. Amer., 44(1968), 6, p. 1628.
- [65] Dong, S. B., Pister, K. S., Taylor, R. L., On the Theory of Laminated Anisotropic Shells and Plates, J. Aero.Sci., 29(1962), p. 969.
- [66] Donnell, L. H., Stability of Thin Walled Tubes Under Torsion, NACA Rept., No. 479, (1933).
- [67] Donnell, L. H., Beams, Plates and Shells, McGraw-Hill, (1976).
- [68] Donnell, L. H., Discussion, JAM, 13(1946), p. 246.
- [69] Dreher, J. F., Axisymmetric Vibration of Thin Conical Shells, Proc. 4-th Southwestern Conf. on Theor. and App. Mech., (1968), p. 163.
- [70] Dugger, T. V., Stress Analysis and Vibrations of Elastic Bodies, Heywood, (1964).
- [71] Eikrem, A. K., Dodge, A. G., Natural Frequencies of a Hemispherical Shell, Exp. Mech., 12(1972), p. 575.
- [72] Evensen, D. A., Nonlinear Flexural Vibrations of Thin-walled Circular Cylinders, NASA TND-4090, (1967).
- [73] Euler, L., De motu vibratorio tympanorum, Comment. Acad. Petropolit., (1766), 10, p.243.
- [74] Faddeeva, V.N., Computational Methods of Linear Algebra, Dover Publ. Inc., (1959).
- [75] Federhofer, K., Eigenschwingungen der Kegelschale, Inger. Arch., 9(1938), p.288.
- [76] Felgar, R.P., Formulas for Integrals Containing Characteristic Functions of a Vibrating Beam, Univ. of Texas Circular No.14, (1950).
- [77] Fertis, D.G., Dynamics and Vibration of Structures, John Wiley & Sons, (1973).
- [78] Fletcher, H.J., Woodfield, N., Larsen, K., Natural Frequencies of Plates with Opposite Edges Supported, AD 107224, (1956).
- [79] Flugge, W., Stress in Shells, Springer-Verlag, (1962).
- [80] Flugge, W., Statik und Dynamik der Schalen, Springer-Verlag, (1962).
- [81] Flugge, W., Handbook of Engineering Mechanics, McGraw-Hill, (1962).
- [82] Forsberg, K., A Review of Analytical Methods Used to Determine the Modal Characteristics of Cylindrical Shells, NASA CR-613, (1966).
- [83] Fox, L., An introduction to Numerical Algebra, Clarendon Press, (1966).
- [84] Fung, Y. C., Sechler, E. E., Kaplan, A., On the Vibration of Thin Cylindrical Shells Under Internal Pressure, J. Aero. Sci., 24(1967), p. 650.
- [85] Garnet, H., Goldberg, M. A., Salerno, V. L., Torsional Vibrations of Shells of Revolution, JAM, 28(1961), 4, p. 571.
- [86] Garnet, H., Kempner, J., Axisymmetric Free Vibrations of Conical Shells,

- JAM., 31(1964), 3, p. 458.
- [87] Gershgorn, S., Vibrations of Plates Loaded by Concentrated Masses, Prikl. Math. Mekh., 1(1933), 1, p. 25.
- [88] Gonnkevich, V. S., Natural Vibrations of Plates and Shells, Nauk Dumka, (1964).
- [89] Gonnkevich, V. S., Natural Vibrations of Rising Cylindrical Shells, Trans. Acad. Nauk. URSR, (1962), 10, p. 27.
- [90] Gorman, D. J., Free Vibration Analysis of Rectangular Plates, Elsevier North Holland, Inc., (1982).
- [91] Gorman, D. J., Free Vibration Analysis of Cantilever Plates by the Method of Superposition, J. Sound Vib., 49(1976), p. 453.
- [92] Gourley, A. R., Computational Methods for Matrix Eigenproblems, John Wiley & Sons., (1973).
- [93] Greenspon, J. E., Vibrations of Gross-Stiffened and Sandwich Plates with Application to Underwater Sound Radiators, J. Acoust. Soc. Amer., 33(1961), 11, p. 1485.
- [94] Greenspon, J. E., Vibrations of Thick and Thin Cylindrical Shells Surrounded by water, J. Acoust. Soc. Amer., 33(1961), 10, p. 1321.
- [95] Greenspon, J. E., Vibrations of a Thick-walled Cylindrical Shell, J. Acoust. Soc. Amer., 32(1960), 5, p. 571.
- [96] Greenspon, J. E., Vibrations of Thick Shells in Vacuum, NR385, (1959).
- [97] Grinsted, B., Nodal Pattern Analysis, Proc. Inst. Mech. Eng., 166(1952), p. 309.
- [98] Hamada, M., Kondo, H., Fundamental Frequency of a Rhomboidal Plate with all Edges Clamped, Trans. JSME, 23(1957), 131, p. 522.
- [99] Handelman, G., Cohen, H., On the Effects of the Addition of Mass to Vibrating Systems, Proc. 9th Int. Congr. Appl. Mech., vol 7, (1957).p. 509.
- [100] Hasegawa, M., Vibration of Clamped Parallelogrammic Isotropic Flat Plates, J. Aeron. Sci., 24(1957), 2, p. 145.
- [101] Hearmon, R. F. S., The Frequency of Flexural Vibration of Rectangular Orthotropic Plates with Clamped or Supported Edges, JAM, 26(1959), 3-4, p. 357
- [102] Hegarty, R. F., Ariman, T., Elasto-Dynamic Analysis of Rectangular Plates with Circular Holes, Int. J. Solids & struct., 11(1975), p. 895.
- [103] Heki, K., Vibration of Cylindrical Shells, J. of the Inst. of Polytechniques, Osaka City Univ., 1(1957), 1, p. 101
- [104] Hencky, H., Über die Berücksichtigung der Schubverzerrungen in ebenen Platten, Ing-Arch., 16(1947), 1, p. 72.
- [105] Henrych, J., The Dynamics of Explosion and Its Use, Prague, (1979).
- [106] Herrmann, G., Mirsky, I., On Vibrations of Conical Shells, J. Aerospace Sci., 25(1958), p. 451.
- [107] Herrmann, G., Shaw, J., Vibration of Thin Shells under Initial Stress, J. Eng. Mech. Div., Proc. ASCE, 91(1965), EM5, p. 37.
- [108] Herrmann, G., The Influence of Initial Stress on the Dynamic Behavior of Elastic Plates, Pub. Inter. Ass. for Bridge and Struct. Eng., 16(1956), p.

275.

- [109] Holland, J., Finite Element Methods in Stress Analysis, Tapir, (1969).
- [110] Hoppmann, W. H., Huffington, N. J., Magness, L. S., A Study of Orthogonally Stiffened Plates, JAM, 23(1956), 3, p. 343.
- [111] Hoppmann, W. H., Some Characteristics of the Flexural Vibrations of Orthogonally Stiffened Cylindrical Shell, J. Acoust. Soc. Amer., 30(1958), 1, p. 77.
- [112] Hoppmann, W. H., Flexural Vibration of Orthogonally Stiffened Circular and Elliptical Plates, Proc. 3d U. S. Natl. Congr. Appl. Mech., (1958), p. 181.
- [113] Hoppmann, W. H., Frequencies of Vibration of Shallow Spherical Shells, JAM, 28(1961), 2, p. 305.
- [114] Hoppmann, W. H., Extensional Vibrations of Segment of Elastic Orthotropic Spherical Shell, Proc. 4-th U. S. Natl. Congr. Appl. Mech., vol 1, (1962), p. 215.
- [115] Hoppmann, W. H., Miller, C. E. Flexural Vibration of Shallow Orthotropic Spherical Shells, J. Acoust. Soc. Amer., 34(1962), 8, p1067.
- [116] Hrennikoff, A., Solution of Problems of Elasticity by the Framework Method, JAM, 8(1941), p. 169.
- [117] Hu, W. C. L., Wan, T., Vibrations of Ring-Stiffened Cylindrical Shells- An "Exact" Method, SWRI Proj. 02-1504, (1966) .
- [118] Huffington, N.J.Jr., Hoppmann, W.H., On the Transverse Vibrations of Rectangular Orthotropic Plates, JAM, 25 (1958) , 3, p.389.
- [119] Iguchi, S., Die Biegeschwingungen der Vierseitig eingespannten rechteckigen Platten, Ing.Arch., 1 (1937) , p157.
- [120] Jahanshahi, A., Equations of Motion of Spherical Shells, J. Acoust.Soc. Amer., 38 (1965) , 5, p.883.
- [121] Johns, D. J., Allwood, R.J.Vibration Studies of a Ring Stiffened Circular Cylindrical Shell, J.Sound & Vib., 8 (1968) , 1, P.147.
- [122] Johns, D.J.,Nataroja, R., Vibration of a Square Plate Symmetrically Supported at Four Points, J.Sound & Vib., 25 (1972) , P.75.
- [123] Johnson, M.W., Reissner, E., On Transverse Vibration of Shallow Spherical Shells, Quart. Appl. Math., 15(1958), 4, p. 367.
- [124] Kaczkowski, Z., Stabilität und Eigenschwingungen einer platte von der Form eines regelmassigen Polygows, Ingr. Arch., 15 (1961) , p.103.
- [125] Kalnins, A., Effect of Bending on Vibrations of Spherical Shells, J. Acoust. Soc. Amer., 36(1964), 1, p. 74.
- [126] Kalnins, A., Free Nonsymmetric Vibrations of Shallow Spherical Shells, Proc. 4-th U. S. National Congr. Appl. Mech., (1962), p. 225.
- [127] Kalnins, A., Kraus, H., Effect of Transverse Shear and Rotatory Inertia on Vibration of Spherical Shells, Proc. 5-th U.S. National Congr. Appl. Mech., (1966), p.134.
- [128] Kalnins, A., Vibrations of Beams, Plates and Shells, Mc Graw-Hill, (1976).
- [129] Kalnins, A., Free Vibration of Rotationally Symmetric Shells, J. Acoust.

- Soc. Amer., 36(1964), 7, p.1355.
- [130] Kamke, E., Differentialgleichungen, Leipzig, (1943).
  - [131] Kantham, C.L., Bending and Vibration of Elastically Restrained Circular Plates, J. Franklin Inst., 265, 6(1958), p.483.
  - [132] Keeffe, R.E., Natural Frequencies of Meridional Vibration in Thin Conical Shells, AIAA J., 2(1964), 10, p.1825.
  - [133] Kerstens, J.G.M., Vibration of a Rectangular Plate Supported at an Arbitrary Number of Points, J. Sound & Vib., 65(1979), 4, p.493.
  - [134] King, W.W., Lin Chien Chang, Applications of Bolotin's Method to Vibrations of Plates, AIAA J., 12(1974), 3, p.399.
  - [135] Kirchhoff, G.R., Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe, J.Math., 40(1850), p.216.
  - [136] Klein, B., Natural Frequencies of Constant Thickness Cantilever Triangular Plates of Arbitrary Planform, J.Roy. Aeron. Soc., 60(1956), 544, p.281.
  - [137] Klein, B., Vibration of Simply Supported Isosceles Trapezoidal Flat Plates, J.Acoust. Soc. Amer., 27(1955), 6, p.1059.
  - [138] Klosner, J.M., Free and Forced Vibrations of a Long Noncircular Cylindrical Shell, PIBAL Rept., No.561, (1960).
  - [139] Knowles, J.K., Reissner, E., A Derivation of the Equations of Shell Theory for General Orthogonal Coordinates, J.Math. Phys., 35(1957), p.351.
  - [140] Koplik, B., Yu, Y.Y., Approximate Solutions for Frequencies of Axisymmetric Vibrations of Spherical Caps, JAM, 34(1967), 3, p.785
  - [141] Kornecki, A., A Note on Beam-type Vibrations of Circular Cylindrical Shells, J. Sound. & Vib., 14(1971), 1, p.1.
  - [142] Krahn, E., Über eine von Rayleigh formulierte Minimaleigenschaft des Kreises, Math. Ann., 94(1925), p.97.
  - [143] Kratzer, A., Framz, W., Transzendente Funktionen, Geest Portig, (1960).
  - [144] Kraus, H., Thin Elastic Shells, John Wiley & Sons, Inc., (1967).
  - [145] Kromm, A., Verallgemeinerte Theorie der Plattenstatik, Ingr. Arch., 21 (1953), p. 266.
  - [146] Kumai, T., The Flexural Vibrations of a Square Plate with a Central Circular Hole, Proc. 2d Jap. Nat. Congr. Appl. Mech., (1952), p. 339.
  - [147] Kurt, C. E., Boyd, D. E., Free Vibrations of Noncircular Cylindrical Shell Segments, AIAA J., 9(1971), 2, p. 239.
  - [148] Lamb, H., On the Vibrations of a Spherical Shell, Proc.London Math. Soc., 14(1883)p. 50.
  - [149] Lamb, H., On the Vibrations of an Elastic Plate in Contact with Water, Proc. Roy. Soc., Ser. A, 98(1920), p. 205.
  - [150] Lamb, H., Hydrodynamics, Dover Publ., (1932),
  - [151] Lamb, H., On the Propagation of Tremors over the Surface of an Elastic Solid, Phil. Trans. Roy.Soc., A 203, (1904).
  - [152] Lanzan, B. J., Damping of Materials and Members in Structural Mechanics, Pergamon Press, Inc., (1968).
  - [153] Leissa, A. W., Vibration of Plates, NASA SP-160, (1969).

- (154) Leissa, A. W., *Vibration of Shells*, NASA SP-288, (1973).
- (155) Leissa, A. W., *The Free Vibration of Rectangular Plates*, *J. Sound & Vib.*, 31(1973), p. 257.
- (156) Leissa, A. W., *On the Nonlinear Strain-Curvature-Displacement Relationships for Thin Elastic Shells*, *J. Aerospace Sci.*, 29(1962), p. 1381.
- (157) Lemke, A., *Experimentelle Untersuchungen zur W. Ritzschen Theorie der Transversalschwingungen Quadratischer Platten*, *Ann. Physik*, 86(1928), 4, p. 717.
- (158) Librescu, L., *Elastostatics and Kinetics of Anisotropic and Heterogeneous Shell-type Structures*, Noordhoff, (1975).
- (159) Lindholm, U. S., *Breathing Vibrations of a Circular Cylindrical Shell with an Internal Liquid*, *J. Aerospace Sci.*, 29(1962), 9, p. 1052.
- (160) Livanov, K. K., *Axisymmetric Vibrations of Simply Supported Cylindrical Shells*, *J. Appl. Math. Mech.*, 25(1961), 4, p. 1095.
- (161) Lock, M. H., Whittier, J. S., Malcom, H. A., *Transverse Vibrations of a Shallow Spherical Dome*, *JAM*, 35(1968), p. 402.
- (162) Long, C. F., *Vibration of Radially Loaded Spherical Shell*, *Proc. ASCE J. Eng. Mech. Div.*, EM2, (1966), p. 235.
- (163) Love, A. E. H., *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Cambridge Univ. Press, (1892).
- (164) Love, A. E. H., *The Small Free Vibrations and Deformations of Thin Elastic Shell*, *Phil. Trans. Roy. Soc., Ser. A*, 179(1888), p. 491.
- (165) Lurie, H., *Lateral Vibrations as Related to Structural Stability*, *JAM*, 19(1952), 2, p. 195.
- (166) Lysmer, J., *A Computer Program for Approximate 3-D Analysis of Soil-Structure Interaction Problems*, EERC-75-30, (1975).
- (167) Magrab, E. B., *Vibrations of Elastic Structural Members*, Noordhoff, (1979).
- (168) Magrab, E. B., *Natural Frequencies of Elastically Supported Orthotropic Rectangular Plates*, *J. Acoust. Soc. Amer.*, 67(1977), p. 79.
- (169) Martin, R. E., *Free Vibrations of Anisotropic Conical Shells*, *AIAA J.*, 7(1969), 5, p. 960.
- (170) Martin, A. I., *On the Vibration of a Cantilever Plate*, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 9(1956), 1, p. 94.
- (171) Martin, C. J., *Vibrations of a Circular Elastic Plate Under Uniform Tension*, *Proc. 4-th U. S. Natl. Congr. Appl. Mech.*, (1962), p. 277.
- (172) Mazurkiewicz, Z., Suwalski, L., *Bending, Vibrations and Bucking of Shallow Cylindrical Shell with Variable Boundary Conditions*, *Bull. Acad. Polonaise Sci., Ser. Sci. Tech.*, 11(1963), 4, p. 171.
- (173) McIachlan, N. W., *Theory and Application of Mathieu Function*, Oxford Univ. Press, (1947).
- (174) McIachlan, N. W., *Vibrational Problems in Elliptical Coordinates*, *Quart. Appl. Math.*, 5(1947), 3, p. 289.
- (175) McIachlan, N. W., *The Accession to Inertia of Flexible Discs Vibrating in*



- a Fluid, Proc. Phys. Soc, 44(1932), p. 546.
- (176) McLachlan, N. W., Bessel Functions for Engineers, Oxford Univ. Press, (1948).
- (177) McNitt, R. R., Free Vibration of a Clamped Elliptical Plate, J. Aero. Sci., 29(1962), 9, p. 1124.
- (178) Miles, J. W., On Sloshing of Liquid in a Flexible Tank, JAM, 25(1958), 2, p. 277.
- (179) Mindlin, R. D., Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates, JAM, 18(1951), 1, p. 31.
- (180) Mindlin, R. D., Deresiewicz, H., Thickness-Shear and Flexural Vibrations of a Circular Disk, JAM, 21(1954), 10, p. 1329.
- (181) Mindlin, R. D., Schacknow, A., Deresiewicz, H., Flexural Vibrations of Rectangular Plates, JAM, 23(1956), 3, p. 430.
- (182) Minkaran, I. A., Hoppmann, W. H., Flexural Vibrations of Cylindrically Anisotropic Circular Plates, J. Acoust. Soc. Amer., 36(1964), 3, p. 470.
- (183) Mirsky, I., Herrmann, G., Axially Symmetric Motions of Thick Cylindrical Shell, JAM, 25(1958), 1, p. 97.
- (184) Morley, L. S. D., Skew Plates and Structures, Macmillan Co., Inc., (1963).
- (185) Mote, Jr. C. D., Theory of Thermal Natural Frequency Variations in Disks, Int. J. Mech. Sci., 8(1966), p. 547.
- (186) Munakata, K., On the Vibration and Elastic Stability of a Rectangular Plate Clamped at its Four Edges, J. Math. Phys., 31(1952), 1, p. 69.
- (187) Mushmari, K. M., On the Stability of Cylindrical Shells Subjected to Torsion, Trudy. Kaziavais, (1938).
- (188) Nadai, A., Die Elastische Platten, Julius Springer, (1925).
- (189) Nagaraja, T. V., Effect of Tip Removal Upon the Frequency of Natural Vibrations of Triangular Plates, J. Sci. Ind. Res., 20(1961), 5, p. 193.
- (190) Nagaraja, T. V., Rao, S. S., Vibration of Rectangular Plates, J. Aeron. Sci., 20(1953), 12, p. 855.
- (191) Naghdi, P. M., Kalnins, A., On Vibrations of Elastic Spherical Shells, JAM, 29(1962), 1, p. 65.
- (192) Naghdi, P. M., On the Theory of Thin Elastic Shell, Quart. Appl. Math., 14(1957), 4, p. 369.
- (193) Naghdi, P. M., Berry, J. G., On the Equations of Motion of Cylindrical Shells, JAM, 21(1964), 2, p. 160.
- (194) Naghdi, P. M. A Survey of Recent Progress in the Theory of Elastic Shells, Appl. Mech. Rev., 9(1956), 9, p. 365.
- (195) Naghdi, P. M., Cooper, R. M., Propagation of Elastic waves in Cylindrical Shells, Including the Effects of Transverse Shear and Rotatory Inertia, J. Acoust. Soc. Amer., 28(1956), 1, p. 56.
- (196) Nair, P. S., Durvasula, S., Vibration of Skew Plates, J. Sound & Vib., 26(1973), 1, p. 1.
- (197) Naruoka, M., Yonezawa, H., A Study of the Period of the Free Lateral Vibration of the Beam Bridge by the theory of the Orthotropic Rectangular

- Plate, Ingr. Arch., 26(1958), 1, p. 20.
- (198) Nash, W. A., Bending of an Elliptical Plate by Edge Loading, JAM, 17(1950), 3, p. 269.
- (199) Navaratna, D. R., Natural Vibrations of Deep Spherical Shells, AIAA J., 4(1966), 11, p. 2056.
- (200) Nowacki, W., Dynamics of Elastic Systems, John Wiley & Sons, Inc., (1963).
- (201) Ota, T., Fundamental Frequencies of Simply Supported but Partially Clamped Square Plates, Bull. JSME, 6(1963), 23, p.397.
- (202) Ota, T., Hamada, M., Fundamental Frequencies of an Isosceles Triangular Plate, Bull. JSME, 4(1961), 15, p.478.
- (203) Panc, V., Verschärfte Theorie der Elastischen Platte, Ing.-Arch., 33(1964), 6, p.351.
- (204) Peake, W.H., The Lowest Resonant Frequency of a Water-Loaded Circular Plate, J. Acoust. Soc. Amer., 26(1954), 2, p.166.
- (205) Pickett, G., JoGa-Rao, C.V., Vibrations of Plates of Irregular Shapes and Plates with Holes, J. Aeron. Soc. India, 13(1961), 3, p.83.
- (206) Pister, K.S., Flexural Vibration of Thin Laminated Plates, J. Acoust. Soc. Amer., 31 (1959), 2, p.233.
- (207) Pnueli, D., Lower Bounds to the Gravest and All Higher Frequencies of Homogeneous Vibrating Plates of Arbitrary Shape, JAM, 42(1975), 4, p.815.
- (208) Polya, G., Torsional Rigidity, Principal Frequency, Electrostatic Capacity and Symmetrization, Quar. Appl. Math., 6(1948), p.267.
- (209) Przemieniecki, T.S., Theory of Matrix Structural Analysis, McGraw-Hill Book Company, (1968).
- (210) Ralston, A. and Wilf, H.S., Mathematical Methods for Digital Computers, John Wiley & Sons. (1960).
- (211) Rao, S.S., Vibrations of Annular Plates Including the Effects of Rotatory Inertia and Transverse Shear Deformation, J. Sound Vib., 42(1975), p.305.
- (212) Rao, H.V.S.G., Vibration Analysis of Grid-Works, Shock Vib. Digest, 8(1976), 9, p.25.
- (213) Raju, P.N., Vibrations of Annular Plates, J. Aeron. Soc. India, 14(1962), p.37.
- (214) Rayleigh, J.W.S., Theory of Sound, vol1, Dover Publ.Inc., (1945).
- (215) Rayleigh, L., On the Nodal Lines of a Square Plate, Phil. Mag., Ser. 4, 46(1873), 304, p.166.
- (216) Rayleigh, L., Note on the Free Vibrations of an Infinitely Long Shell, Proc. Roy. Soc., 45(1889), p.443.
- (217) Reed, R.E.Jr., Comparison of Methods in Calculating Frequencies of Corner-Supported Rectangular Plates, NASA TND-3030, (1965).
- (218) Reismann, H., Tendorf, Z.A., Dynamics of Initially Stressed Plates, JAM, 43(1979), 6, p.304.
- (219) Reismann, H., Padlog, J., Forced Axi-Symmetric Motions of Cylindrical Shells, J. Frank. Inst., 284(1967), 5, p.308

- (220) Reismann, H., Medige, J., Forced Motion of Cylindrical Shells, Proc. ASCE, J. Eng. Mech., 94(1968), EM5, p.1167.
- (221) Reissner, E., Note on the Method of Complementary Energy, J. Math. Phys., 27 (1948), p.159.
- (222) Reissner, E., A New Derivation of the Equations of the Deformation of Elastic Shells, Amer. J. Math., 63(1942), 1, p.177.
- (223) Reissner, E., Stavsky, Y., Bending and Stretching of Certain Types of Heterogeneous Anisotropic Elastic Plates, JAM, 28(1961), 3, p.402.
- (224) Reissner, E., The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates, JAM, 12(1945), p.69.
- (225) Reissner, E., On Axis-Symmetrical Vibrations of Circular Plates of Uniform Thickness, Including the Effects of Transverse Shear Deformation and Rotatory Inertia, J. Acoust. Soc. Amer., 26(1954), 2, p.252.
- (226) Reissner, E., On Transverse Vibrations of Thin Shallow Elastic Shells, Quart. Appl. Math., 13(1955), p.169.
- (227) Ritz, W., Theorie der Transversalschwingungen einer quadratischen Platte mit freien Randern, Ann. Phys., 28(1909), p.737.
- (228) Ritz, W., Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik, J. Reine Angewandte Mathematik, 135(1908), p.131.
- (229) Roberson, R.E., Transverse Vibrations of a Free Circular Plate Carrying Concentrated Mass, JAM, 18(1951), 3, p.280, p.349.
- (230) Ross, E.W., Asymptotic Analysis of the Axisymmetric Vibration of Shells, JAM, 33(1966), 1, p.85.
- (231) Ruzicka, J.E., Structural Damping, ASME, (1959).
- (232) Sanders, J.L., An Improved First Approximation Theory for Thin Shells, NASA-TR-R24, (1959).
- (233) Sanders, J.L., Nonlinear Theories for Thin Shells, Quart. Appl. Math., 21 (1963), 1, p.21.
- (234) Sakharov, I.E., Natural Vibrations Frequencies of Annular Plates, Izv. AN SSSR, OTN, (1957), 5, p.107.
- (235) Seide, P., Small Elastic Deformations of Thin Shells, Noord. Inter. Publ., (1975).
- (236) Seth, B.R., Transverse Vibration of Rectilinear Plates, Proc. Indian Acad. Sci., A25(1947), p.25.
- (237) Sharma, C.B., Vibration Characteristics of a Clamped-Free and Clamped-Ring-Stiffened Circular Cylindrical Shell, J. Sound & Vib., 14(1971), p.459.
- (238) Smith, B.L., Haft, E.E., Natural Frequencies of Clamped Cylindrical Shells, AIAA J., 6(1968), 4, p.720.
- (239) Soedel, W., A Natural Frequency Analogy Between Spherically Curved Panels and Flat Plates, J. Sound Vib., 29(1973), p.457.
- (240) Soedel, W., Vibrations of Shells and Plates, Marcel Dekker, Inc., (1981).
- (241) Soedel, W., A General Dirac Delta Function Method for Calculating the Vibration Response of Plate to loads along Arbitrarily Curved Lines, J. Sound Vib., 65(1979), 1, p.29.

- (242) Srinives, S., Joga Rao, C.V., Rao, A.K., An Exact Analysis for Vibration of Simply-Supported Homogeneous and Laminated Thick Rectangular Plates, *J. Sound & Vib.*, 12(1970), p.187.
- (243) Stanisic, M.M., Dynamic Response of a Diagonal Line-Loaded Rectangular Plate, *AIAA.J.*, 15(1979), 12, p.1804.
- (244) Szilared, R., Theory and Analysis of Plates, Prentice-Hall, Ins, (1974).
- (245) Takanashi, S., Vibration of Rectangular Plates with Circular Holes, *Bull. JSME*, 1(1958), 4, p.380.
- (246) Tang, S.C., Response of a Finite Tube to Moving Pressure, *Proc. ASCE, J. Eng. Mech. Div.*, 93(1967), EM3, p.239.
- (247) Tang, C.T., The Vibration Modes and Eigenfrequencies of Circular Conical Shells, *Scientia Sinica*, 13(1964), 8, p.1189.
- (248) Temple, G., The Accuracy of Rayleigh's Method of Calculating the Natural Frequencies, *Proc. Roy. Soc., Ser A*, 211(1952), p.204.
- (249) Timoshenko, S., Young, D.H., Weaver, W.Jr, Vibration Problems in Engineering, 4-th ed., John Wiley & Sons., Inc., (1974).
- (250) Timoshenko S., On the Correction for Shear of the Differential Equations for Transverse Vibrations of Prismatic Bars, *Phil. Mag.*, 41(1921), 6, p.742.
- (251) Timoshenko, S., Theory of Plates and Shells, Mc Graw-Hill, (1959).
- (252) Troitsky, M.S., Stiffened Plates Bending, Stability and Vibrations, Elsevier Scientific Publishing Company, (1976)
- (253) Tsydzik, P.V., Application of the Perturbation Method to Solve Problems of the Natural Vibrations of Nearly Rectangular Plates, *Prikl. Mat. Mekh*, 16(1952), 3, p.108.
- (254) Turner, M.J., Clough, R.W., Martin, G.C., Topp, L.J., Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures, *J. Aeron. Sci.*, 23(1956), p.805.
- (255) Unger, E.E., Response of Plates to Moving Shocks, *Aero/Space Engng*, 20(1961), , 3, p16.
- (256) Vinson, J.R., Chou, T.W., Composite Materials and Their Use in Structures, Appl. Sci. Publ.LTD, (1945).
- (257) Vogel, S.M., Skinner, D.W., Natural Frequencies of Transversely Vibrating of Uniform Annular Plates, *JAM*, 32(1965), 4, p.926
- (258) Volterra, E., Dynamics of Vibrations, Charles E. Merrill Books, (1965).
- (259) Wah, T., Large Amplitude Flexural Vibration of Rectangular Plates, *Int. J. Mech. Sci.*, 5(1963), p.425.
- (260) Wah, T., Calcote, L.R., Structural Analysis by Finite Difference Calculus, Van Nostrand Reinhold, (1970)
- (261) Walton, W.C., Applications of a General Finite-Difference Method for Calculating Bending Deformations of Plates, *NASA TND-536*, (1960) .
- (262) Wan, T., Vibration of Circular Plates, *ASA*, 34(1962), 3, p.275.
- (263) Warburton, G.B., Vibration of Thin Cylindrical Shells, *J.Mech. Eng. Sci*, 7 (1965), p.399.
- (264) Warburton, G.B., Dynamical Behaviour of Structures, Pergamon Press, (1976).
- (265) Warburton, G.B., The Vibration of Rectangular Plates, *Proc. Inst. Mech. Eng.*,

- Ser. A, 68(1954), 12, p.371.
- (266) Warburton, G.B., Higgs, J., Natural Frequencies of Thin Cantilever Cylindrical Shells, *J. Sound & Vib.*, 11(1970), 3, p.335.
- (267) Washizu, K., On the Variational Principles of Elasticity and Plasticity, MIT Rep.25-18, (1955).
- (268) Watson, G.A. A Treatise on Theory of Bessel Functions, 2nd ed., Cambridge of the Univ. Press, (1962)
- (269) Webster, J.J., Free Vibrations of Shells of Revolution Using Ring Finite Elements, *Intern. J. Mech. Sci.*, 9(1967), p.559.
- (270) Weingarten, V.I., Free Vibrations of Ring-Stiffened Conical Shells, *AIAA J.* 3(1965), &, p.1475.
- (271) Weingarten, V.I., Free Vibrations of Conical Shells, *Proc. ASCE, J. Eng. Mech. Div.*, 91(1965), EM4, p.69.
- (272) Weingarten, V.I., Gelman, A.P., Free Vibrations of Cantilevered Conical Shells, *Proc. ASCE, J. Eng. Mech. Div.*, 93(1967), EM6, p.127.
- (273) Weingarten, V.I., The Effect of Internal or External Pressure on the Free Vibrations of Conical Shells, *Int. J. Mech. Sci.*, 8(1966), p.115.
- (274) Werster, J.J., Free Vibration of Rectangular Curved Panels, *Intern. J. Mech. Sci.*, 10(1968), 7, p.571.
- (275) Westmann, R.A., A Note on Free Vibrations of Triangular and Sector Plates, *J. Aerospace Sci.*, 29(1962), 9, p.1139.
- (276) White, J.C., The Flexural Vibrations of Thin Laminated Cylinders, *Trans. ASME, J. Eng. Industr.*, 83(1961), 4, p.397.
- (277) Wilken, I.D., Soedel, W., Simplified Prediction of the Modal Characteristics of Ring-Stiffened Cylindrical Shells, *J. Sound & Vib.*, 44(1976), p.577.
- (278) Wilkinson, J.H., The Algebraic Eigenvalue Problem, Oxford Univ. Press, (1965).
- (279) Wilkinson, J.P., Natural Frequencies of Closed Spherical Shells, *J. Acoust. Soc. Amer.*, 38(1965), p.367.
- (280) Yamaki, N., Influence of Large Amplitudes on Vibrations of Plates, *ZAMM*, 41(1961), p.501.
- (281) Yang, P.C., Norris, C.H., Stavsky, Y., Elastic Wave Propagation in Heterogeneous Plates, *Inter. J. Solids and Struct.*, 2(1966), 4, p.665.
- (282) Young, D., Vibration of Rectangular Plates by the Ritz Method, *JAM*, 17 (1950), 4, p.448.
- (283) Yu, Y.Y., Free Vibrations of Thin Cylindrical Shells Having Finite Lengths with Freely Supported and Clamped Edges, *JAM*, 22(1955), 4, p.547.
- (284) Yu, Y.Y., Flexural Vibrations of Elastic Sandwich Plates, *J. Aeron. Sci.*, (1960), p.273.
- (285) Yu, Y.Y., Vibrations of Elastic Sandwich Cylindrical Shells, *J.AM*, 27(1960), 4, p.653.
- (286) Zienkiewicz, O.C., The Finite Element Method, 3d ed., McGraw-Hill Book Company, (1977).
- (287) Бабаков, И.М., Теория Колебаний, Гостехиздат, (1958).

- (288) Власов, В.З., Общая Теория Облочек. и ее Приложений в Технике, Госгехиздат, (1949).
- (289) Власов, В.Ф., Об Уравнениях Теории Изгиба Пластинок, Изв.АН СССР, ОТН, 12(1957), p.57.
- (290) Голденвейзер, А.И., Теории Упругих Тонких Оболочек, Гостехиздат, (1953).
- (291) Григорьев, З.И., О Малых Колебаниях Тонких Упругих Конических Оболочек, Изв. АН СССР, ОТН, (1956), 6, p.83.
- (292) Лейбензон, Л.С., Вариационные Методы Решения Задач Теории Упругости, Изд.Акад.Наук.СССР, (1951) .
- (293) Лурье, А.П., Общая Теория Упругих Тонких Оболочек, Прик.Матем.и Механ., 4 (1940) , 2, p.7.
- (294) Михелия, С.Р., Интегральные уравнения и их Приложения к Некоторым Проблемам Механики, ОГИЗ, (1949) .
- (295) Муштари, Х.М., Галимов, К.З., Нелинейная Теория Упруги Оболочек,Татнефтеиздат, (1957) .
- (296) Новожилов, В.В., О Погрешности Гипотез Кирхгофа в Теории Оболочек, Прик.Матем.и Механ, 7 (1943) , 5, p.334
- (297) Новожилов, В.В., Теория Тонких Оболочек, Судпромгиз, (1962) .
- (298) Огибалов, П.М., Изгиб, Устойчивость и Колебаний Пластинок, Изд.Моск. Уни-та, (1958) .
- (299) Огибалов, П.М., Вопросы Динамика и Устойчивость Оболочек,Изд.Моск. Уни-та, (1963) .
- (300) Ойнашвили, О.Д., Некоторые Динамические Задачи Теории Оболочек, Изд.Акад.Наук, СССР, (1957) .
- (301) Сахаров, И.Е., Уравнения Колебаний Ортогональных Пологих Сферических и Конических Оболочек, Изв.АН СССР, Мех.и Машин., (1960) , 5, p154.
- (302) Слепов, Б.И., Колебания и Устойчивость Эллиптической Оболочки,Изв.А-Н СССР, Мех.и Машин, (1964) , 3,p.144.
- (303) 小理查特, 伍兹, 小富尔, 土与基础的振动, 中国建筑工业出版社, (1976) .
- (304) 王仁等, 中国力学学会第一次极限分析及塑性理论学术会论文选集, 科学出版社, (1965) .
- (305) 王竹溪, 郭敦仁, 特殊函数概论, 科学出版社, (1965).
- (306) 王光远, 建筑结构的振动, 科学出版社, (1973).
- (307) 马广宗等, 船舶振动基础与实用计算, 人民交通出版社, (1981).
- (308) 中川宽治等, 工程振动学, 上海科技出版社, (1981).
- (309) 比格斯, 结构动力学, 人民交通出版社, (1982).
- (310) 北京力学所, 夹层板壳的弯曲、稳定与振动, 科学出版社, (1977).
- (311) 刘先志, 机械振动学导论, 山东人民出版社, (1962)
- (312) 刘宗贤, 曹志远, 钢板混凝土平板结构的动力分析, 建筑结构学报, 5(1984), 4, p.30.
- (313) 华东水利学院, 弹性力学问题的有限单元法, 水利电力出版社, (1975).
- (314) 列赫尼茨基, 各向异性板, 科学出版社, (1963).
- (315) 李大潜等, 有限元素法续讲, 科学出版社, (1979).
- (316) 李国豪, 刚塑性和弹塑性薄板的动力学问题的近似解法, 同济大学科研报告集, 抗爆结构理论(1), (1963), p.37.
- (317) 李国豪, 桥梁结构稳定与振动, 人民铁道出版社, (1962).

- [318] 李国豪, 工程结构抗震动力学, 上海科技出版社, (1980).
- [319] 严人觉等, 动力基础的半空间理论概论, 中国建筑工业出版社, (1981).
- [320] 克劳夫, 彭津, 结构动力学, 科学出版社, (1981).
- [321] 郑兆昌, 机械振动, 机械工业出版社, (1983).
- [322] 郑哲敏, 马宗魁, 悬臂梁在一侧受有液体作用时的自由振动, 力学学报, 3(1959), 2, p.111.
- [323] 居荣初, 曾心傅, 弹性结构与液体的耦联振动理论, 地震出版社, (1983).
- [324] 胡海昌, 论弹性力学与受范性体力学中的一般变分原理, 物理学报, 10(1954), 3, p.259.
- [325] 胡海昌, 关于弹性固有频率的两个变分原理, 力学学报, 1(1957), 2, p.169.
- [326] 胡海昌, 弹性力学的变分原理及其应用, 科学出版社, (1981).
- [327] 柯劳塞克, 工程结构动力学, 人民交通出版社, (1980).
- [328] 倪明士, 弹性薄板与网格梁, 科技出版社, (1958).
- [329] 菲利波夫, 弹性系统的振动, 建筑工业出版社, (1959).
- [330] 格哈利, 结构分析, 中国铁道出版社, (1978).
- [331] 曹志浩, 矩阵特征值问题, 上海科技出版社, (1980).
- [332] 曹志远等, 厚板动力学理论及其应用, 科学出版社, (1983).
- [333] 曹志远, 张佑启, 结构与内流体相互作用问题的半解析方法, 应用数学与力学, 6(1985), 1, p.1.
- [334] 曹志远, 杨昇田, 对矩形厚板动力分析精确解一般表达式的探讨, 科学通报, 23(1978), 10, p.627.
- [335] 曹志远, 复合板件的等效非经典理论解, 固体力学学报, (1981), 4, p.477.
- [336] 曹志远, 刘宗贤, 箱形板动力计算的解析公式, 力学与实践, 4(1982), 2, p.40.
- [337] 曹志远, 张耀勤, 夹层板与复合材料板振动分析的有限厚板条, 振动与冲击, (1982), 4, p.1.
- [338] 曹志远, 厚壁构件的动力弹塑性分析, 地震工程与工程振动, 1(1981), 2, p.49.
- [339] 曹志远, 结构分析的非经典弯曲理论及其应用, 力学与实践, 3(1981), 4, p.2.
- [340] 曹志远, 高层建筑空间结构动力分析的拟厚板解, 土木工程学报, 5(1982), 4, p.43.
- [341] 曹志远, 张耀勤, 纤维增强及匀质层层叠板动力分析的解析与半解析方法, 航空学报, 4(1983), 3, p.36.
- [342] 曹志远, 杨昇田, 在爆炸冲击波作用下钢筋混凝土厚板的塑性设计计算, 爆炸与冲击, (1982), 1, p.85.
- [343] 曹志远, 平板网架建筑结构分析的非经典理论解, 建筑结构学报, 4(1983), 3, p.28.
- [344] 曹志远, 各向异性弹性厚板的振动, 上海力学, 4(1983), 2, p.66.
- [345] 曹志远, 翟桐, 桩上共同作用静力分析的半解析无限元法, 计算结构力学及其应用, 2(1985), 3, p.19.
- [346] 曹志远, 张佑启, 翟桐, 结构-外流体动力相互作用的半解析方法, 力学学报, 17(1985), 5, p.389.
- [347] 曹志远, 钢板混凝土平板的动态塑性分析, 土木工程学报, 18(1985), 4, p.14.
- [348] 曹志远, 张耀勤, 有限厚条法及其应用, 固体力学学报, (1985), 2, p.263.
- [349] 曹志远, 张佑启, 结构与介质分析的半解析元法, 力学与实践, 7(1985), 6, p.9.
- [350] 曹志远, 厚板的振动方程, 地震工程与工程震动, 1(1981), 1, p.78.
- [351] 曹志远, 建筑结构动塑性设计计算的等效静弹法, 建筑结构, (1986), 1, p.47.
- [352] 曹国雄, 弹性矩形薄板振动, 中国建筑工业出版社, (1983).
- [353] 张佑启, 结构分析的有限条法, 人民交通出版社, (1980).
- [354] 张耀勤, 曹志远, 用有限厚条法计算弹性厚板振动, 上海力学, (1982), 1, p.34.
- [355] 张福范, 弹性薄板, 科学出版社, (1984).

- [356] 斯米尔诺夫, 杆系、平板及壳体计算方法, 中国铁道出版社, (1982)。
- [357] 杨升田, 曹志远, 地下结构与岩体动力相互作用的一种解析解, 应用数学与力学, 4(1983), 6, p. 861
- [358] 杨耀乾, 平板理论, 中国铁道出版社, (1980)。
- [359] 杨耀乾, 薄壳理论, 中国铁道出版社, (1984)。
- [360] 杨桂通等, 塑性动力学, 清华大学出版社, (1984)。
- [361] <数学手册>编写组, 数学手册, 人民教育出版社, (1979)。
- [362] 塞尔瓦杜雷, 土与基础相互作用的弹性分析, 建筑工业出版社, (1984)。
- [363] 翟桐, 曹志远, 内爆炸荷载作用下地下竖井的动力响应, 爆炸与冲击, 5(1985), 3, p.13。
- [364] 钱令希等, 论固体力学中的极限分析并建议一个一般变分原理, 中国科学, (1964), 11, p.1763。
- [365] 钱伟长, 变分法与有限元(上册), 科学出版社, (1980)
- [366] 钱培风, 结构动力学, 中国工业出版社, (1964)。
- [367] 太田友弥, 浜田实, 部分的に固定された支持边を持つ正方形板の基本振動数, 日本機械学会論文集, 28(1963), 194, p.1244。
- [368] 竹内洋一郎, 热応力, 日新出版, (1971)。
- [369] 栖原寿郎, 钢板とコンクリートカウ構成されるサンドイツチ式複合構造物の強度に関する研究, 日本造船学会論文集, (1977), 141, p.135。



## 附录 I 梁函数及其积分

## 一、梁函数

表 I.1

边界条件		$X_m(x)$
$X=0$	$X=a$	
简支	简支	$\sqrt{2} \sin \frac{m\pi}{a} x$
固定	固定	$(\operatorname{ch} \alpha_m x - \cos \alpha_m x) - C_m (\operatorname{Sh} \alpha_m x - \sin \alpha_m x)$
自由	自由	$X_1=1, X_2=\sqrt{3}\left(1-\frac{2x}{a}\right), X_m=(\operatorname{ch} \alpha_m x + \cos \alpha_m x) - C_m (\operatorname{sh} \alpha_m x + \sin \alpha_m x) (m>2)$
固定	简支	$(\operatorname{ch} \alpha_m x - \cos \alpha_m x) - C_m (\operatorname{sh} \alpha_m x - \sin \alpha_m x)$
固定	自由	$(\operatorname{ch} \alpha_m x - \cos \alpha_m x) - C_m (\operatorname{sh} \alpha_m x - \sin \alpha_m x)$
自由	简支	$X_1=\sqrt{3}\left(1-\frac{x}{a}\right), X_m=(\operatorname{ch} \alpha_m x + \cos \alpha_m x) - C_m (\operatorname{sh} \alpha_m x + \sin \alpha_m x) (m>1)$

说明: (1)  $\alpha_m$  见表 I.4, (2)  $C_m$  见表 I.2, (3)  $Y_n(y)$  类似。

## 二、梁函数系数

表 I.2

边界条件		$C_m$						一般公式
$X=0$	$X=a$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m \geq 6$	
简支	简支	—	—	—	—	—	—	—
固定	固定	0.982502	1.000777	0.999966	1.000001	1.000000	1.000000	$\frac{\operatorname{ch} \alpha_m a - \cos \alpha_m a}{\operatorname{sh} \alpha_m a - \sin \alpha_m a}$
自由	自由	—	—	0.982502	1.000777	0.999966	1.000000	$\frac{\operatorname{ch} \alpha_m a - \cos \alpha_m a}{\operatorname{sh} \alpha_m a - \sin \alpha_m a}$
固定	简支	1.000777	1.000001	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	$\frac{\operatorname{ch} \alpha_m a + \cos \alpha_m a}{\operatorname{sh} \alpha_m a + \sin \alpha_m a}$
固定	自由	0.734096	1.018467	0.999224	1.000034	0.999999	1.000000	$\frac{\operatorname{ch} \alpha_m a + \cos \alpha_m a}{\operatorname{sh} \alpha_m a + \sin \alpha_m a}$
自由	简支	—	1.000777	1.000001	1.000000	1.000000	1.000000	$\frac{\operatorname{ch} \alpha_m a + \cos \alpha_m a}{\operatorname{sh} \alpha_m a + \sin \alpha_m a}$

说明: (1) 更进一步精确值可按一般公式计算, (2)  $\alpha_m a$  见表 I.4, (3)  $Y_n(y)$  与  $C_n$  类似。

## 三、梁频率方程

表 1.3

边界条件		频率方程
$x=0$	$x=a$	
简支	简支	$\sin \alpha a = 0$
固定	固定	$\operatorname{ch} \alpha a \times \cos \alpha a = 1$
自由	自由	$\operatorname{ch} \alpha a \times \cos \alpha a = 1$
固定	简支	$\operatorname{th} \alpha a = \operatorname{tg} \alpha$
固定	自由	$\operatorname{ch} \alpha a \times \cos \alpha a = -1$
自由	简支	$\operatorname{th} \alpha a = \operatorname{tg} \alpha a$

说明: (1) 频率方程之根 $(\alpha a)_m$ 见表 1.4。(2)  $(ab)$ 方程类似。

## 四、梁频率系数

表 1.4

边界条件		$\alpha_m a = (\alpha a)_m$					
$x=0$	$x=a$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m \geq 6$
简支	简支	$\pi$	$2\pi$	$3\pi$	$4\pi$	$5\pi$	$m\pi$
固定	固定	4.73004	7.85320	10.9956	14.1372	17.2786	$(2m+1)\frac{\pi}{2}$
自由	自由	0	0	4.73004	7.85320	10.9956	$(2m-3)\frac{\pi}{2}$
固定	简支	3.92660	7.06858	10.2102	13.3518	16.4934	$(4m+1)\frac{\pi}{4}$
固定	自由	1.87510	4.69409	7.85476	10.9955	14.1372	$(2m-1)\frac{\pi}{2}$
自由	简支	0	3.92660	7.06858	10.2102	13.3518	$(4m-3)\frac{\pi}{4}$

说明: (1) 更进一步精确值可按表 1.3 频率方程计算。(2)  $\alpha_m b = (\alpha b)_m$  类似。

## 五、常用的梁函数及其导数积分值

表 1.5

边界条件		$H_{m,n} = a \int_0^a (X_n')^2 dX$					
$x=0$	$x=a$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m \geq 6$
简支	简支	$\pi^2$	$4\pi^2$	$9\pi^2$	$16\pi^2$	$25\pi^2$	$m^2\pi^2$
固定	固定	12.3062	46.0501	98.9048	171.586	263.998	$(m+\frac{1}{2})\pi[(m+\frac{1}{2})\pi-2]$
自由	自由	0	12.0000	49.4808	108.925	186.867	$(m-\frac{3}{2})\pi[(m-\frac{3}{2})\pi+6]$
固定	简支	11.1539	42.8162	94.0342	164.925	255.581	$(m+\frac{1}{4})\pi[(m+\frac{1}{4})\pi-1]$
固定	自由	4.64778	32.4174	77.2989	142.901	228.133	$(m-\frac{1}{2})\pi[(m-\frac{1}{2})\pi+2]$
自由	简支	3.00000	26.8724	71.0903	134.875	218.332	$(m-\frac{3}{4})\pi[(m-\frac{3}{4})\pi+3]$

说明: (1) 更进一步精确值可按公式 (1.6) 计算。

(2)  $K_{m,n} = b \int_0^b (Y_n')^2 dy$  类似。

表 1.6

边界条件		$E I_m = a \int_0^a X_m X_m' dX$					
$x=0$	$x=a$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m \geq 6$
简支	简支	$-\pi^2$	$-4\pi^2$	$-9\pi^2$	$-16\pi^2$	$-25\pi^2$	$-m^2\pi^2$
固定	固定	-12.3062	-46.0501	-98.9048	-171.586	-263.908	$-\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi\left[\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi-2\right]$
自由	自由	0	0	-12.3062	-46.0501	-98.9048	$-\left(m-\frac{3}{2}\right)\pi\left[\left(m-\frac{3}{2}\right)\pi-2\right]$
固定	简支	-11.1539	-42.8162	-94.0342	-164.925	-255.581	$-\left(m+\frac{1}{4}\right)\pi\left[\left(m+\frac{1}{4}\right)\pi-1\right]$
固定	自由	0.858238	-13.2943	-45.9042	-98.9182	-171.584	$-\left(m-\frac{1}{2}\right)\pi\left[\left(m-\frac{1}{2}\right)\pi-2\right]$
自由	简支	0	-11.1539	-42.8162	-94.0342	-164.925	$-\left(m-\frac{3}{4}\right)\pi\left[\left(m-\frac{3}{4}\right)\pi-1\right]$

说明: (1) 更进一步精确值可按公式 (1.10) 计算。

(2)  $F_{..} = b \int_0^a Y_{..} Y_{..}' dy$  类似。

## 六、梁函数及其导数的积分公式

说明: (1) 考虑到两端简支梁函数及其导数的积分是一些简单三角函数积分, 就不再列出。

(2) 下列各式 I 之右上标符号各代表相应边界条件梁之值:

CC: 固定-固定梁

FF: 自由-自由梁

CS: 固定-简支梁

CF: 固定-自由梁

FS: 自由-简支梁

(3) 公式中  $C_m$ ,  $(\alpha a)_m$  值分别见表 I.2, 表 I.4。

(4) 自由-自由梁函数的各公式中  $m, i > 2$ ; 自由-简支梁函数的各公式中  $m, i > 1$ 。

(5)  $Y_n(y)$ ,  $Y_i(y)$  及其导数积分公式类似。

$$1. \quad I_{1m} = \frac{1}{a} \int_0^a X_m dx$$

$$I_{1m}^{CC} = \frac{2C_m}{(\alpha a)_m} [1 - (-1)^m]$$

$$I_{1m}^{FF} = 0$$

$$I_{1m}^{CS} = \frac{1}{(\alpha a)_m} [(-1)^{m+1} \sqrt{C_m^2 + 1} - \sqrt{C_m^2 - 1} + 2C_m]$$

$$I_{1m}^{CF} = \frac{2C_m}{(\alpha a)_m}$$

$$I_{1m}^{FS} = \frac{1}{(\alpha a)_m} [(-1)^m \sqrt{C_m^2 + 1} - \sqrt{C_m^2 - 1}]$$

(1.1)

$$2. \quad I_{2m} = \int_0^a \frac{dX_m}{dx} dx$$

$$\begin{aligned}
I_{2m}^{CC} &= I_{2m}^{CS} = 0 \\
I_{2m}^{FF} &= -2[(-1)^m + 1] \\
I_{2m}^{CF} &= (-1)^{m+1} 2 \\
I_{2m}^{FS} &= -2
\end{aligned} \tag{I.2}$$

$$3. \quad I_{3m} = a \int_0^a \frac{d^2 X_m}{dx^2} dx$$

$$\begin{aligned}
I_{3m}^{CC} &= 0 \\
I_{3m}^{FF} &= 2C_m(\alpha a)_m [1 - (-1)^m] \\
I_{3m}^{CS} &= (\alpha a)_m [(-1)^m \sqrt{C_m^2 + 1} - \sqrt{C_m^2 - 1}] \\
I_{3m}^{CF} &= (-1)^{m+1} 2C_m(\alpha a)_m \\
I_{3m}^{FS} &= (\alpha a)_m [(-1)^{m+1} \sqrt{C_m^2 + 1} - \sqrt{C_m^2 - 1} + 2C_m]
\end{aligned} \tag{I.3}$$

$$4. \quad I_{4m} = a^2 \int_0^a \frac{d^3 X_m}{dx^3} dx$$

$$\begin{aligned}
I_{4m}^{CC} &= -2(\alpha a)_m^2 [(-1)^m + 1] \\
I_{4m}^{FF} &= I_{4m}^{FS} = 0 \\
I_{4m}^{CS} &= I_{4m}^{CF} = -2(\alpha a)_m^2
\end{aligned} \tag{I.4}$$

$$5. \quad I_{5m} = \frac{1}{a} \int_0^a (X_m)^2 dx$$

$$I_{5m}^{CC} = I_{5m}^{FF} = I_{5m}^{CS} = I_{5m}^{CF} = I_{5m}^{FS} = 1 \tag{I.5}$$

$$6. \quad I_{6m} = a \int_0^a \left( \frac{dX_m}{dx} \right)^2 dx$$

$$\begin{aligned}
I_{6m}^{CC} &= C_m(\alpha a)_m [C_m(\alpha a)_m - 2] \\
I_{6m}^{FF} &= C_m(\alpha a)_m [C_m(\alpha a)_m + 6] \\
I_{6m}^{CS} &= C_m(\alpha a)_m [C_m(\alpha a)_m - 1] \\
I_{6m}^{CF} &= C_m(\alpha a)_m [C_m(\alpha a)_m + 2] \\
I_{6m}^{FS} &= C_m(\alpha a)_m [C_m(\alpha a)_m + 3]
\end{aligned} \tag{I.6}$$

$$7. \quad I_{7m} = a^2 \int_0^a \left( \frac{d^2 X_m}{dx^2} \right)^2 dx$$

$$I_{7m}^{CC} = I_{7m}^{FF} = I_{7m}^{CS} = I_{7m}^{CF} = I_{7m}^{FS} = (\alpha a)_m^4 \tag{I.7}$$

$$8. \quad I_{8m} = a^3 \int_0^a \left( \frac{d^3 X_m}{dx^3} \right)^2 dx$$

$$\begin{aligned}
I_{8m}^{CC} &= C_m(\alpha a)_m^5 [C_m(\alpha a)_m + 6] \\
I_{8m}^{FF} &= C_m(\alpha a)_m^5 [C_m(\alpha a)_m - 2] \\
I_{8m}^{CS} &= C_m(\alpha a)_m^5 [C_m(\alpha a)_m + 3] \\
I_{8m}^{CF} &= C_m(\alpha a)_m^5 [C_m(\alpha a)_m + 2] \\
I_{8m}^{FS} &= C_m(\alpha a)_m^5 [C_m(\alpha a)_m - 1]
\end{aligned} \tag{I.8}$$

$$9. \quad I_{9m} = \int_0^a X_m \frac{dX_m}{dx} dx$$

$$\begin{aligned}
I_{9m}^{CC} &= I_{9m}^{FF} = I_{9m}^{CS} = 0 \\
I_{9m}^{CF} &= 2 \\
I_{9m}^{FS} &= -2
\end{aligned} \tag{I.9}$$

$$\begin{aligned}
 10. \quad I_{10m} &= a \int_0^a X_m \frac{d^2 X_m}{dx^2} dx \\
 I_{10m}^{CC} &= I_{10m}^{FF} = I_{10m}^{CS} = C_m(aa)_m [2 - C_m(aa)_m] \\
 I_{10m}^{CS} &= I_{10m}^{FS} = C_m(aa)_m [1 - C_m(aa)_m]
 \end{aligned} \tag{I.10}$$

$$\begin{aligned}
 11. \quad I_{11m} &= a^2 \int_0^a X_m \frac{d^3 X_m}{dx^3} dx \\
 I_{11m}^{CC} &= I_{11m}^{FF} = 0 \\
 I_{11m}^{CS} &= (aa)_m^2 [(-1)^m \sqrt{C_m^4 - 1} - C_m^2] \\
 I_{11m}^{CF} &= -2C_m^2(aa)_m^2 \\
 I_{11m}^{FS} &= (aa)_m^2 [C_m^2 - (-1)^m \sqrt{C_m^4 - 1}]
 \end{aligned} \tag{I.11}$$

$$\begin{aligned}
 12. \quad I_{12m} &= a^2 \int_0^a \frac{dX_m}{dx} \frac{d^2 X_m}{dx^2} dx \\
 I_{12m}^{CC} &= I_{12m}^{FF} = 0 \\
 I_{12m}^{CS} &= (aa)_m^2 [C_m^2 - (-1)^m \sqrt{C_m^4 - 1}] \\
 I_{12m}^{CF} &= 2C_m^2(aa)_m^2 \\
 I_{12m}^{FS} &= (aa)_m^2 [(-1)^m \sqrt{C_m^4 - 1} - C_m^2]
 \end{aligned} \tag{I.12}$$

$$\begin{aligned}
 13. \quad I_{13m} &= a^3 \int_0^a \frac{dX_m}{dx} \frac{d^3 X_m}{dx^3} dx \\
 I_{13m}^{CC} &= I_{13m}^{FF} = I_{13m}^{CS} = I_{13m}^{CF} = I_{13m}^{FS} = -(aa)_m^4
 \end{aligned} \tag{I.13}$$

$$\begin{aligned}
 14. \quad I_{14m} &= a^4 \int_0^a \frac{d^2 X_m}{dx^2} \frac{d^3 X_m}{dx^3} dx \\
 I_{14m}^{CC} &= I_{14m}^{FF} = I_{14m}^{FS} = 0 \\
 I_{14m}^{CS} &= I_{14m}^{CF} = -2(aa)_m^4
 \end{aligned} \tag{I.14}$$

$$\begin{aligned}
 15. \quad I_{15m_i} &= \frac{1}{a} \int_0^a X_m X_i dx \quad (m \neq i) \\
 I_{15m_i}^{CC} &= I_{15m_i}^{FF} = I_{15m_i}^{CS} = I_{15m_i}^{CF} = I_{15m_i}^{FS} = 0
 \end{aligned} \tag{I.15}$$

$$\begin{aligned}
 16. \quad I_{16m_i} &= a \int_0^a \frac{dX_m}{dx} \frac{dX_i}{dx} dx \quad (m \neq i) \\
 I_{16m_i}^{CC} &= \frac{4(aa)_m^2(aa)_i^2 [C_m(aa)_m - C_i(aa)_i]}{(aa)_i^4 - (aa)_m^4} [(-1)^{m+i} + 1] \\
 I_{16m_i}^{FF} &= \frac{4(aa)_m(aa)_i [C_m(aa)_i^3 - C_i(aa)_m^3]}{(aa)_i^4 - (aa)_m^4} [(-1)^{m+i} + 1] \\
 I_{16m_i}^{CS} &= \frac{4(aa)_m^2(aa)_i^2}{(aa)_i^4 - (aa)_m^4} [C_m(aa)_m - C_i(aa)_i] \\
 I_{16m_i}^{CF} &= \frac{4(aa)_m(aa)_i}{(aa)_i^4 - (aa)_m^4} \{ (-1)^{m+i} [C_m(aa)_i^3 - C_i(aa)_m^3] - (aa)_m(aa)_i [C_i(aa)_i - C_m(aa)_m] \} \\
 I_{16m_i}^{FS} &= \frac{4(aa)_m(aa)_i}{(aa)_i^4 - (aa)_m^4} [C_m(aa)_i^3 - C_i(aa)_m^3]
 \end{aligned} \tag{I.16}$$

$$\begin{aligned}
 17. \quad I_{17m_i} &= a^3 \int_0^a \frac{d^2 X_m}{dx^2} \frac{d^2 X_i}{dx^2} dx \quad (m \neq i) \\
 I_{17m_i}^{CC} &= I_{17m_i}^{FF} = I_{17m_i}^{CS} = I_{17m_i}^{CF} = I_{17m_i}^{FS} = 0
 \end{aligned} \tag{I.17}$$

$$18. \quad I_{18m,i} = a^5 \int_0^a \frac{d^3 X_m}{dx^3} \frac{d^3 X_i}{dx^3} dx \quad (m \neq i)$$

$$I_{18m,i}^{CC} = \frac{4(aa)_m^3(aa)_i^3[C_m(aa)_i^3 - C_i(aa)_m^3]}{(aa)_i^4 - (aa)_m^4} [(-1)^{m+i} + 1]$$

$$I_{18m,i}^{FF} = \frac{4(aa)_m^4(aa)_i^4[C_m(aa)_m - C_i(aa)_i]}{(aa)_i^4 - (aa)_m^4} [(-1)^{m+i} + 1]$$

$$I_{18m,i}^{CS} = \frac{4(aa)_m^3(aa)_i^3}{(aa)_i^4 - (aa)_m^4} [C_m(aa)_i^3 - C_i(aa)_m^3]$$

$$I_{18m,i}^{CF} = \frac{4(aa)_m^3(aa)_i^3}{(aa)_i^4 - (aa)_m^4} \{ (-1)^{m+i}(aa)_m(aa)_i [C_m(aa)_m + C_i(aa)_i] \\ + [C_m(aa)_i^3 - C_i(aa)_m^3] \}$$

$$I_{18m,i}^{FS} = \frac{4(aa)_m^4(aa)_i^4}{(aa)_i^4 - (aa)_m^4} [C_m(aa)_m - C_i(aa)_i]$$

(I.18)

$$19. \quad I_{19m,i} = \int_0^a \frac{dX_m}{dx} X_i dx \quad (m \neq i)$$

$$I_{19m,i}^{CC} = \frac{4(aa)_m^2(aa)_i^2}{(aa)_i^4 - (aa)_m^4} [1 - (-1)^{m+i}]$$

$$I_{19m,i}^{FF} = \frac{4(aa)_m^4}{(aa)_i^4 - (aa)_m^4} [1 - (-1)^{m+i}]$$

$$I_{19m,i}^{CS} = \frac{(aa)_m(aa)_i}{(aa)_i^4 - (aa)_m^4} \{ -(-1)^{m+i} [(aa)_m^2 + (aa)_i^2] \sqrt{(C_m^2+1)(C_i^2+1)} \\ + (-1)^i [(aa)_i^2 - (aa)_m^2] \sqrt{(C_m^2-1)(C_i^2+1)} \\ - (-1)^m [(aa)_i^2 - (aa)_m^2] \sqrt{(C_m^2+1)(C_i^2-1)} \\ + [(aa)_m^2 + (aa)_i^2] \sqrt{(C_m^2-1)(C_i^2-1)} + 4(aa)_m(aa)_i \}$$

$$I_{19m,i}^{CF} = \frac{4(aa)_m^2}{(aa)_i^4 - (aa)_m^4} [(aa)_i^2 - (-1)^{m+i}(aa)_m^2]$$

$$I_{19m,i}^{FS} = \frac{(aa)_m(aa)_i}{(aa)_i^4 - (aa)_m^4} \{ -(-1)^{m+i} [(aa)_m^2 + (aa)_i^2] \sqrt{(C_m^2+1)(C_i^2+1)} \\ - (-1)^i [(aa)_i^2 - (aa)_m^2] \sqrt{(C_m^2-1)(C_i^2+1)} \\ + (-1)^m [(aa)_i^2 - (aa)_m^2] \sqrt{(C_m^2+1)(C_i^2-1)} \\ + [(aa)_m^2 + (aa)_i^2] \sqrt{(C_m^2-1)(C_i^2-1)} + \frac{4(aa)_m^3}{(aa)_i} \}$$

(I.19)

$$20. \quad I_{20m,i} = a \int_0^a \frac{d^2 X_m}{dx^2} X_i dx \quad (m \neq i)$$

$$I_{20m,i}^{CC} = \frac{4(aa)_m^2(aa)_i^2[C_i(aa)_i - C_m(aa)_m]}{(aa)_i^4 - (aa)_m^4} [1 + (-1)^{m+i}]$$

$$I_{20m,i}^{FF} = \frac{4(aa)_m^4[C_i(aa)_i - C_m(aa)_m]}{(aa)_i^4 - (aa)_m^4} [1 + (-1)^{m+i}]$$

$$I_{20m,i}^{CS} = \frac{4(aa)_m^2(aa)_i^2}{(aa)_i^4 - (aa)_m^4} [C_i(aa)_i - C_m(aa)_m]$$

$$I_{20m,i}^{CF} = \frac{4(aa)_m^2[C_i(aa)_i - C_m(aa)_m]}{(aa)_i^4 - (aa)_m^4} [(-1)^{m+i}(aa)^2m + (aa)_i^2]$$

$$I_{20m}^{FS} = \frac{4(aa)_m^4}{(aa)_i^4 - (aa)_m^4} [C_i(aa)_i - C_m(aa)_m] \quad (1.20)$$

$$21. \quad I_{21m} = a^2 \int_0^a \frac{d^3 X_m}{dx^3} X_i dx \quad (m \neq i)$$

$$I_{21m}^{CC} = \frac{4(aa)_m^3(aa)_i^3 C_m C_i}{(aa)_i^4 - (aa)_m^4} [(-1)^{m+i} - 1]$$

$$I_{21m}^{FF} = \frac{4(aa)_m^5(aa)_i C_m C_i}{(aa)_i^4 - (aa)_m^4} [(-1)^{m+i} - 1]$$

$$I_{21m}^{CS} = \frac{(aa)_m^3(aa)_i^3}{(aa)_i^4 - (aa)_m^4} \{ (-1)^{m+i} [(aa)_m^2 + (aa)_i^2] \sqrt{(C_m^2+1)(C_i^2+1)} \\ + (-1)^m [(aa)_i^2 - (aa)_m^2] \sqrt{(C_m^2+1)(C_i^2-1)} \\ + (-1)^i [(aa)_i^2 - (aa)_m^2] \sqrt{(C_m^2-1)(C_i^2+1)} \\ + [(aa)_m^2 + (aa)_i^2] \sqrt{(C_m^2-1)(C_i^2-1)} - 4C_m C_i (aa)_i^2 \}$$

$$I_{21m}^{CF} = \frac{4(aa)_m^3(aa)_i C_m C_i}{(aa)_i^4 - (aa)_m^4} [(-1)^{m+i} (aa)_m^2 - (aa)_i^2]$$

$$I_{21m}^{FS} = \frac{(aa)_m^3(aa)_i}{(aa)_i^4 - (aa)_m^4} \{ (-1)^{m+i} [(aa)_m^2 + (aa)_i^2] \sqrt{(C_m^2+1)(C_i^2+1)} \\ - (-1)^m [(aa)_i^2 - (aa)_m^2] \sqrt{(C_m^2+1)(C_i^2-1)} \\ - (-1)^i [(aa)_i^2 - (aa)_m^2] \sqrt{(C_m^2-1)(C_i^2+1)} \\ + [(aa)_m^2 + (aa)_i^2] \sqrt{(C_m^2-1)(C_i^2-1)} - 4C_m C_i (aa)_i^2 \} \quad (1.21)$$

$$22. \quad I_{22m} = a^2 \int_0^a \frac{d^2 X_m}{dx^2} \frac{dX_i}{dx} dx \quad (m \neq i)$$

$$I_{22m}^{CC} = \frac{4(aa)_m^3(aa)_i^3 C_m C_i}{(aa)_i^4 - (aa)_m^4} [1 - (-1)^{m+i}]$$

$$I_{22m}^{FF} = \frac{4(aa)_m^5(aa)_i C_m C_i}{(aa)_i^4 - (aa)_m^4} [1 - (-1)^{m+i}]$$

$$I_{22m}^{CS} = \frac{(aa)_m^3(aa)_i}{(aa)_i^4 - (aa)_m^4} \{ -(-1)^{m+i} [(aa)_m^2 + (aa)_i^2] \sqrt{(C_m^2+1)(C_i^2+1)} \\ - (-1)^i [(aa)_i^2 - (aa)_m^2] \sqrt{(C_m^2-1)(C_i^2+1)} \\ - (-1)^m [(aa)_i^2 - (aa)_m^2] \sqrt{(C_m^2+1)(C_i^2-1)} \\ - [(aa)_m^2 + (aa)_i^2] \sqrt{(C_m^2-1)(C_i^2-1)} + 4C_m C_i (aa)_i^2 \}$$

$$I_{22m}^{CF} = \frac{4(aa)_m^3(aa)_i C_m C_i}{(aa)_i^4 - (aa)_m^4} [(aa)_i^2 - (-1)^{m+i} (aa)_m^2]$$

$$I_{22m}^{FS} = \frac{(aa)_m^3(aa)_i}{(aa)_i^4 - (aa)_m^4} \{ -(-1)^{m+i} [(aa)_m^2 + (aa)_i^2] \sqrt{(C_m^2+1)(C_i^2+1)} \\ + (-1)^m [(aa)_i^2 - (aa)_m^2] \sqrt{(C_m^2+1)(C_i^2+1)} \\ + (-1)^i [(aa)_i^2 - (aa)_m^2] \sqrt{(C_m^2-1)(C_i^2+1)} \\ - [(aa)_m^2 + (aa)_i^2] \sqrt{(C_m^2-1)(C_i^2-1)} + 4C_m C_i (aa)_i^2 \} \quad (1.22)$$

$$23. \quad I_{23m} = a^2 \int_0^a \frac{d^3 X_m}{dx^3} \frac{dX_i}{dx} dx \quad (m \neq i)$$

$$I_{23m}^{CC} = I_{23m}^{FF} = I_{23m}^{CS} = I_{23m}^{CF} = I_{23m}^{FS} = 0 \quad (1.23)$$

$$24. \quad I_{24m} = a^4 \int_0^1 \frac{d^3 X_m}{dx^3} \frac{d^3 X_i}{dx^3} dx \quad (m \neq i)$$

$$I_{24m}^{CC} = \frac{4(aa)_m^3(aa)_i^3}{(aa)_i^4 - (aa)_m^4} [1 - (-1)^{m+i}]$$

$$I_{24m}^{FF} = \frac{4(aa)_m^4(aa)_i^4}{(aa)_i^4 - (aa)_m^4} [1 - (-1)^{m+i}]$$

$$I_{24m}^{CS} = \frac{(aa)_m^3(aa)_i^3}{(aa)_i^4 - (aa)_m^4} \left\{ -(-1)^{m+i} [(aa)_m^2 + (aa)_i^2] \sqrt{(C_m^2+1)(C_i^2+1)} \right. \\ \left. + (-1)^m [(aa)_i^2 - (aa)_m^2] \sqrt{(C_m^2+1)(C_i^2-1)} \right. \\ \left. - (-1)^i [(aa)_i^2 - (aa)_m^2] \sqrt{(C_m^2-1)(C_i^2+1)} \right. \\ \left. + [(aa)_m^2 + (aa)_i^2] \sqrt{(C_m^2-1)(C_i^2-1)} - \frac{4(aa)_m^3}{(aa)_i} \right\}$$

$$C_{24m}^{CF} = \frac{4(aa)_m^4(aa)_i^3}{(aa)_i^4 - (aa)_m^4} [(aa)_m^2 - (-1)^{m+i}(aa)_i^2]$$

$$I_{24m}^{FS} = \frac{(aa)_m^3(aa)_i^3}{(aa)_i^4 - (aa)_m^4} \left\{ -(-1)^{m+i} [(aa)_m^2 + (aa)_i^2] \sqrt{(C_m^2+1)(C_i^2+1)} \right. \\ \left. - (-1)^m [(aa)_i^2 - (aa)_m^2] \sqrt{(C_m^2+1)(C_i^2-1)} \right. \\ \left. + (-1)^i [(aa)_i^2 - (aa)_m^2] \sqrt{(C_m^2-1)(C_i^2+1)} \right. \\ \left. + [(aa)_m^2 + (aa)_i^2] \sqrt{(C_m^2-1)(C_i^2-1)} + 4(aa)_m(aa)_i \right\} \quad (I.24)$$

### 参 考 资 料

- [1] 曹志远, 杨昇田, 厚板动力学理论及其应用, 科学出版社, (1983).
- [2] Young, D., Vibration of Rectangular Plates by the Ritz Method, JAM, 17, 4(1950), p.448.
- [3] Felgar, R.P., Formulas for Integrals Containing Characteristic Functions of a Vibrating Beam, University of Texas Circular No.14, (1950).
- [4] Flugge, W., Handbook of Engineering Mechanics, McGraw Hill, (1962).



## 附录 II 单向厚板振型函数

说明:

(1) 公式中符号意义及说明见 § 8.3。

(2) 实际单向厚板振型函数  $W_n(y)$  与  $\Phi_n(y)$  间还有一比例常数, 在应用于求解厚板振动分析中没有意义, 这里就没有列出。

(3) 表 II.1 中所列振型函数中的一些系数见表 II.2 中相应行中公式。

(4) 表 II.1、表 II.2 中  $\alpha_{1n}$ ,  $\alpha_{0n}$  值为表 II.3 所列频率方程的第  $n$  阶根。

## 一、单向厚板振型函数

表 II.1

边界条件		$W_n(y)$	$\Phi_n(y)$
$y=0$	$y=b$		
简支	简支	$\sin \alpha_{0n} y$	$\cos \alpha_{0n} y$
固定	固定	$\operatorname{ch} \alpha_{1n} y + \frac{\alpha_{1n}}{\alpha_{0n}} \xi_n \eta_n \operatorname{sh} \alpha_{1n} y - \cos \alpha_{0n} y - \eta_n \sin \alpha_{0n} y$	$\operatorname{ch} \alpha_{1n} y + \frac{\alpha_{0n} \xi_n}{\alpha_{1n} \xi_n} \operatorname{sh} \alpha_{1n} y - \cos \alpha_{0n} y + \xi_n \sin \alpha_{0n} y$
自由	自由	$\operatorname{ch} \alpha_{1n} y + \frac{\alpha_{1n}}{\alpha_{0n}} \delta_n \operatorname{sh} \alpha_{1n} y + \frac{1}{\xi_n} \cos \alpha_{0n} y + \delta_n \sin \alpha_{0n} y$	$\operatorname{ch} \alpha_{1n} y - \frac{\alpha_{0n}}{\alpha_{1n}} \delta_n \operatorname{sh} \alpha_{1n} y + \xi_n \cos \alpha_{0n} y + \frac{1}{\delta_n} \sin \alpha_{0n} y$
固定	简支	$\operatorname{ch} \alpha_{1n} y - \operatorname{cth} \alpha_{1n} b \cdot \operatorname{sh} \alpha_{1n} y - \cos \alpha_{0n} y + \operatorname{ctg} \alpha_{0n} b \cdot \sin \alpha_{0n} y$	$\operatorname{ch} \alpha_{1n} y + \frac{\alpha_{0n} \theta_n}{\alpha_{1n} \xi_n} \operatorname{sh} \alpha_{1n} y - \cos \alpha_{0n} y + \theta_n \sin \alpha_{0n} y$
简支	自由	$\frac{\alpha_{1n}}{\alpha_{0n}} \frac{\cos \alpha_{0n} b}{\operatorname{ch} \alpha_{1n} b} \operatorname{sh} \alpha_{1n} y + \sin \alpha_{0n} y$	$\frac{\alpha_{0n}}{\alpha_{1n}} \frac{\sin \alpha_{0n} b}{\operatorname{sh} \alpha_{1n} b} \operatorname{ch} \alpha_{1n} y + \cos \alpha_{0n} y$
固定	自由	$\operatorname{ch} \alpha_{1n} y - \frac{\alpha_{1n}}{\alpha_{0n}} \xi_n \mu_n \operatorname{sh} \alpha_{1n} y - \cos \alpha_{0n} y + \mu_n \sin \alpha_{0n} y$	$\operatorname{ch} \alpha_{1n} y + \frac{\alpha_{0n} \nu_n}{\alpha_{1n} \xi_n} \operatorname{sh} \alpha_{1n} y - \cos \alpha_{0n} y + \nu_n \sin \alpha_{0n} y$

## 二、振型函数系数

表 II.2

边界条件		振型函数系数
$y=0$	$y=b$	
固定	固定	$\eta_n = \frac{\cos \alpha_{0n} b - \operatorname{ch} \alpha_{1n} b}{\sin \alpha_{0n} b + \frac{\alpha_{1n}}{\alpha_{0n}} \xi_n \operatorname{sh} \alpha_{1n} b}, \quad \xi_n = \frac{\cos \alpha_{0n} b - \operatorname{ch} \alpha_{1n} b}{\sin \alpha_{0n} b + \frac{\alpha_{0n}}{\alpha_{1n} \xi_n} \operatorname{sh} \alpha_{1n} b}$
自由	自由	$\delta_n = \frac{\operatorname{ch} \alpha_{1n} b - \cos \alpha_{0n} b}{\frac{\alpha_{1n}}{\alpha_{0n}} \operatorname{sh} \alpha_{1n} b - \xi_n \sin \alpha_{0n} b}$
固定	简支	$\theta_n = - \frac{\frac{\alpha_{1n}}{\alpha_{0n}} \operatorname{sh} \alpha_{1n} b + \sin \alpha_{0n} b}{\frac{1}{\xi_n} \operatorname{ch} \alpha_{1n} b + \cos \alpha_{0n} b}$

续上表

边界条件		振型函数系数
$y=0$	$y=b$	
固定	自由	$\mu_n = \frac{\frac{\alpha_{0n}}{\alpha_{1n}} \operatorname{sh} \alpha_{1n} b - \sin \alpha_{0n} b}{\xi_n \operatorname{ch} \alpha_{1n} b + \cos \alpha_{0n} b}, \quad \nu_n = -\frac{\frac{\alpha_{1n}}{\alpha_{0n}} \operatorname{sh} \alpha_{1n} b + \sin \alpha_{0n} b}{\frac{1}{\xi_n} \operatorname{ch} \alpha_{1n} b + \cos \alpha_{0n} b}$
各种边界条件		$\xi_n = \frac{\alpha_{1n}^2 + \frac{b_0^2}{\lambda^2 b^2}}{\alpha_{1n}^2 + \frac{b_0^2}{\beta^2 \lambda^2 b^2}}, \quad b_{0n}^2 = \frac{\rho h}{D} b^4 \omega_n^2, \quad \lambda^2 = \frac{\rho h b^2}{\rho J}, \quad \beta^2 = \frac{G(1-\nu^2)}{k_n E}$

## 三、频率方程

表 II.3

边界条件		频率方程
$y=0$	$y=b$	
简支	简支	$\sin \alpha_n b = 0$
固定	固定	$2 - 2 \operatorname{ch} \alpha_n b \cos \alpha_n b + \frac{b_0}{\left(1 - \frac{b_0^2}{\beta^2 \lambda^4}\right)^{\frac{1}{2}}} \left[ \frac{b_0^2}{\lambda^6 \beta^2} \left(1 - \frac{1}{\beta^2}\right)^2 + \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{3}{\beta^2} - 1\right) \right] \operatorname{sh} \alpha_n b$ $\times \sin \alpha_n b = 0$
自由	自由	$2 - 2 \operatorname{ch} \alpha_n b \cos \alpha_n b + \frac{b_0}{\left(1 - \frac{b_0^2}{\beta^2 \lambda^4}\right)^{\frac{1}{2}}} \left[ \frac{b_0^2}{\lambda^6} \left(1 - \frac{1}{\beta^2}\right)^2 + \frac{1}{\lambda^2} \left(3 - \frac{1}{\beta^2}\right) \right] \operatorname{sh} \alpha_n b$ $\times \sin \alpha_n b = 0$
固定	简支	$\frac{\alpha_n}{\alpha_0} \xi \operatorname{th} \alpha_n b - \operatorname{tg} \alpha_0 b = 0$
简支	自由	$\frac{\alpha_n}{\alpha_0} \operatorname{th} \alpha_n b - \xi \operatorname{tg} \alpha_0 b = 0$
固定	自由	$2 + \left[ \frac{b_0^2}{\lambda^4} \left(1 - \frac{1}{\beta^2}\right)^2 + 2 \right] \operatorname{ch} \alpha_n b \cdot \cos \alpha_n b - \frac{b_0 \left(1 + \frac{1}{\beta^2}\right)}{\lambda^2 \left(1 - \frac{b_0^2}{\beta^2 \lambda^4}\right)^{\frac{1}{2}}} \operatorname{sh} \alpha_n b \cdot \sin \alpha_n b = 0$

## 参 考 资 料

- [1] 曹志远, 杨昇田, 厚板动力学理论及其应用, 科学出版社, (1983)。  
 [2] Hung, T.C., The Effect of Rotatory Inertia and Shear Deformation on the Frequency and Normal Mode Equations of Uniform Beams with Simple End Conditions, JAM, 28, 4(1961), p.579.

### 附录 III 矩形板的固有频率系数

说明:

(1) 矩形板的固有圆频率为

$$\omega_{mn} = \frac{\lambda_{mn}^2}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad (m, n = 1, 2, 3, \dots) \quad (\text{III.1})$$

式中,  $a$  为板的  $x$  方向长度,  $D$  为板的弯曲刚度,  $\rho h$  为板的单位面积质量密度, 固有频率系数  $\lambda_{mn}^2$  对于不同边界条件、不同长宽比的矩形板的不同阶次频率见表 III.1

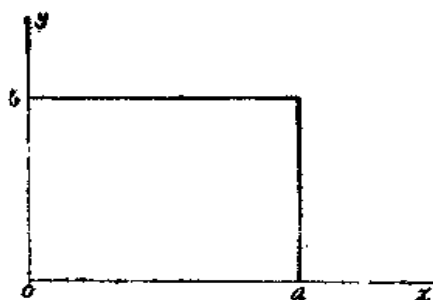
(2) 表中边界条件采用下列简写符号:

$S$ —简支;  $C$ —固定;  $F$ —自由。

其边界位置见下图

(3) 表中,  $b$  为板的  $y$  方向长度, 括号  $(m, n)$  内数值  $m, n$  分别代表频率系数相应的振型在  $x, y$  方向的半波数。

(4) 表中频率系数适用于下列泊松比材料: 带有自由边界板之  $\nu = 0.3$ ; 不带有自由边界板之  $\nu$  任意。



附图 III.1

### 参 考 资 料

- [1] Leissa, A.W., The Free Vibration of Rectangular Plates, J. Sound & Vib., 31, (1973), p.257.
- [2] Blevins, R.D., Formulas for Natural Frequency and Mode Shape, Van Nostrand Reinhold Company, (1979).
- [3] Gorman, D.T., Free Vibration Analysis of Rectangular Plates, Elsevier North Holland, Inc., (1982).

表 III.1

边界条件				$a/b$	阶 次					
$x=0$	$y=0$	$x=a$	$y=b$		1	2	3	4	5	6
S	S	S	S	2/5	11.45 (11)	16.19 (12)	24.08 (13)	35.14 (14)	41.06 (21)	45.80 (22)
				2/3	14.26 (11)	27.42 (12)	43.86 (21)	49.35 (13)	57.02 (22)	78.96 (23)
				1.0	19.74 (11)	49.35 (21)	49.35 (12)	78.96 (22)	98.70 (31)	98.70 (13)
				3/2	32.08 (11)	61.69 (21)	98.70 (12)	111.0 (31)	128.3 (22)	177.7 (32)
				5/2	71.56 (11)	101.2 (21)	150.5 (31)	219.6 (41)	256.6 (12)	286.2 (22)
S	S	S	C	2/5	11.75 (11)	17.19 (12)	25.92 (13)	37.83 (14)	41.21 (21)	46.36 (22)
				2/3	15.58 (11)	31.07 (12)	44.56 (21)	55.39 (13)	59.46 (22)	83.61 (23)
				1.0	23.65 (11)	51.67 (21)	58.65 (12)	86.13 (22)	100.3 (31)	113.2 (13)
				3/2	42.53 (11)	69.00 (21)	116.3 (31)	121.0 (12)	147.6 (22)	184.1 (41)
				5/2	103.9 (11)	128.3 (21)	172.4 (31)	237.3 (41)	320.8 (12)	323.0 (51)
C	S	S	C	2/5	16.85 (11)	21.36 (12)	29.24 (13)	40.51 (14)	51.46 (21)	55.12 (15)
				2/3	19.95 (11)	34.02 (12)	54.37 (21)	57.52 (13)	67.82 (22)	90.07 (14)
				1.0	27.06 (11)	50.54 (21)	60.79 (12)	92.86 (22)	114.6 (13)	114.7 (31)
				3/2	44.89 (11)	76.55 (21)	122.3 (12)	129.4 (31)	152.6 (22)	202.7 (41)
				5/2	105.3 (11)	133.5 (21)	182.7 (31)	253.2 (41)	321.6 (12)	344.5 (51)
S	F	S	S	2/5	10.13 (11)	13.06 (12)	18.84 (13)	27.56 (14)	39.34 (15)	39.61 (21)
				2/3	10.67 (11)	18.30 (12)	33.70 (13)	40.13 (21)	48.41 (22)	57.59 (14)
				1.0	11.68 (11)	27.76 (12)	41.20 (21)	59.07 (22)	61.86 (13)	90.29 (31)
				3/2	13.71 (11)	43.57 (21)	47.86 (12)	81.48 (22)	92.69 (31)	124.6 (13)
				5/2	18.80 (11)	50.54 (21)	100.2 (31)	100.2 (12)	147.6 (22)	169.1 (41)
S	F	F	S	2/5	1.320 (11)	4.743 (12)	10.36 (13)	15.87 (21)	18.93 (14)	20.17 (22)
				2/3	2.234 (11)	9.575 (12)	16.76 (21)	24.66 (13)	27.06 (22)	44.17 (23)

续上表

边界条件				a/b	阶次					
x=0	y=0	x=a	y=b		1	2	3	4	5	6
S	F	F	S	1.0	3.369 (11)	17.41 (12)	19.37 (21)	38.29 (22)	51.32 (13)	53.74 (31)
				3/2	5.026 (11)	21.54 (21)	37.72 (12)	55.49 (31)	60.88 (22)	99.39 (32)
				5/2	8.251 (11)	29.65 (21)	64.76 (31)	99.21 (12)	118.3 (41)	126.1 (22)
S	F	S	F	2/5	9.760 (11)	11.04 (12)	15.06 (13)	21.71 (14)	31.18 (15)	39.24 (21)
				2/3	9.698 (11)	12.98 (12)	22.95 (13)	39.11 (21)	40.36 (14)	42.69 (22)
				1.0	9.631 (11)	16.14 (12)	36.73 (13)	38.95 (21)	46.74 (22)	70.74 (23)
				3/2	9.558 (11)	21.62 (12)	36.72 (21)	54.84 (22)	65.79 (13)	87.63 (31)
				5/2	9.484 (11)	33.62 (12)	38.36 (21)	75.20 (22)	86.97 (31)	130.4 (32)
S	C	S	C	2/5	12.13 (11)	18.36 (12)	27.97 (13)	40.75 (14)	41.38 (21)	47.00 (22)
				2/3	17.37 (11)	35.34 (12)	45.43 (21)	62.05 (13)	62.31 (22)	88.80 (23)
				1.0	28.95 (11)	54.74 (21)	69.32 (12)	94.59 (22)	102.2 (31)	129.1 (13)
				3/2	56.35 (11)	78.98 (21)	123.2 (31)	146.3 (12)	170.1 (22)	189.1 (41)
				5/2	145.5 (11)	164.7 (21)	202.2 (31)	261.1 (41)	342.1 (51)	392.9 (12)
C	S	C	C	2/5	23.44 (11)	27.02 (12)	33.80 (13)	44.13 (14)	58.03 (15)	62.97 (21)
				2/3	25.86 (11)	38.10 (12)	60.33 (13)	65.62 (21)	77.56 (22)	92.15 (14)
				1.0	31.83 (11)	63.35 (12)	71.08 (21)	100.8 (22)	116.4 (13)	130.4 (31)
				3/2	48.17 (11)	85.51 (21)	124.0 (12)	144.0 (31)	158.4 (22)	214.8 (32)
				5/2	107.1 (11)	139.7 (21)	194.4 (31)	270.5 (41)	322.6 (12)	353.4 (22)
C	C	C	C	2/5	23.65 (11)	27.82 (12)	35.45 (13)	46.70 (14)	61.55 (15)	63.10 (21)
				2/3	27.01 (11)	41.72 (12)	66.14 (21)	66.55 (13)	79.85 (22)	100.9 (14)
				1.0	35.99 (11)	73.41 (21)	73.41 (12)	108.3 (22)	131.6 (31)	132.2 (13)
				3/2	60.77 (11)	93.86 (21)	148.8 (12)	149.7 (31)	179.7 (22)	226.9 (41)